



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>







(64)

See VII 1. 11  
VII-11(2)





MEMOIRES  
DE  
L'ACADEMIE  
ROYALE  
DES SCIENCES.

---

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

---

TOME VI.



A PARIS,  
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

---

M. DCCXXX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

---

A P A R I S ,

GABRIEL MARTIN, rue Saint Jacques  
à l'Etoile.

FRANÇOIS MONTALANT, Quay des  
Augustins.

Chez JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils,  
Imprimeur du Roy & de l'Academie  
Françoise, rue Saint Jacques.

HYPPOLITE-LOUIS GUERIN, rue  
Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin





## AVERTISSEMENT.

**O**N a rassemblé dans ce Sixième Tome les divers Ouvrages de M. DE ROBERVAL & de M. l'Abbé PICARD, autres que ceux qui regardent l'Astronomie & qui se trouvent dans le Tome VII.

Ce Volume contient la plus grande partie de celui qui fut imprimé *in-folio* au Louvre en 1693. On en a séparé les Oeuvres de M. FRENICLE qui composent en partie le Tome V. & différens Traitez de MM. HUYGHENS & MARIOTTE, qui ont été rassemblez dans les éditions complètes que l'on a fait des Ouvrages de ces deux Academiciens. Il étoit inutile de remettre ici sous les yeux du Public ce qu'il possède ailleurs dans un ordre plus naturel; & tous ces Traitez ensemble auroient composé un second Volume aussi gros que celui que nous donnons.

Parmi les divers Traitez de M. PICARD on a inséré celui du Nivellement qui avoit paru *in-douze* en 1684. & qu'on avoit réimprimé de même forme en 1728.

L'Historique de ces Ouvrages a été renvoyé  
à l'Histoire même de l'Academie , & c'est pour  
cette raison qu'on a obmis ici les Prefaces que  
M. DE LA HIRE avoit mises au Recueil *in-folio*  
& au Traité du Nivellement.



# TABLE DES MATIERES

contenuës dans ce Volume.

---

## Divers Ouvrages de M. DE ROBERVAL.

<b>O</b> bservations sur la composition des Mouvements & sur le moyen de trouver les Touchantes des lignes courbes.	page 1
Projet d'un Livre de Mecanique traitant des Mouvements composez.	90
De Recognitione Æquationum.	94
De Geometricâ Planarum & Cubicarum Æquationum Resolutione.	136
Traité des Indivisibles.	247
De Trochoide ejusque spatio.	361
Epistola ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL ad R. P. Merfennum.	428
Epistola Evangelistæ Torricellii ad ROBERVALLIUM.	436
Epistola Æ. P. DE ROBERVAL ad E. Torricellium.	440

## Divers Ouvrages de M. l'Abbé PICARD.

De la Pratique des grands Cadrans par le calcul.	481
De Mensuris.	532

<i>Mesures prises sur les Originaux &amp; comparées avec le Pied du Châtelet de Paris, Par M. AUZOUT.</i>	537
<b>De Mensura Liquidorum &amp; Aridorum.</b>	540
<b>Experimenta circa Aquas effluentes.</b>	544
<i>Fragmens de Dioptrique.</i>	550
<i>Traité du Nivellement.</i>	631

De M. ROEMER.

<b>De Craffitie &amp; viribus Tuborum in Aquæductibus se- cundum diversas fontium altitudines, diversasque Tuborum diametros.</b>	708
<b>Experimenta circa altitudines &amp; amplitudines proje- ctionis corporum gravium instituta cum argento vivo.</b>	711

*Fin de la Table des Matieres.*

D I V E R S  
O U V R A G E S

D E

M. PERSONIER DE ROBERVAL.





**OBSERVATIONS**  
 SUR LA COMPOSITION  
**DES MOUVEMENTS,**  
 ET SUR LE MOYEN DE TROUVER  
**LES TOUCHANTES**  
 DES LIGNES COURBES.

**P**OUR ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra même le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliqués, ou bien les insérer avec nos propositions.

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

**A**

*Définitions*

**N**OUS appellons ligne simple celle qui étant sur un plan, est telle que chacune de ses parties peut convenir avec toutes les autres parties de la même ligne. Telle est la ligne droite & la circonférence du cercle.

Ligne composée est celle dont les parties n'ont point cette propriété de s'ajuster & convenir avec chacune des autres parties.

Mouvement uniforme, est celui par lequel un mobile est porté d'une vitesse toujours égale à elle-même.

Mouvement irrégulier ou difforme, au contraire.

Puissance est une force mouvante.

Impression est l'action de cette puissance.

La ligne de direction de l'impression est celle par laquelle la puissance meut le mobile.

Nous appellons les impressions semblables, ou diverses, suivant que leurs lignes de direction sont entre-elles parallèles, ou ne le sont pas, &c.

Or il ne faut pas croire que nous appellions une ligne, ligne simple, d'autant qu'elle est décrite par un mouvement simple : car, comme nous verrons dans la suite, non-seulement la circonférence du cercle, mais encore la ligne droite peut être entendue avoir été décrite par un mouvement composé de tant de mouvemens qu'on voudra.

Nous avons encore défini la puissance en tant qu'elle nous peut servir considérant les diversités des mouvemens, ce qui n'empêche pas que dans d'autres spéculations, nous n'entendions par le mot de puissance une force capable de soutenir un poids, ou de quelque autre effet.

Généralement en ce Traité nous considérerons deux choses dans les mouvemens, leur direction, & leur vitesse.

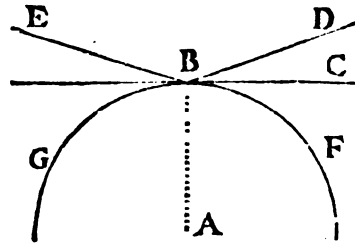
*Axiomes.*

**L**A direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamètre, au bout duquel le mobile se trouve.

Soit le mobile B, ( qui par son mouvement décrit la circonférence G B F ) au point B, à l'extrémité du demi-diamètre A B, auquel soit perpendiculaire la ligne B C. Je pose pour fondement que B C est la ligne de direction par laquelle se meut le mobile B en ce point-là. Et on en peut rendre une raison naturelle, qui est que l'on ne sçauroit prendre quelque autre ligne que ce puisse être, comme B D, sans tomber dans une absurdité: car puisque la nature ne souffre rien d'indéterminé, & qu'on ne sauroit prendre la ligne B D, qui fait l'angle oblique DBA, avec le demi-diamètre, que par la même raison l'on ne fût aussi obligé de prendre de l'autre part la ligne B E qui fait l'angle E B A, égal à D B A, ( ce qui est absurde ) il s'ensuit que la seule ligne qui puisse être prise pour la direction d'un tel mouvement sera la perpendiculaire B C, qui est la seule qui fasse angles droits avec le même demi-diamètre A B.

D'où il s'ensuit que cette direction change à chaque point de la circonférence.

D'où il s'ensuit encore que si un mobile porté de G. vers B venoit à se détacher de la circonférence du cercle, comme si le demi-diamètre l'ayant porté de G en B, le lâchoit au point B, le mobile seroit porté avec



*Ce raisonnement ne peut quadrer qu'à la circonférence d'un cercle.*

#### 4 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

cette impression par la ligne BC.

Et d'autant qu'il se rencontre que cette même ligne BC est la touchante du cercle au point B, nous prendrons pour principe d'invention qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puissent être, leur touchante, en quelque point que ce soit, est la ligne de direction du mouvement qu'a en ce même point le mobile qui les décrit. En sorte que composant des mouvemens en diverses façons, & venant à connoître la direction du mouvement composé en quelque point que ce soit, d'une ligne courbe, nous connoîtrons par même moyen sa touchante.

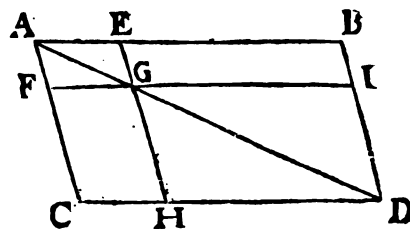
Or nous entendons qu'un mouvement est composé de plusieurs mouvemens, lors que le mobile duquel il est le mouvement, est meû par diverses impressions.

### THEOREME I.

#### *Proposition première.*

**S**I un mobile est porté par deux divers mouvemens chacun droit & uniforme, le mouvement composé de ces deux fera un mouvement droit & uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en même plan, en sorte que la ligne droite que d'écrira le mobile fera le diamètre d'un parallélogramme, les côtés duquel seront entre-eux comme les vitesses de ces deux mouvemens; & la vitesse du composé sera à chacun des composans comme le diamètre à chacun des côtés.

Soit le mobile A porté par deux divers mouvemens desquels les lignes de direction soient AB, AC, faisant l'angle BAC, & que les mouvemens droits & uniformes soient tel



R . S.

## DES MOUVEMENTS COMPOSÉS

qu'en même temps que l'impression AB auroit porté le mobile en B, en même temps l'impression AC l'eût porté en C. Je dis que le mobile porté par le mouvement composé de ces deux, sera porté le long du diamètre AD du parallélogramme AD, duquel les deux lignes AB, AC, sont les deux côtés, & que le mouvement qu'il aura sur le diamètre AD sera uniforme.

Ce que nous comprendrons, si nous nous imaginons que la ligne AB descendant toujours uniformément & parallèlement à la ligne CD, jusqu'à ce qu'elle ne soit qu'une même ligne avec la ligne CD; & la ligne AC se mouvant vers la ligne BD en la même façon, notre mobile A ne fait autre chose que se rencontrer à tout moment en la commune section de ces deux lignes.

Or il est assez clair que les points de cette commune section sont tous dans le diamètre AD; ce que nous démontrerons encore mieux par cette considération. Imaginons-nous que le mobile A se mouvant uniformément sur l'une des lignes AB ou AC, la même ligne se meut toujours parallèlement à soi-même. En cette sorte si le mobile est meû sur AB de A en B en même temps que AB descend jusques en CD; & posons le cas qu'en un certain temps le mobile soit arrivé en E, & qu'en ce même temps le côté AB soit descendu en sorte qu'il fasse une même ligne avec FI, dans laquelle prenons FG égale à AE (par notre supposition elle lui est aussi parallèle) donc le mobile A sera en G: je dis que le point G est dans le diamètre AD du parallélogramme ABCD. Car par le point G soit tiré la ligne EGH qui achevera le petit parallélogramme AG. Puis donc que les deux mouvemens que nous considérons sont uniformes, comme AB est à AE, ainsi AC est à AF; & en changeant, AE est à AF comme AB à AC, & l'angle BAC est commun; partant les deux parallélogrammes AD & AG

## 6 DES MOUVEMENS COMPOSÉS

**A G** sont semblables & à l'entour d'un même diamètre, & par conséquent le point **G** est dans le diamètre **A D**, ce qu'il falloit démontrer. Le reste de notre proposition n'est qu'un corollaire de ce que nous avons dit: c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas plus long-temps.

Mais nous remarquerons qu'en cette première composition de mouvemens & généralement en toutes les autres, nous pouvons considérer six choses. Sçavoir trois directions qui sont les deux simples, & la composée, & trois impressions qui sont les deux simples & la composée.

Or si les trois directions nous sont données, les trois impressions sont aussi données, c'est à dire les proportions de vitesses des trois mouvemens; car **A B**, **A C** & **A D**, étant données, nous n'aurons qu'à prendre un point **D** dans **A D**, ligne de direction du mouvement composé, & par le point **D** tirer **D B** & **D C** parallèle à **A B** & **A C**; & le parallélogramme étant ainsi achevé les proportions des mouvemens seront les mêmes que celles des deux côtés & du diamètre du parallélogramme.

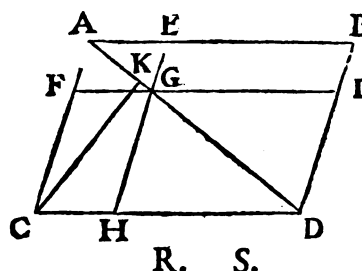
Mais les trois impressions étant connues, ou la proportion des trois lignes **A B**, **A C**, **A D**, nous ne connoîtrons aucune des directions, puis que pas une de ces lignes ne nous sera donnée de position, quoi - que les angles qu'elles feront à leur rencontre nous soient donnés en espece. Or en ce cas il faut que deux des puissances quelles qu'elles soient, soient ensemble plus grandes que la troisième, puis, que les lignes **A B**, **A C**, **A D**, qui sont en même raison que les puissances, peuvent être les côtés d'un triangle.

Que si l'on nous donne deux directions, l'une de l'un des mouvemens composans, & l'autre du composé, nous ne connoîtrons rien de la troisième, ni de la force des impressions, mais seulement nous aurons une raison

# DES MOUVEMENS COMPOSE'S 7

donnée telle que la raison de l'impression ou de la puissance composante qui nous est donnée à l'autre puissance

composante ne pourra pas être plus grande car  $AC$  &  $AD$  nous : étant données, aiant pris dans  $AC$  un point comme  $C$ , & de  $C$  aiant abaissé  $CK$  perpendiculaire sur  $AD$ , la raison de  $AC$



à  $AB$  ne pourra pas être plus grande que la raison de la ligne  $AC$  à cette perpendiculaire  $CK$ , puisque cette perpendiculaire est la moindre de toutes les lignes qui veut être le troisième-côté d'un triangle, l'un des deux autres étant  $AC$ , & le second une portion de la ligne  $AD$ .

Que si l'on nous eut donné deux mouvemens entiers, c'est-à-dire leurs directions & leurs vitesses, l'on nous eut aussi donné la direction & la vitesse du troisième; car aiant deux côtés d'un triangle & l'angle qu'ils contiennent, tout le reste nous est donné.

Pareillement nous étant donné deux directions telles qu'on voudra de deux mouvemens, & la raison de la vitesse du troisième à la vitesse de l'un des deux desquels nous avons la direction, nous connoissons les trois mouvemens, comme si l'on nous donne les directions  $AB$ ,  $AC$ , des deux composans, & la raison de la vitesse du composé à  $AB$  comme de  $R$  à  $S$ , prenant dans la direction  $AB$  un point comme  $B$ , & faisant que comme  $S$  est à  $R$ , ainsi  $AB$  soit à un autre, nous trouverons la ligne  $AD$ . Donc si du centre  $A$  & de l'intervalle  $AD$  nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne  $BI$   $D$  parallele à  $AF$  en  $D$ . nous aurons les vitesses des trois mouvemens  $AB$ ,  $AD$ ,  $BD$  ou  $AC$ , &c. Les choses

## 8 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

étant ainsi expliquées, nous énoncerons notre proposition plus généralement en cette sorte.

### *Proposition seconde.*

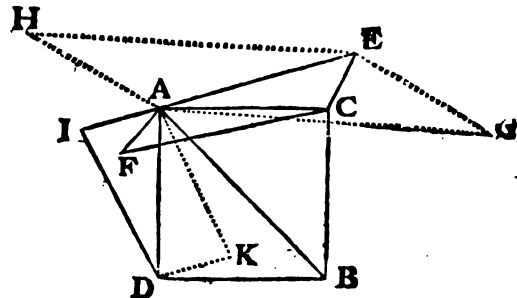
**U**N mouvement composé de tant de mouvements droits & uniformes qu'on voudra se fera par une ligne droite, & sera uniforme.

Ce qui est encore assez clair par ce que nous venons de dire; car prenant deux de ces mouvements j'en composerai un seul, puis que par la précédente ces deux se doivent réduire en un, puis de ce composé considéré comme simple (car il n'importe, puis que les deux directions qui le composent ne font pas plus qu'une simple que nous pouvons concevoir) & d'un autre, j'en composerai un second, qui par ce moyen sera composé de trois; & ainsi en continuant je viendrai à en composer un seul de tant qu'il me plaira d'où il résulte.

Que tout mouvement uniforme & droit peut être entendu, ou comme simple, ou comme composé de tant d'autres mouvements qu'on voudra.

Où il faut remarquer que nous pouvons concevoir ce mouvement comme composé de divers autres, lesquels se feront en des plans différens, en sorte pourtant que le

plus composé de tous soit dans le plan des deux que nous considérons comme les derniers qui le composent. Ainsi le mouvement  $AB$  peut être composé des deux  $AC$  &  $AD$ , dont l'un  $AC$  est composé de deux autres  $AE$ ,  $AF$ , l'un



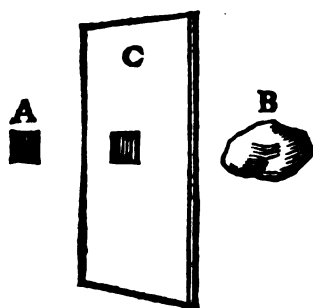
# DES MOUVEMENTS COMPOSÉS. 105

l'un desquels comme AE sera composé de deux autres AG & AH, & ainsi de tant qu'on voudra, & le second des deux AD, que nous avons dit qui composoient le mouvement AB, peut être entendu comme composé de deux autres AI, AK, & encore chacun de ceux-là de deux autres, &c. en sorte que le mouvement AB sera composé de tant que l'on voudra, & même desquels les impressions seront données: car qui m'empêchera de décrire des parallélogrammes si différens qu'il me plaira, desquels les diagonales soient AB, AD, AC, AE, AH, AG, &c.

Et c'est ici un champ d'une infinité de belles spéculations, comme si aiant supposé que le mouvement AB est composé de cinq autres mouvemens, la vitesse de chacun desquels nous est donnée, l'on nous demande combien il est nécessaire de connoître de leurs directions pour déterminer chacun d'eux & les donner de position, & ainsi d'une infinité d'autres qui pourroient être telles que la recherche excédant la capacité de notre esprit, nous n'en pourrions pas donner les solutions.

Mais pour tirer de cette proposition des connoissances encores plus belles, nous allons expliquer par son moïen la nature des réflexions & de la réfraction, aiant premièrement posé pour principe, qu'un mouvement pour composé qu'il soit de diverses impressions, aura le même effet qu'un autre causé par une seule impression, de laquelle la direction soit la même que de la composée, si l'un est aussi fort que l'autre.

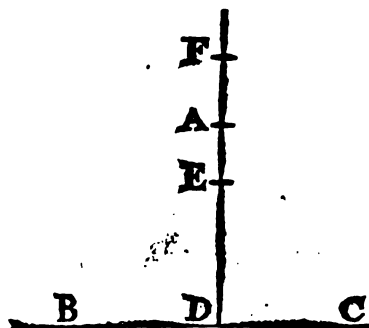
Ceci étant posé, nous considérons dans les corps deux sortes d'impressions qui les peuvent faire mouvoir; l'une qui les chasse d'un lieu vers un autre par violence: telle est celle que la raquette donne à la balle, la corde d'un arc à la flèche, &c. L'autre qui se fait par attraction des corps soit que cette attraction soit réciproque, ou non; & cette dernière est de telle nature qu'elle ne peut jamais causer



de réflexion, comme si l'aiman B attirant le fer A, le fer s'approchant vient à rencontrer le corps C qui l'empêche de continuer son mouvement de A vers B, il s'arrêtera contre le corps C, le pressant continuellement, d'autant que l'attraction se faisant au travers de C, la vertu de l'aiman empêche le fer de rejaillir vers A ; mais

la nature de la première sorte d'impression est telle qu'un corps étant meû en cette façon, s'il vient à rencontrer un obstacle auquel il ne puisse pas communiquer son impression, l'obstacle la lui rend, ou pour mieux dire le détermine à retourner vers une autre part ; & nous prendrons pour principe, que si un mobile rencontre un obstacle étant meû par une ligne perpendiculaire au même obstacle, il retournera vers le lieu duquel il étoit meû. Ainsi A. se

mouvant vers D. par une ligne perpendiculaire à l'obstacle BC, & venant à rencontrer cet obstacle, auquel nous supposons qu'il ne puisse pas communiquer toute ou presque toute l'impression qui l'a fait mouvoir, il sera réfléchi par la même ligne DA, par laquelle il s'étoit meû mais en telle sorte que s'il n'a communiqué rien du tout de son impression à BC, & que BC ne lui en ait pas donné une nouvelle, il retournera avec autant de vitesse qu'il en avoit en D ; que s'il a communiqué une partie de son impression à BC il ne retournera pas avec autant de vitesse qu'il en avoit en D. & enfin si l'ob-



FD

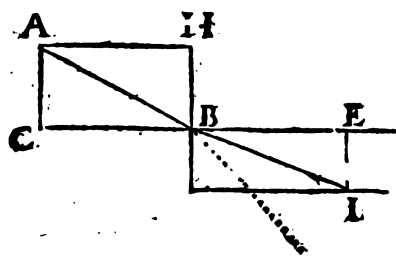
Ce principe étant ainsi expliqué, nous n'aurons point

Bij

## 12 . DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

composons un mouvement de deux, dont l'un soit CB ou BE que nous prenons égal à CB & l'autre EF & aiant décrit le parallelogramme HE, tirons la diagonale du point B, où se fait la réflexion en montant vers F, nous trouverons que la bale remontera en autant de temps par la ligne BF, qu'elle en aura mis à descendre par la ligne AB; en sorte que l'angle de réflexion sera égal à celui d'incidence, car supposant que la bale n'ait rien perdu de son impression, & n'en ait point acquis de nouvelle, son mouvement n'a fait que changer de direction: mais si elle eût rencontré un corps qui lui eût cédé, en sorte que lui communiquant de son impression elle en eût tout autant perdu, il eût fallu composer un mouvement de BE, & d'un autre moindre que EF, comme EG; auquel cas l'angle de réflexion auroit été moindre que celui d'incidence. Et posé que la bale eût rencontré un corps capable d'augmenter son impression, comme une raquette, ou un ressort, son mouvement auroit été composé de BE, & d'un autre comme EI plus grand qu'EF en montant, auquel cas l'angle de réflexion auroit été plus grand que celui d'incidence.

Et ce même raisonnement se peut aussi-bien accommoder à l'opinion de ceux qui tiennent que la bale ou tout autre missile aiant communiqué toute son impression à l'obstacle, elle réjaillit ou par la force du ressort qu'elle rencontre dans l'obstacle ou parcelle du ressort qui est en elle-même, ou par toutes les deux.



Venons à la réfraction, & supposons que la bale rencontre en B, non plus la superficie de la terre, mais une toile si déliée qu'elle ait la force de la rompre en perdant seule-

# DES MOUVEMENS COMPOSE'S. 13

ment une partie de son impression; & parce qu'elle ne doit rien perdre de celle qui la fait aller de la gauche vers la droite, d'autant que la toile ne lui est point opposée en ce sens-là, supposons qu'elle perd la moitié de l'impression qui la fait descendre, en ce cas il faudra continuer  $BE$  égale à  $CB$ , & prendre  $EI$  égale à la moitié de  $AC$ , de sorte que la diagonale  $BI$  sera le chemin que suivra le mobile après sa réfraction; & pareillement si la vitesse  $AC$  eût été augmentée, par exemple, de la moitié, comme si le mobile passant de l'air eût entré dans un autre milieu de telle nature qu'il eût pû s'y mouvoir une fois aussi vite, en ce cas nous aurions fait  $EI$  double de  $AC$ ,  $BE$  demeurant égale à  $BC$ , &c. ce que l'on voit expliqué bien au long dans les Auteurs.

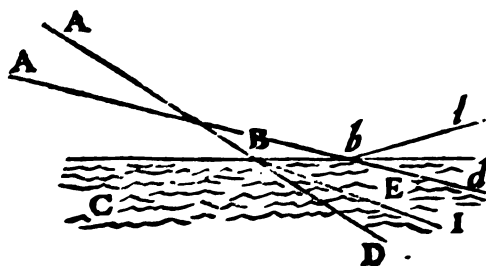
Or il faut remarquer avec soin cette façon de composer, & mêler les mouvemens, puis que nous voïons que des personnes le plus exercées dans la recherche des vérités Mathématiques se sont trompées en cet endroit: ainsi *M. Des Cartes* pour expliquer la réflexion, décrit un cercle du centre  $B$ , qui passe par  $A$ , & trouve que le point de la circonférence auquel le mobile retournera en autant de tems qu'il a mis à aller de  $A$  vers  $B$  doit être  $F$ ; au lieu que d'un raisonnement semblable au nôtre il devoit en tirer comme une conséquence, que le point  $F$  dans cette hypothèse se rencontrera dans la circonférence du cercle décrit du centre  $B$  par  $A$ .

Secondement, expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impression ou vitesse, & de détermination, lesquels pourtant il avoit distingués peu auparavant; car en la page 17. ligne dernière, il dit & puis qu'elle ne perd rien du tout de la détermination, &c. Disc. 2. de la Dioptr.

Troisièmement, il semble qu'il explique mal dans la page 19. la réflexion de la bale sur la superficie de l'eau: car il est vraisemblable que lors que la bale

#### 14 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

AB entre dans l'eau, & que la réfraction se fait vers I,



c'est à cause que la bale entrant dans l'eau au point B, & voulant continuer son chemin vers D, rencontre d'un côté l'angle CBD obtus, & de l'autre côté l'angle EBD aigu, & trouve plus de

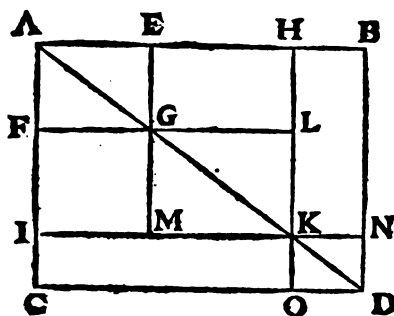
corps, & partant plus de résistance du côté de l'angle obtus que du côté de l'aigu: ainsi elle se détourne par un chemin un peu courbe vers I, lequel elle ne quitte plus lors qu'elle est assez enfoncée dans l'eau: car bien qu'il y ait toujours plus d'eau au dessous de BI, que non pas au dessus, néanmoins à cause de son enfoncement, elle trouve la résistance d'une part aussi forte que de l'autre, ce qui fait qu'elle continuë à se mouvoir vers I.

Mais lors qu'elle entre dans l'eau par la ligne A b trop inclinée, d'autant qu'avant d'être parvenue dans l'eau en un endroit auquel la différence de la résistance des deux parties de l'eau lui fut insensible, il faudroit qu'elle eut (pour ainsi dire) labouré un long sillon d'eau, & agi pendant trop long-temps contre la résistance de l'eau du côté inférieur; de sorte que par cette action elle perd l'impression de s'enfoncer davantage; & sa figure que nous supposons être ronde, quoi qu'elle tienne de la nature & des propriétés d'un coin qui fendroit l'eau, la porte vers la partie la plus foible, c'est-à-dire vers la superficie supérieure de l'eau, & quelquefois au dessus de la même superficie; ce qui est assez intelligible.

Voiez ce que dit M. Des Cartes sur ce sujet dans les pages 21, 22. & les suivantes.

L'on pourroit déduire un grand nombre de belles conclusions de cette proposition du mouvement composé de deux droits : mais puisque dans ce petit Traité notre but principal est de tirer du mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes, nous ne nous arrêterons pas davantage à cette proposition.

Mais avant que de passer outre, nous remarquerons deux choses : la première, que le diamètre AD eût pû être décrit par un point porté de deux mouvemens droits AB, AC, desquels ni l'un ni l'autre n'eût été uniforme. Il eût pour-



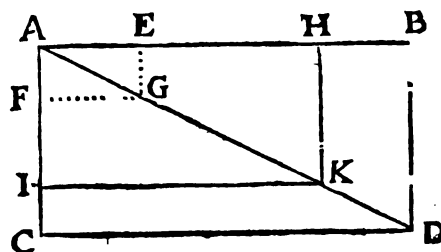
tant fallu qu'à mesure que l'un, comme AB, eût été augmenté ou diminué, la vitesse de l'autre eût été changée à proportion, comme si le mobile eût été porté en AB d'un mouvement fort lent depuis A jusques à E, & d'un fort vite depuis E, jusques en H, &c. pour lui faire décrire la ligne AD, il auroit fallu qu'ayant divisé AC en même raison qu'AB dans les points F & I, la ligne AB eût descendu fort lentement d'A vers F, & fort vite de F vers I; ce que l'on pourra mieux concevoir, si l'on considère le mobile en G, comme devant en même temps être porté de deux mouvemens uniformes, & desquels les vitesses sont entre-elles, comme les lignes GL & GM le long des mêmes lignes GL & GM, &c.

Secondement, il nous sera facile de voir que si le mo-

# 16 DES MOUVEMENS COMPOSÉS.

bile eût été porté sur les lignes A B, A C par deux mouvemens droits, mais différens l'un de l'autre, en telle sorte que les parties de l'un n'eussent pas eû toujours mê-

*Mal expliqué, mais facile à entendre.*



me raison avec les parties de l'autre, en ce cas le mobile eût décrit une ligne courbe; comme si les deux mouvemens eussent été difformes ou disproportionnés, lors que le mobile étant en

Edans la ligne A B, il eût été en F, dans la ligne A C, & qu'étant en H, il eût aussi été en I, la ligne décrite par le mouvement mêlé de ces deux auroit été la courbe A G K D, &c.

Et cette considération ne sera pas des moins utiles pour la recherche des touchantes des lignes courbes, comme l'usage le fera découvrir.

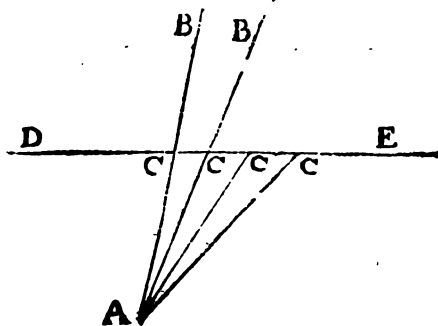
## Proposition Troisième,

**B**IEN que ce que nous avons dit jusques ici des mouvemens mêlez pût suffire pour nous en faire comprendre la nature, néanmoins puis que leur connoissance est un principe d'invention pour quantité de belles vérités, il sera peut-être à propos d'en considérer ici divers autres mélanges, quoique tout ce que nous en dirons ait une grande étendue, à cause que ce ne sont ici que les élémens de cette science.

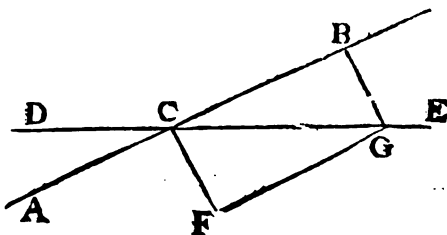
Nous avons expliqué dans les propositions précédentes comment une ligne droite peut être entendue décrite par un mouvement uniforme mêlé de deux droits & uniformes, ou par un mouvement inégal mêlé de deux droits & difformes, &c.

Or

Or la même ligne droite peut aussi être entendue d'être écrite par une infinité d'autres mouvemens, par exemple, par un mouvement droit & un circulaire, comme si la droite  $ACB$  se mouvant circulairement autour du centre  $A$ , un point, comme  $C$ , est porté dans la même ligne en sorte qu'il se trouve toujours dans la commune section de la même ligne  $AB$ , & d'une autre  $DE$ : nous dirons que la ligne  $DE$  est décrite par un mouvement mêlé d'un droit qui se fait le long de la ligne  $AB$ ,



& d'un circulaire que la même ligne  $AB$  communique au mobile qui le décrit par son mouvement droit; & ces deux mouvemens sont tels, quoique bien difformes, que si l'on nous donne de position le point  $A$  & la ligne  $DE$ , quelque point que l'on prenne dans la ligne  $DE$ , la proportion de l'un de ces mouvemens à l'autre sera donné.



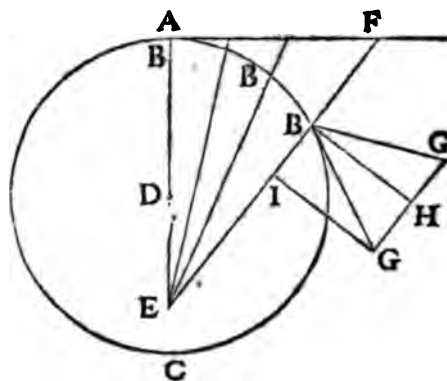
Car aiant prolongé la ligne  $AB$  par delà la ligne  $DE$ , comme en  $B$  si du point  $C$  auquel nous voulons connoître la proportion de ces deux mouvemens, nous tirons  $CF$  perpendiculaire à  $AB$ , nous aurons la direction du mouvement circulaire qui se fait en  $C$ ; mais les deux autres directions sont données,  $AB$  du mouvement droit simple, &  $DE$  du mouvement composé. Donc les trois

impression nous sont données, ou la proportion de chacun des mouvemens aux deux autres.

Ce que nous avons dit de la parabole se doit encore entendre du cercle, de l'hyperbole, de l'ellipse, & généralement de toute autre ligne; de sorte que la ligne DE pouvant être entendue décrite par un mouvement composé d'une infinité de mouvemens droits, & chacun de ceux-là d'un droit & d'un circulaire, ou d'un droit & d'un parabolique, &c. vous voyez que la même ligne pourra être décrite par une infinité de mouvemens, cha-

cun différens en espèce de tous les autres.

Et pour montrer que nous pouvons dire du cercle, de la parabole, & d'une infinité de lignes courbes, ce que nous avons dit de la droite; soit la circonférence du cercle  $ABC$ , le centre du cercle  $D$ , & un point  $E$  dans le



cercle autre que le centre, & soit tirée la ligne  $EDA$ : vous voyez donc que si la ligne  $EDA$  tourne autour de  $E$ , & qu'en même temps un point  $B$  se promène sur la même ligne, en sorte qu'il se maintienne toujours dans la circonférence  $ABC$ , cette circonférence sera décrite par le mélange d'un mouvement droit & d'un circulaire. Et vous voyez encore, que si l'on veut sçavoir la raison de ces deux mouvemens l'un à l'autre, la touchante de la circonférence nous étant donnée en un point, cette raison nous sera donnée en ce même point, comme si la touchante  $AF$  nous est donnée au point  $A$ , & la position de la ligne  $EDA$ , nous verrons que cette ligne étant perpendiculaire à  $AF$ , elle est la ligne de direction du mouvement circulaire simple, qui se fait à l'entour du point  $E$ ; mais elle est aussi la direction du mouvement circulaire composé, puis qu'elle touche la circonférence  $ABC$ , par laquelle se doit faire ce même mouvement composé; d'où il s'ensuit que le mobile qui décrit la circonférence  $ABC$  par son mouvement, n'a au point  $A$  qu'un seul mouvement circulaire, duquel la direction est  $AF$ .

Mais si l'on donne la touchante  $BG$  en un autre point de la circonférence, comme en  $B$ , le point  $E$  étant encore donné, nous menerons la ligne  $EB$ , qui sera la direction du mouvement droit, &  $BH$  sa perpendiculaire sera la direction du mouvement circulaire simple à l'entour du point  $E$ ; mais la direction du mouvement composé est aussi donnée, sçavoir la touchante  $BG$ , nous connoîtrons donc la vitesse de ces trois mouvemens, & nous comparerons chacun deux au deux autres.

Comme au contraire, si l'on nous eût donné les points  $E$  &  $B$ , & la raison du mouvement droit au mouvement circulaire simple, comme de  $GH$  à  $BH$ , nous aurions trouvé la touchante du cercle.

Il nous sera aussi facile de concevoir que la même circonférence peut être décrite par un mouvement droit & un parabolique, ou par un droit & un hyperbolique, &c. comme nous avons dit de la ligne droite.

Et pour finir en deux mots cette spéculation, nous pourrons dire de la parabole, de l'hyperbole, & des autres lignes courbes, ce que nous avons expliqué du cercle.

*Proposition quatrième.*

*Toute cette proposition est mal digérée, & il vaut mieux la passer que de s'y arrêter.*

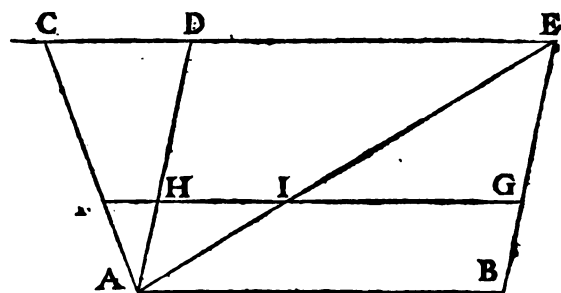
**S**I deux lignes droites faisant l'une avec l'autre tel angle qu'on voudra, viennent à se mouvoir parallèlement chacune à soi-même, en telle sorte qu'elles se puissent toujours couper l'une l'autre, & que la vitesse de la première soit donnée dans la seconde, & la vitesse de la seconde donnée dans une troisième, qui fasse tel angle qu'on voudra au point de leur départ: le point qui se rencontrera toujours dans leur commune section sera porté par trois mouvemens, deux desquels étant réduits à un, l'on trouvera que le mouvement de ce point dans la seconde

# DES MOUVEMENTS COMPOSÉS 21

ligne aura été hâté, quoique toujours uniformement, en sorte que par le mouvement composé de ces trois, il aura décrit une ligne d'un mouvement uniforme, &c.

Cette proposition seroit extraordinairement longue, c'est pourquoi nous expliquerons le reste ci-après.

Supposons que la droite AB comprenant tel angle qu'on voudra en A avec la droite AD, l'une & l'autre de ces deux lig-



nes viennent à se mouvoir parallelement à soi-même & uniformement, AB vers D, & AD vers B, & que la vitesse de la ligne DA soit donnée dans AB & la vitesse de AB, soit donnée dans une troisième ligne AC, en telle sorte que lors que le point A de la ligne DA sera arrivé en B, en même temps le point A de la ligne BA arrivera en C. Je dis que le point qui se rencontre toujours en la commune section des deux lignes AB, AD sera porté par trois mouvemens droits, l'un par la ligne AD, & les deux autres par la ligne AB, en sorte que ladite ligne AB étant prolongée à l'infini, il parcourra une plus grande ligne sur AB, qu'il n'eût fait si la vitesse du point A de la ligne AB eût été donnée depuis A jusques en D, & que la ligne qu'il décrira par le mouvement mêlé de ces trois sera le diamètre AE du parallelogramme DB, & que son mouvement sur AE sera uniforme.

La première partie de cette proposition est assez intelligible de soi-même, car quand nous ne donnerions point de mouvement à la ligne DA, & que la ligne

## 22 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS

AB se mouvant, en sorte que son bout A décrivant la ligne AC, un point fût porté le long de AB, commençant son mouvement en A à telle condition qu'il dût toujours être en la commune section des deux AB, AD; il est clair que ce point auroit deux mouvemens sur la ligne AD, l'un AC, par lequel la ligne AB s'efforceroit de le porter d'A vers C. l'autre CD, par lequel il seroit ramené de C vers D, pour décrire la ligne AD. Mais si ces deux mouvemens étant ainsi prouvés, nous faisons encore mouvoir la ligne AD vers B, ce point aura encore un mouvement par lequel il suivra la ligne AD: il est donc vrai qu'il a trois mouvemens, &c.

Ce que nous pouvons encore examiner en cette sorte, posé que le point A de AB dût parcourir AD, & que A de AD dût parcourir AB, il est certain que le point qui se rencontreroit toujours sur leur commune section seroit porté par deux divers mouvemens, comme nous avons démontré en notre première proposition: mais faisant que le point A de AB décrive AC, au lieu de AD, ce point a encore un mouvement par lequel la ligne AB s'efforce de le porter le long de AC, ainsi pour lui résister il faut qu'il se hâte davantage sur AB en sorte qu'il y décrive une plus grande ligne qu'il n'eût fait, si A de AB eût parcouru AD: donc le point a trois mouvemens, &c.

Or nous démontrerons en cette façon que le mouvement composé de ces trois est droit & uniforme, & le long du diamètre AE. Car aiant tiré la ligne FHIG parallèle à AB coupant, &c. lors que le point A de AB sera en F, si la ligne AD n'a pas changé de place, le point de la commune section aura eû deux mouvemens uniformes AF, FH, que nous réduirons à un seul AH, par la première proposition, en sorte que ce point sera en H, de la ligne AHD. Mais en même temps le point

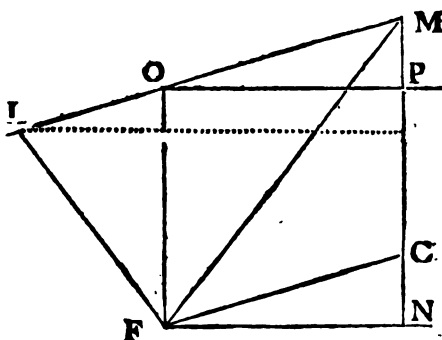
# DES MOUVEMENTS COMPOSÉS. 23

H de AHD a été porté en I par un mouvement uniforme HI : donc ce point de commune section a été porté par deux mouvemens uniforme AH, HI ; & partant par la première proposition il a décrit la ligne AI, &c.

Notez qu'il n'étoit pas besoin de tirer FG, & que le même argument se pouvoit faire des lignes AC, CD, & les ayant réduites à AD, composer un mouvement des deux AD, & DE.

Cette proposition se doit entendre tres-généralement.

Ainsi si la ligne FC se meût parallèlement à soi-même & uniformement, en sorte que son point F, décrive la ligne FL, & qu'en même temps la ligne FO se meuve parallèlement à soi-même & uniformement, en sorte que son



bout F doive décrire la ligne FN, le point de commune section des deux lignes FC, FO, aura décrit la diagonale FM du parallélogramme OC. Quoique ce point ait été porté de quatre divers mouvemens, \* car les deux mouvemens qu'il a en FO, l'un par lequel il court de F vers O, l'autre par lequel la ligne FO tâche de le reculer pour lui faire décrire FN, ces deux mouvemens, dis-je, se réduisent à un seul FC, (car FC est le diamètre d'un parallélogramme FNC) & les deux mouvemens qu'il a en FC, l'un par lequel décrivant la ligne FC, il est porté de F vers C, l'autre par lequel la ligne FC tâche de lui faire décrire la ligne FL, ces deux mouvemens, dis-je, se réduisent à un seul droit & uniforme FO. Donc tous

## 24 DES MOUVEMENS COMPOSE'S.

ces quatre mouvemens étoient réduits aux deux  $FC$ ,  $FO$ , par la première proposition, par la même proposition le point de commune section des deux lignes  $FC$ ,  $FO$ , aura décrit la ligne  $FM$ , qui est ce qu'il falloit démontrer.

*\* Je dirois ainsi : Le point  $F$  en  $FC$ , se mouvant vers  $LM$ , a deux mouvemens droits & uniformes,  $FL$ ,  $LO$ , qui composent un mouvement droit  $FO$ .*

*Semblablement ledit point  $F$  en  $FO$ , se mouvant vers  $NM$ , a deux mouvemens  $FN$ ,  $NC$ , qui composent  $FC$ .*

*Donc des deux mouvemens  $FO$ ,  $FC$ , sera composé un mouvement  $FM$ , qui sera composé de tous ces quatre, &  $FM$  est diagonale, &c.*

Nous aurons besoin de cette proposition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-être de quantité d'autres lignes.

## P R O B L E M E I.

### Proposition cinquième.

**D**ONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvemens qui les décrivent.

### Axiome, ou principe d'invention.

**L**A direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention.

*Regle*

*Règle générale.*

**P**AR les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne fera point à propos de la répéter.

Vous trouverez dans les exemples suivans les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limçon de Monsieur Paschal, de la Roulette de Monsieur Rob. de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. &c.

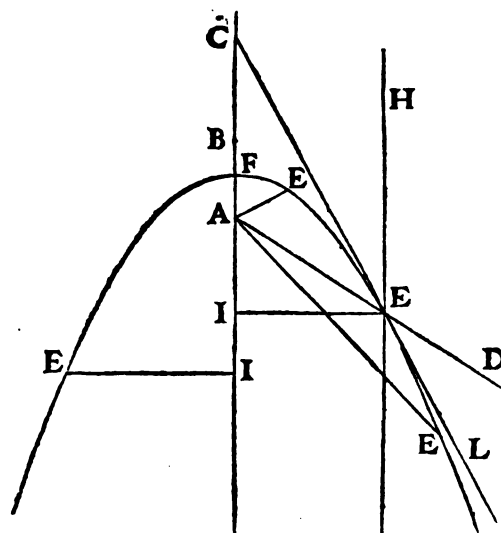
*Premier exemple des touchantes de la parabole.*

**S**OIT que l'on nous ait donné la parabole  $EFE$ , & le moyen de le décrire par la cinquième méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25. qui est telle.

Le sommet & le foyer de la parabole étant donnez de position, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit  $A$  le foyer, &  $F$  le sommet: soit tirée la ligne  $AF$  & prolongée de  $F$  vers  $B$ , & soit  $FB$  égale à  $AF$  la même ligne  $BFA$  sera l'axe de la parabole. Prenez dans  $FA$  autant de points  $I$  qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à  $FA$ ; du

centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole passera par les points E.



Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne A E prolongée comme en D, & la ligne E I perpendiculaire à AB, & encore la ligne H E parallèle à l'axe FAI, alors il est clair par la description ci-dessus, que le mouvement du point

E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne A E, & l'autre est la ligne H E sur laquelle il se meût de même vitesse que le point I dans la ligne B A, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne A E par la construction, puisque A E est toujours égale à B I. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connue, sçavoir suivant les lignes droites A E D, H E données de position, si vous divisez l'angle A E H en deux également par la ligne L E C: qui est le diamètre d'un rhombe autour de l'angle A E H, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux H E A E,) la ligne L E C sera la touchante.

Avant que de passer outre, remarquez deux choses.

La première, que nous n'avons pas voulu considérer le point E comme commune section de deux lignes, dont l'une A E infinie se meut circulairement autour du point A ; l'autre I E aussi infinie descend parallèlement à soi-même, ayant toujours son extrémité I dans la ligne B A, puisqu'il a été plus facile de considérer les mouvemens A E, H E du point E en chaque endroit de la section de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens A E, H E son égaux l'un à l'autre, ce qui sera vrai, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'ensuit pas que tous les mouvemens d'un point E soient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en ayant qu'un réciproque de l'autre côté de la parabole & également éloigné du sommet. Vous entendrez la même chose en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. proposition 33, & pour le trouver en quelque façons analitiquement, posons qu'il soit vrai que L E C touche la Parabole en E. Si donc nous abaïssons l'ordonnée E I, I F sera égale à F C, & ajoutant F B à I F, & F A à C F, les toutes C A & I B seront égales (car les ajoutées le sont par la construction) mais I B est égale à A E par notre construction, donc C A & A E sont égales, & l'angle A C E égal à l'angle A E C; mais par notre construction nous avons divisé l'angle A E H en deux également, & par conséquent nous avons fait A E C, C E H égaux entr'eux, donc A C E est égal à C E H son alterne, ce qui est vrai, car par la construction E H, est parallèle à C I.

Ou si vous aimez mieux, puisque C I, E H sont parallèles, l'angle A C E est égal à C E H; mais par la con-

28 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

struction  $CEH$  est égal à  $AEC$ , donc  $ACE$  &  $AEC$ , sont égaux, & le triangle  $ACE$  isoscèle, donc  $CA$  est égale à  $AE$ . Mais encore par la construction  $AE$  est égale à  $BI$ ,  $CA$  est donc égale à  $BI$ , & en ôtant les égales  $AF$ ,  $BF$ ,  $CF$  sera égale à  $FI$ , & par conséquent la ligne  $CE$  touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que si l'on nous eût donné la description de la parabole par un point, comme  $E$  se promenant le long de la ligne  $IE$  du mouvement uniforme, en même temps que la ligne  $IF$  descend parallèlement à soi-même, d'un mouvement très-inégal, mais tel que le quarré de  $IE$  est toujours égal au rectangle sous  $IF$ , & une ligne donnée nommée  $P$ , qui en ce cas est le côté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problème.

La première (comme  $P$ ) de trois lignes continuellement proportionnelles nous étant donnée, & un mouvement égal dans la seconde  $IE$  trouver le mouvement qui se fait dans la troisième  $FI$ , ce qui est un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore proposer le moïen de décrire la Parabole par quelques autres de ses propriétés, ce qui seroit plus difficile.

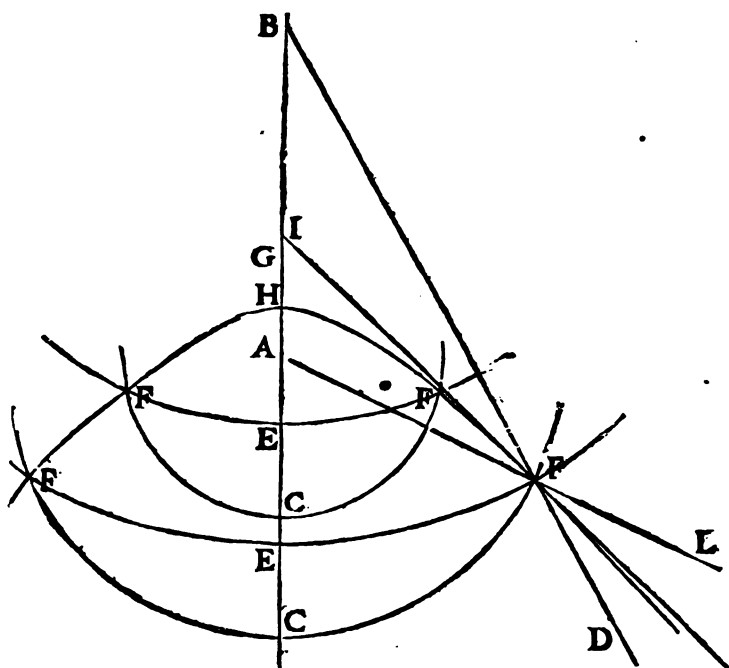
*Second exemple des touchantes de l'Hyperbole.*

**N**OUS la décrirons avec M. Myd. liv. 2. prop. 26. en cette sorte.

Le sommet & le deux foyers ou points de comparaison de l'Hyperbole étant données de position, décrire l'Hyperbole par des points dans le même plan.

Soient les foyers  $AB$ , &  $H$  le sommet, donc la ligne droite  $AB$  passera par  $H$ . Prenons  $HG$  égale à  $HA$ , & prenons dans  $HA$ , prolongée, s'il en est besoin, tant de points que nous voudrons, comme  $E$ , par les

quels de B comme centre décrivons des arcs de cercle



EF, & du centre A & de l'intervalle, dont chaque point E est éloigné de G, d'écrivons d'autres arcs de cercle CF, qui coupent les premiers, comme en F, l'Hyperbole passera par tous les points F.

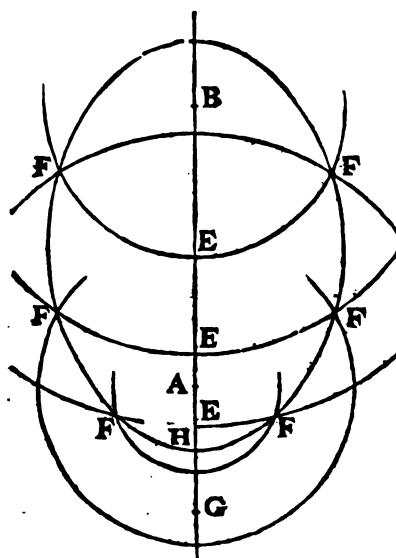
Cela posé, si je veux tirer la touchante de l'hyperbole, comme en F, aiant prolongé AF, comme en L, & BF, comme en D, sans m'amuser à considérer que l'hyperbole est décrite par le point E, qui est toujours la commune section des deux lignes droites BFD, AFL, lesquelles se meuvent circulairement, la première autour du centre B l'autre au tour du centre A, je vois qu'en quel lieu que je prenne le point F, si je le considère décrivant l'hyperbole à commencer du som-

30 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

met, il a deux mouvemens ; l'un, par lequel il s'éloigne d'A, le long de la ligne AL ; l'autre par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne BD. Puis donc qu'il s'éloigne également d'A & de B, & que les deux directions sont FL, FD, aiant fait un rhombe duquel l'angle soit DFL, c'est à sçavoir, aiant divisé l'angle DFL, en deux parties égales pour avoir le diamètre de ce rhombe, qui sera la direction du mouvement composé, la ligne MFI qui partage cet angle sera la touchante de l'hyperbole. Apoll. démontre liv. 3. prop. 48. que l'angle IFA est égal à l'angle IFB.

*Troisième exemple des touchantes de l'Ellipse.*

**V**OIC Y comme M. Myd. la décrit par sa cinquième méthode générale, l. 2. prop. 27.



Les deux foyers, & l'un ou l'autre sommet de l'ellipse étant donnez de position, d'écrire l'Ellipse par des points touvez sur le même plan.

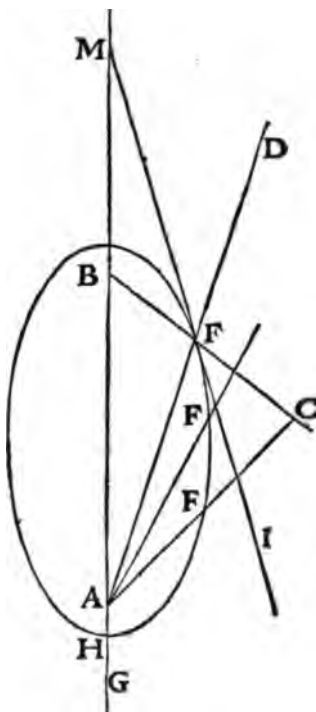
Soient les foyers ou points de comparaison A & B, & H le sommet.

Donc la droite AB prolongée passera par H, soit pris HG égale à AH, & du centre B de tant & de tels intervalles qu'on voudra plus grands pourtant que AH, & moindres que

BH, comme BE, décrivez des arcs de cercle, comme EF, & du centre A & de l'intervalle, qui est entre cha-

cun de ces arcs , & le point G décrivez d'autres arcs qui coupent chacun des premiers, comme en F, l'Ellipse passera par les points F F.

L'Ellipse étant ainsi d'écrite, s'il faut tirer sa touchante comme en F, aiant tiré les lignes BFC & AFD, soit que je considère les deux mouvemens du point F en BC, & AD, ou comme s'éloignant de B dans FC, auquel cas il s'approche d'A dans FA, ou comme s'éloignant d'A dans FD, auquel cas il s'approche de B le long de FB, puisque le point F s'éloigne autant de l'un des points AB, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens sont BFC, & AFD, je n'ai qu'à diviser l'un des deux angles AFC, ou BFD en deux également par la ligne IFM, elle fera la touchante de l'Ellipse.



Apoll. dans la même 48. du troisieme veut que l'angle AFI soit égal à l'angle BFM, ce qui s'accorde à notre méthode, car les angles AFC, BFD ( au sommet l'un de l'autre ) étant égaux, leurs moitiez AFI, BFM le seront aussi, ce qu'il falloit démontrer.

J'oublois de mettre en deux mots la construction de ces trois exemples, pour servir de règle générale.

*Pour tirer les touchantes des sections coniques.*

**P**OUR la Parabole, étant donné le sommet & le foyer par le point où vous voulez la touchante, tirez une ligne parallèle à l'axe, & une autre ligne jusqu'au foyer, divisez en deux également des quatre angles que ces deux lignes font, les deux que le parabole coupe, la ligne qui fera cette division sera la touchante.

Pour l'Hyperbole & l'Ellipse, les deux foyers étant donnés par le point où vous voulez la touchante, tirez deux lignes aux deux foyers des quatre angles que ces lignes feront en ce point, divisez en deux également les deux opposez que la section conique coupe, la ligne qui fera cette division sera la touchante.

*Quatrième exemple des touchantes de la Conchoïde de dessus, de Nicomede.*

**B**IEN que l'on puisse décrire une infinité de lignes courbes, chacune desquelles sera conchoïde & asymptote à une même ligne droite, si est-ce que nous n'en considérons que de deux sortes ou genres, suivant qu'elles sont décrites, ou entre leur pole & la ligne droite, qui leur sert de base, règle ou asymptote, ce que nous appellons la conchoïde de dessous; ou que cette ligne droite soit entre le pole & la conchoïde, ce que nous appellons la conchoïde de dessus, ou de Nicomede; parce que, quoique leurs courbures soient toutes différentes les unes des autres, n'étant moins la méthode pour en trouver les touchantes n'en considère que ces deux cas.

Vous remarquerez que le pole de la conchoïde ne peut pas être dans la ligne qui sert de règle ou de base à la conchoïde, car la ligne qui seroit décrite de cette sorte  
seroit

forte feroit un demi-cercle, dont la ligne droite qu'on auroit prise pour base de la conchoïde, feroit le diamètre, &c.

La Conchoïde de dessus se décrit en cette façon.

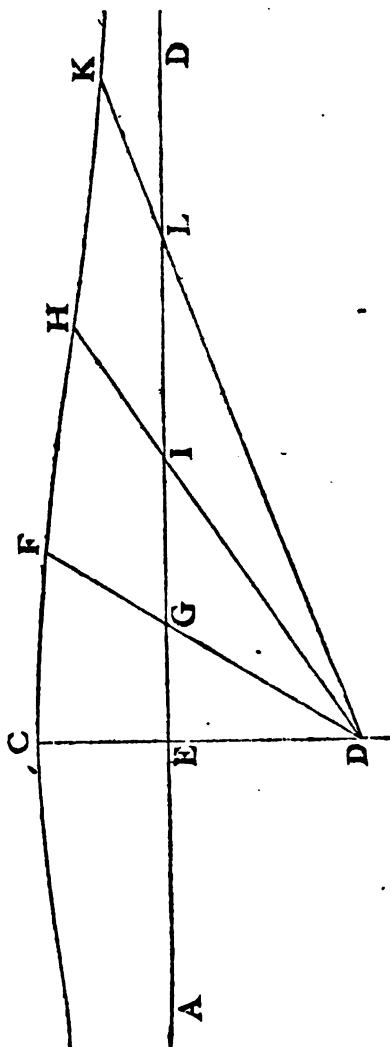
Soit la droite infinie AD à laquelle il faut tirer une conchoïde, de laquelle le sommet soit C. Du point C tirez CD perpendiculaire à AB coupant AB en E, & dans CD prenez un point comme D, en sorte que la ligne AB soit entre les deux points C & D, puis de D tirez quantité de lignes occultes, comme DGF, DIH, &c. vers la ligne AB qui la rencontrent en GIL &c. puis prenez les lignes GF, IH, LK, chacune égale à EC, la Conchoïde passera par les points FHK &c.

Ayant ainsi décrit la Conchoïde, il sera facile d'en tirer les touchantes, par exemple au point F.

Considérons que la conchoïde est décrite par deux mouvemens du même point; l'un par lequel il monte le long de la ligne

*Rec. de l'Acad. Tome VI.*

E





rons qu'elles est décrite par un point G, qui monte dans la ligne DGF, autant que fait le point F dans la même ligne DGF; car puisque les lignes EC, GF sont égales par la construction, l'excès de la ligne DF sur la ligne DC est le même que l'excès de DG sur DE. Donc le point E est autant monté allant de E jusqu'à G, que le point F allant de C jusqu'à F. Et pour le mouvement circulaire de G, non-seulement nous saurons la raison qu'il a avec le mouvement droit G, leurs deux directions & celle de leur mouvement composé nous étant données, mais aussi nous saurons la raison qu'il a avec le mouvement circulaire F en cette façon.

Tirez GH perpendiculaire à DG; d'un point de DH comme H, tirez HI parallèle à DG, qui coupe la règle EGB en I: vous avez donc la raison du mouvement circulaire G au mouvement droit G, comme de GH à HI; & puis que le mouvement droit G est égal au mouvement droit F, reste d'avoir la raison du mouvement circulaire F au mouvement circulaire G; & parce que ces mouvemens sont entr'eux comme les circonférences de leurs cercles, c'est-à-dire en même raison que leurs demi-diamètres DF, DG, il faut donc faire que comme DG à DF, ainsi GH soit à une ligne prise dans FK. Or la construction en est très aisée car vous n'avez qu'à tirez la ligne DHK rencontrant FK en K, d'autant que les triangles DGH, DFK seront semblables. Vous avez donc la raison du mouvement circulaire F au mouvement droit F, comme de FK à KL ou HI. Donc si par K vous tirez KL parallèle à DF, & égale à HI; puisque les deux FK, KL sont les directions des deux mouvemens F, & en même raison que ces deux mouvemens, la droite LF étant menée, elle fera la direction du mouvement composé de ces deux, c'est-à-dire, la touchante de la Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

En deux mots le Pole D & la règle AB de la Conchoïde étant donnez de position, & un point de la Conchoïde F, tirez DF qui coupe AB en G, sur les points G & F, tirez GH & FK perpendiculaires à DF, faites l'angle FDK aigu *ad libitum*, tirant la ligne DK qui coupe GH en H, & FK en K, tirez HI parallèle à DF coupant AB en I, puis tirez KL égale & parallèle à HI, le point L sera dans la touchante au point F.

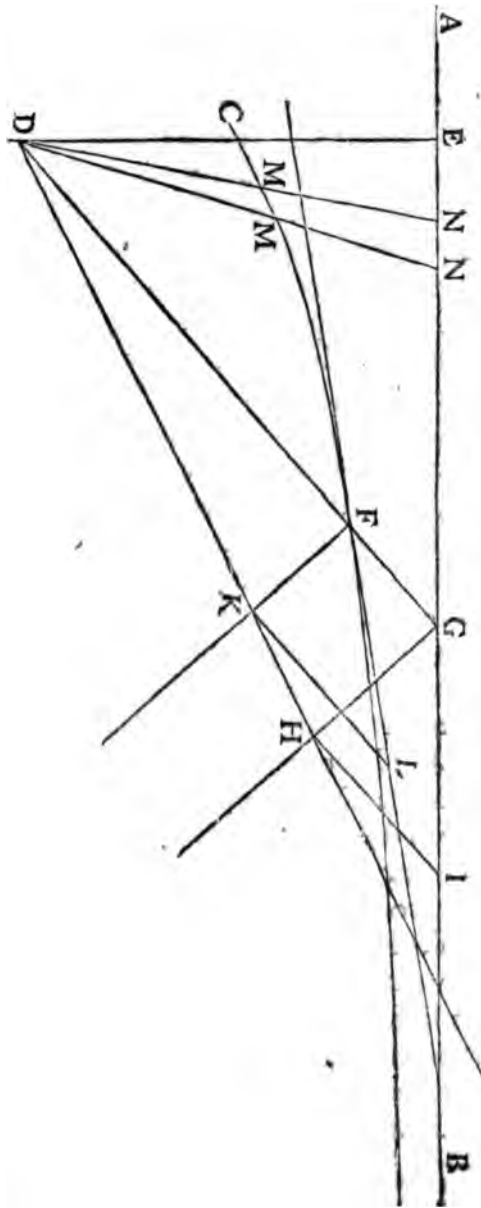
Remarquez que d'autant que la Conchoïde change de courbure, le point L se peut rencontrer entre la Conchoïde & sa base ou règle AB, puis qu'en ce cas le convexe étant en dedans, la ligne FL la touche aussi en dedans entre la droite AB.

Remarquez encore qu'au lieu que les touchantes du Cercle, de la Parabole, de l'Hyperbole & de quantité d'autres lignes ne rencontrent ces mêmes lignes qu'au point de l'atouchement; en la Conchoïde tout au contraire la ligne FL étant prolongée vers L coupera la Conchoïde prolongée vers N, & la touchante d'un point du convexe en dedans, comme de P, étant prolongée du côté du sommet C de la Conchoïde, rencontra la conchoïde comme en Q, ce qui est évident, puisque ces touchantes (excepté celle du sommet C) n'étant point parallèles à la ligne AB, rencontrent nécessairement la même ligne; & partant, puis que l'inclinaison de la touchante FL est vers L, & que la Conchoïde passe entre L & AB, elle rencontrera nécessairement la Conchoïde, & la coupera vers L comme en N, ce que la touchante du point P ne pourra pas faire, quoi qu'elle ait son inclinaison sur AB, de même côté que L: d'autant que vers cet endroit elle est plus proche de AB que n'est pas la Conchoïde, mais elle rencontrera la Conchoïde vers le sommet C, ou au-delà, comme en Q, d'autant qu'elle s'éloigne de AB vers ce côté-là, où au contraire la Conchoïde commence en C de s'en approcher.

*Cinquième exemple des touchantes de la Conchoïde de dessous.*

**N**OUS nous servirons mot à mot de la règle de l'exemple précédent; & pour en faire l'application, il ne faut que sçavoir d'écrire cette ligne.

Soit en cette la figure la ligne droite & infinie *AB*, que nous prenons pour la règle ou base de notre Conchoïde de dessous, & d'un point de la même ligne comme *E*, soit la perpendiculaire *ED* à la même ligne, dans laquelle perpendiculaire prenons deux points *C* & *D*, le plus proche *C* pour le sommet de notre Conchoïde, & le plus éloigné *D* pour son Pole: alors aiant tiré au point *D* quantité de lignes occultes *DMN*, qui coupent *AB* en *N*, si en chacune de ces li-



### 38 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

gnes DMN de son point N, nous prenons NM égale à CE, nous aurons dans chacune de ces lignes un point M, par lequel notre Conchoïde est décrite.

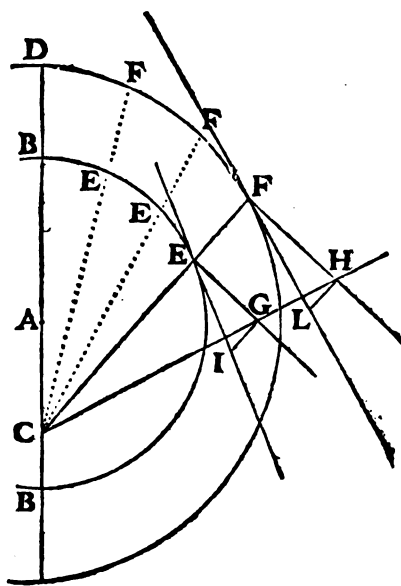
Cela posé, puis que la seule différence, que nous remarquons entre les deux mouvemens du point qui décrit cette ligne, & les deux qui décrivent sa base, d'une part; & les mouvemens semblables qui décrivent la première Conchoïde, & sa base n'est autre, sinon qu'en celle-ci le mouvement circulaire de la ligne est moindre que le mouvement circulaire de sa base, au lieu qu'en l'autre le mouvement circulaire qui décrivait la ligne étoit le plus grand, & qu'en l'une & l'autre le mouvement droit de la ligne est égal au mouvement droit qui en décrit la base, & qu'encore en l'une & l'autre l'on peut comparer le mouvement circulaire de F au circulaire G par le moïen d'une ligne DKH, qui fait un angle aigu GDH arbitraire avec la ligne GD, & laquelle ligne DKH coupe les lignes GH, FK perpendiculaires à la ligne DG aux points H & K: voulant tirer la touchante de cette ligne en un point, comme en F, je tire la ligne DF, que je prolonge jusques à ce qu'elle rencontre la règle AB en G, & sur icelle des points F & G je tire deux perpendiculaires FK, GH, qu'une ligne arbitraire DH coupe en K & en H; du point H je tire HI parallèle à DG coupant AB en I. J'ai donc, comme nous avons déjà dit au précédent exemple, la raison du mouvement circulaire du point G de la ligne DG (posé que ce point doit décrire la règle AB) au mouvement droit du même point, comme GH à HI; mais ce mouvement étant GH, le mouvement circulaire du point F de la ligne DFG décrivant la Conchoïde sera FK, & le mouvement droit du point F est égal au mouvement droit du point G: je tire donc KL égale & parallèle à HI; & puis que la Conchoïde, & par conséquent la

touchante est décrite par un mouvement mêlé des deux  $FK$ ,  $KL$ , la ligne  $LF$  sera sa touchante au point  $F$ ; ce qu'il falloit faire.

*Sixième exemple de quelques autres Conchoïdes.*

**L'**ON peut décrire des Conchoïdes aux lignes courbes aussi-bien qu'à la ligne droite; & pour en trouver les touchantes, il faut premièrement connoître la touchante de la ligne courbe, qui est comme la règle ou base de la Conchoïde: or nous n'avons pas eû besoin d'une touchante de la règle ou base aux deux exemples précédens, parce qu'à proprement parler il n'y a que les lignes courbes qui aient des touchantes; l'on peut néanmoins dire que la ligne droite n'ayant point d'autre touchante, elle peut être considérée comme se touchant soi-même, & que c'est en cette façon que nous l'avons considérée aux deux exemples précédents.

Pour donner une exemple de ces Conchoïdes, soit proposé un cercle duquel le rayon est  $AB$ , le centre  $A$ , & soit pris un point dans  $AB$ , prolongée, ou non, comme  $C$ , lequel nous prendrons pour le Pole de notre Conchoïde; puis aiant prolongé  $CAB$  hors le cercle, comme en  $D$ , soit pris  $BD$  arbitraire pour l'intervalle de notre Conchoïde; enfin du Pole  $C$  tirons quantité de lignes occultes  $CEF$  coupant



40 . DES MOUVEMENTS COMPOSÉS

le cercle en E , & prenons du point E dans lesdites lignes les intervalles EF égaux à BD , & d'une même part que BD , c'est-à-dire , en dehors du cercle si nous avons pris D en dehors dans le diamètre prolongé , ou en dedans si le point D a été pris en dedans cette Conchoïde passera par le point F F F &c.

Or il est fort facile de tirer la touchante de cette ligne si nous considérons qu'elle est décrite par un mouvement mêlé d'un droit & d'un circulaire, desquels la direction nous étant donnée, il est très-facile de trouver la raison de l'un à l'autre; car si nous voulons tirer une touchante de cette ligne en un point comme F , aiant tiré la ligne CF qui coupe la circonférence du cercle en E , & des points F E aiant tiré les perpendiculaires FH , EG sur la ligne CF ; il est aisé de remarquer que la ligne CBD aiant tourné sur le centre C , & aiant changé la position par laquelle elle n'étoit qu'une même ligne avec CEF , son point B est descendu en E , pour décrire le cercle , & son point D est descendu en F , pour décrire la Conchoïde du cercle , & qu'il s'ensuit que la ligne CEF est la direction du mouvement droit de chacun de ces points & de celui qui décrit le cercle , & de celui qui en décrit la Conchoïde , & les lignes EG , FH sont les directions des mouvemens circulaires. Or les mouvemens droits sont égaux , puis que la différence des lignes CD & CF est égale à celle des lignes CB & CE , de sorte qu'il ne reste qu'à connoître la quantité de l'un de ces mouvemens droits , & la raison des mouvemens circulaires entr'eux. Pour cet effet tirez EI touchante du cercle , & CH qui fasse un angle aigu avec CF ( comme nous avons fait en la Conchoïde ci-dessus ) & qui coupe EG , FH en GH , les directions des trois mouvemens EC , EG , EI étant données trouvez-en les proportions , ce que vous ferez tirant

rant  $GI$  parallèle à  $CF$ , le mouvement droit du point  $E$  sera  $GI$ , & son mouvement circulaire sera  $EG$ : mais le mouvement circulaire étant  $EG$ , le mouvement circulaire du point  $F$  est  $FH$  (à cause que ces deux mouvemens sont entr'eux, à sçavoir  $EG$  à  $FH$ , comme le demi-diamètre  $CE$  est à  $CF$ ) vous n'avez donc qu'à prendre  $HL$  égale & parallèle à  $GI$ , pour le mouvement droit du point  $F$ , & tirer la ligne de direction  $LF$  de celui que les deux  $FH$  &  $HL$  composent, & vous aurez la touchante de cette Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

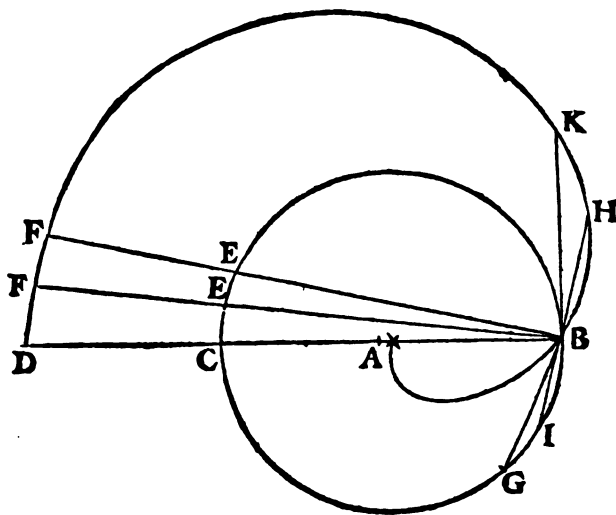
Dans la figure de cet exemple nous avons pris le point  $C$  au dedans du cercle, & le point  $D$  en dehors: nous eussions pû les prendre ou tous deux en dedans, ou tous deux en dehors, ou le Pole en dehors, & le point de l'intervale en dedans. De plus nous pouvions prendre l'intervale plus grand ou plus petit, de sorte que notre Conchoïde eût fort approché de la figure d'une Ellipse. Enfin de quel intervalle que nous eussions décrit notre Conchoïde, si nous eussions pris pour son Pole le point  $A$  centre du cercle, il est évident que notre ligne eût aussi été un cercle; mais ces choses étant très-faciles, la méthode d'en tirer les touchantes n'ayant en toutes ces lignes qu'une même application, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Mais nous remarquerons en passant, que l'on peut tirer des Conchoïdes par cette même méthode, & en tous ces divers cas à l'Ellipse & aux autres sections coniques, & généralement à toutes les lignes courbes, même aux Conchoïdes &c. & en tout ces cas l'application de notre méthode de tirer les touchantes sera toujours la même, si nous supposons qu'on nous ait donné la touchante de la ligne principale, dont nous examinons la conchoïde, ou des propriétés spécifiques pour la trouver,

*Septième exemple, du Limaçon de M. P.*

*C'est encore une espèce de Conchoïde de cercle, de laquelle  
voici la description.*

**S**OIT proposé le cercle  $CGBE$ , duquel le centre est  $A$ , le diamètre  $BC$  prolongé autant qu'il sera besoin, comme en  $D$  soit pris  $B$  pour le Pole de notre



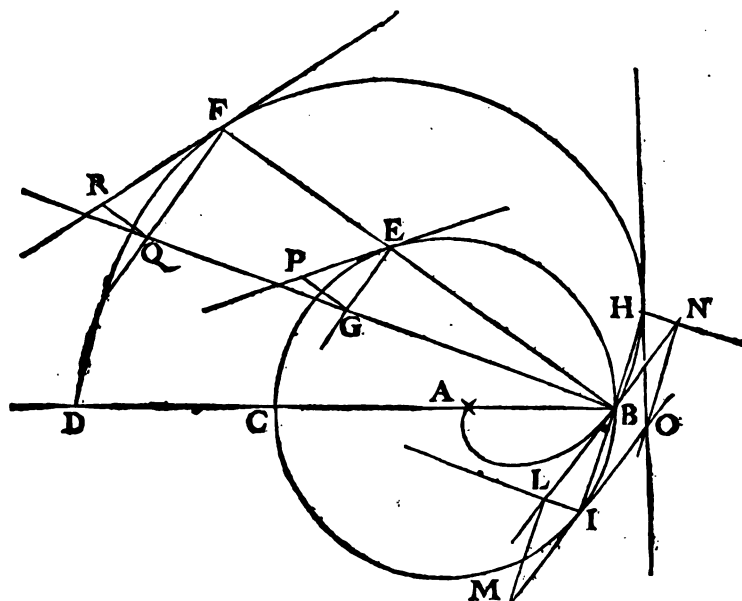
Limaçon, &  $CD$  pour l'intervale duquel on se doit servir pour le décrire, moindre que le diamètre. De  $B$  tirez quantité de lignes occultes  $B\dot{E}F$ , qui coupent la circonférence du cercle en  $E$ , & prenez  $EF$  en chacune de ces lignes égale à  $CD$ , & de même côté, le Limaçon passera par tous ces points  $FF$ . Or il faut remarquer que l'on prend autant d'intervalles que l'on peut à commencer de la partie convexe du cercle, qui est d'un même côté que le Limaçon au regard de la ligne  $DCB$ , & que voulant

continuer cette ligne il faut prendre les points E dans l'autre demi-circonférence, qui a sa concavité tournée vers le Limaçon, ainsi le point B du Limaçon est le réciproque du point G de la circonférence du cercle lors que B G est égale à C D; & le dernier point du Limaçon que nous avons marqué d'une petite \* est le réciproque du point C, & les points du Limaçon d'entre B & \* sont les réciproques des points de la circonférence G C, comme les points les plus proches de B au-dessus du diamètre C B dans le même Limaçon, sont les réciproques des points de la circonférence G B, ainsi H est le réciproque du point I jusqu'au point K qui est le réciproque du point B; & vous voyez par là la vérité de ce que nous avons remarqué que l'intervalle C D ne doit pas être plus grand que le diamètre C B, car autrement l'on ne pourroit pas décrire la portion \* B du Limaçon, même selon les divers intervalles que l'on auroit pris, on n'auroit pas pû décrire la portion du même Limaçon la plus proche de B au-dessus du diamètre C B. Il est vrai que pour ce qui est de cette méthode des touchantes, il ne nous importe point que cette ligne soit grande ou petite, entière & terminée en un point du demi-diamètre A B, ou tronquée &c. parce que les mouvemens de la description de l'une & de l'autre de ces lignes étant par tout les mêmes, l'on en donne les touchantes de la même façon. Mais voulant examiner un autre moyen de décrire cette ligne, & dire quelque chose de son usage, ce que nous ferons ci-après, il y a fallu ajouter cette restriction.

Il est aussi facile de tirer les touchantes de cette ligne que des Conchoïdes précédentes, la méthode en est la même, & les deux mouvemens, l'un droit, l'autre circulaire, qui décrivent cette ligne, se doivent examiner de la même façon: car il faut considérer que la

44 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

ligne BEF se mouvant circulairement autour du Pôle B jusqu'à ce qu'elle ait la position de BCD, les deux points E & F s'éloignant de B, montent dans la ligne



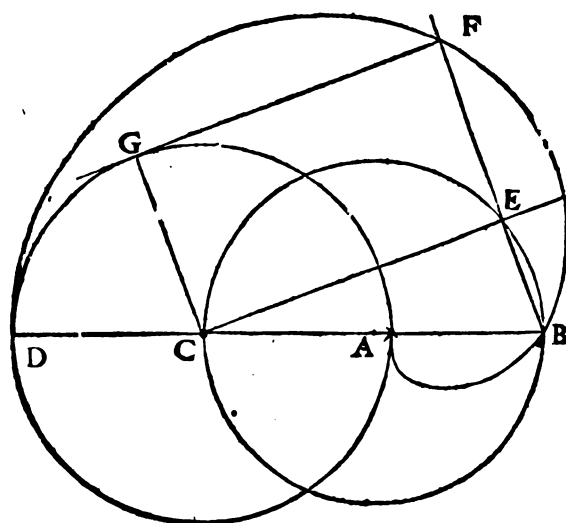
vers D : or puisque EF est égale à CD, la différence des lignes BE, BC est égale à la différence des lignes BF, BD; d'où il suit que le point E qui décrit le cercle a le même mouvement droit dans la ligne BEF, que le point F qui décrit le Limaçon, de sorte que connoissant le mouvement droit du point E nous connoîtrons aussi le mouvement droit du point F : il reste donc à examiner les mouvemens circulaires de ces deux points, desquels les directions sont perpendiculaires à la ligne BEF. Tirez donc les perpendiculaires EG & FQ, & prenez dans EG la partie EG *ad libitum*, pour la quantité du mouvement circulaire du point E, tirez encore la ligne BGQ, puis faites que comme le demi-diamètre BE est au demi-dia-

mètre  $BF$ , ainsi  $EG$  soit à  $QF$  ( ce qui se fera par le moïen de la ligne  $BGQ$ , faisant un angle aigu *ad libitum* avec  $BF$ ; & coupant  $EG$  en  $G$ , &  $FQ$  en  $Q$ ) suppose donc que le mouvement circulaire  $E$  soit  $EG$ , la quantité du mouvement circulaire  $F$  fera  $FQ$ ; mais suppose  $EG$  pour la quantité du mouvement  $E$ , l'on trouve que le mouvement droit  $E$  est égal à  $GP$  ( ce qui se fait, aïant tiré la touchante du cercle  $PE$ , par le moïen de la ligne  $GP$  parallele à  $BE$ , & coupant la touchante en  $P$  ) comme nous avons remarqué, & le mouvement droit de  $F$  est égal à celui de  $E$ , comme nous l'avons expliqué ci-devant. Suppose donc  $FQ$  pour la quantité du mouvement circulaire  $F$ , le mouvement droit sera  $GP$ , c'est-à-dire  $QR$  égale & parallele à  $GP$ ; le point  $R$  est donc donné, & par même moïen  $RF$  pour la direction & la quantité du mouvement mêlé des deux  $FQ$ ,  $QR$ , c'est-à-dire, notre touchante; ce qu'il falloit faire. (*Voïez la Fig. précéd.* )

Remarquez qu'on doit toujours examiner les deux mouvemens dans le cercle au point réciproque de celui de la Conchoïde, pour lequel nous cherchons la touchante; comme par exemple, si l'on vouloit tirer la touchante du Limaçon au point  $H$  assez proche de  $B$ , aïant tiré la ligne  $HB$ , & l'aïant prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en  $I$ , qui sera dans le cercle le point réciproque du point  $H$ , comme  $C$  est réciproque de  $D$ , car par la construction  $HI$  est égale à  $CD$ , il faudra examiner les deux mouvemens du point  $I$ , & en aïant trouvé la raison, chercher la raison de son mouvement circulaire au mouvement circulaire de  $H$  &c. En deux mots: imaginant que la ligne  $HI$  tourne sur le point  $B$ , & que la partie  $BI$  est portée en dedans du cercle vers  $C$ , aïant tiré la perpendiculaire  $IL$  vers le côté de  $C$ , & par conséquent la perpendiculaire  $HN$  vers l'autre côté, pour

46 DES MOUVEMENTS COMPOSE'S.

les deux directions circulaires ; puis aiant troué la raison des deux mouvemens I, comme de IL à LM (par le moïen de MI touchante du cercle BIC) &c. il faudra faire que comme BI est à BH, ainsi IL soit à HN, puis aiant pris NO égale & parallele à LM, la ligne OH menée par le points O & H, sera la touchante de notre Limaçon.



L'on peut dire que cetteli-gne est décrite par le moïen d'une double équerre CEFB, de laquelle les côtez CE, EB sont prolongez autant qu'il est besoin. Or il n'est

pas besoin que chacun d'eux soit plus grand que le diamètre CAB du cercle CEB, & l'autre côté EF est toujours égal à l'intervale que l'on prend de chaque point du cercle jusqu'à son réciproque dans le Limaçon ; de sorte que faisant tourner l'angle droit CEB, en sorte que son point E décrive le demi-cercle CEB, ce qui se fait lui donnant diverses positions, & toutes dans un même plan, & à condition que la ligne CAB doive être toujours l'hypotenuse des triangles rectangles qu'elle fera avec les parties de GE & EB, l'on n'a qu'à marquer dans le même plan tous les points que

le point F de la double équerre aura décrit.

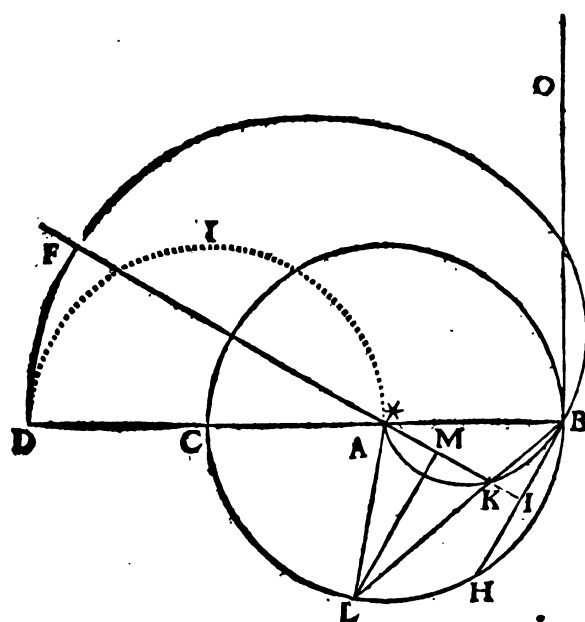
Or sur cette supposition l'on trouvera les touchantes de cette ligne de la même façon que nous avons déjà fait, parce qu'encore qu'on ne considère pas le point F, comme se promenant le long de la ligne BEF, & même que cette ligne tourne circulairement sur le Pole B, l'on ne laisse pas de connoître les deux mouvemens que lui donne la ligne BEF, qui en cette seconde supposition tournant sur le point B, s'élève en même temps peu à peu pour conduire l'angle droit BEC de B en C sur la circonférence du demi-cercle BEC.

Mais voici une des belles spéculations qui se puisse sur la description de cette ligne, & par le moïen de laquelle elle a été trouvée par le sieur de Roberval.

Soit proposé le cercle CEB, & l'intervalle CD comme aux figures précédente : du point C & de l'intervalle CD soit décrit le cercle DG\* ; je dis que si ce dernier cercle DG\* est la base d'un Cone scalene du sommet duquel, que nous appellerons S, la perpendiculaire SB tombe en B sur le plan du cercle DG\* ; aiant tiré des touchantes GF à ce cercle, & du point S tiré des lignes SF perpendiculaires à ces touchantes, que chacun des points F fera dans notre Limaçon, ou si vous aimez mieux que la ligne qui passe par tous ces points FF est la même que le Limaçon du cercle CEB, dont le Pole est B, & l'intervalle est CD. Car si du point B vous joinez la ligne BF, il est certain par un coroll. de la 6. du 11. qu'elle sera perpendiculaire à GF. Du centre C tirez CE parallele à GF, & qui coupe BF en E ; GE sera donc un parallelogramme rectangle, & la ligne EF sera égale à CG, c'est-à-dire à CD ; mais l'angle CEB étant aussi droit, il est dans un demi-cercle décrit sur le diamètre CB. Il s'ensuit donc que nous trouverons toujours un même point F, soit aiant décrit le cercle DG\*, &

48 DES MOUVÈMENS COMPOSÉS.

ayant tiré sa touchante GF & de S sommet du Cone aiant mené la ligne SF, soit aiant décrit un cercle CEB, & tiré la ligne BEF coupant le cercle en E, & pris EF égale à DC demi-diamètre du premier cercle : mais nous avons montré que trouvant des points F par cette seconde méthode, nous décrivons le Limaçon du cercle CEB, & partant trouvant les points F de la première façon, puisqueces points sont les mêmes, nous décrirons aussi notre Limaçon; ce qu'il falloit démontrer.



Je dirai en passant une propriété de la petite portion de cette ligne qui est telle que si l'on prend l'intervalle DC égale au demi-diamètre CA, ducercleauquel on décrit le Limaçon, & que de cet

intervalle l'on décrive le Limaçon, la petite portion \*B servira à couper un angle rectiligne proposé en trois parties égales. Cette propriété est du sieur Paschal.

Car soit proposé l'angle DBH, dans l'une des deux lignes, qui le contient, comme DB, je prends le point \*, duquel j'abaisse \*I perpendiculaire sur l'autre ligne BH,

BH, & qui coupe la partie \* KB du Limaçon ( décrit du Pole B au cercle dont le centre est \*, le rayon \* B & l'intervale du même Limaçon CD est égal à \* B ) en K , je tire la ligne BKL , je dis qu'elle fait avec la ligne BH l'angle KBH  $\frac{1}{3}$  de l'angle proposé CBH.

Pour le prouver soit décrit le cercle du Limaçon & la ligne BK prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence dudit cercle en L , tirez L \* , & ayant divisé \* K *bifariam* en M , joignez LM , laquelle fera perpendiculaire sur \* K ; car à cause du Limaçon , le triangle \*LK a les côtes L\* , & LK égaux , étant égaux à un même CD. Puis donc que les triangles LMK , BIK sont rectangles , & ont les angles oppoſez égaux , ils sont semblables , & l'angle MLK égal à IBK , mais MLK n'est que la moitié de l'angle \* LK ( parce que le triangle \*LK est isofcele , & sa base \* K divisée *bif.* &c. ) c'est-à-dire , de \* BL , ( car le triangle \* LB est encore isofcele ) & partant l'angle KBH n'est que  $\frac{1}{3}$  de l'angle \* BL , & partant  $\frac{1}{3}$  du tout \* BH ; ce qu'il falloit démontrer.

Nota si l'on eût proposé l'angle obtus HBO en ayant ôté l'angle droit DBO , & pris HBK  $\frac{1}{3}$  du restant , il ne faut que luy ajouter un angle de 30 degrez qui est  $\frac{1}{3}$  de l'angle droit , pour avoir le tiers du total proposé DBO.

Monsieur de Roberval démontre que l'espace contenu sous la ligne droite DC \* ( soit que DC soit égale ou non à C \* ) & sous la courbe \* KBFFD est égal à l'aggrégé du cercle BHC , duquel la ligne \* KBFD est le Limaçon , & du demi-cercle duquel l'intervale de cette même ligne CD est le demi-diamètre , de sorte que si du centre C & de l'intervale CD l'on décrit le demi-cercle DN \* l'espace curviligne contenu entre cette demi-circonférence , & le Limaçon est égal au cercle BHC , dont cette ligne est la Conchoïde.

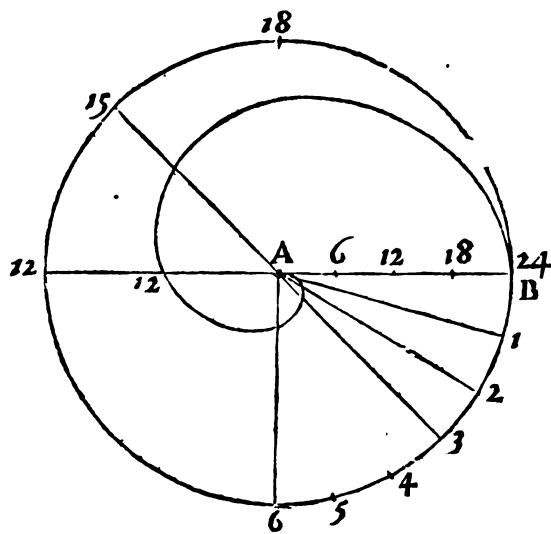
Si l'on continuoit cette ligne de l'autre côté du cercle ,

elle représenteroit une sorte de figure en cœur divisée en deux superficies curvilignes, desquelles l'on pourroit faire un semblable examen, les comparant à des portions de cercles, &c.

### De la Spirale ou Hélice.

**L**A première définition du Livre des Spirales d'Archimède nous apprend le moyen de décrire cette ligne; voicy les termes d'Archimède.

*Si recta linea in plano, manente altero termino, æquè velociter circumducta rursus restituatur in eum locum à quo primum cœpit moveri; & unà cum lineà circumducta, punctum feratur æquè velociter ipsum sibi ipsi, in eadem lineà, incipiens à termino manente; ejusmodi punctum spiralem lineam in plano describet.*



Soit proposé la ligne AB égale à l'intervalle duquel on veut décrire la Spirale du centre A & de l'intervalle AB décrivez le cercle B 3, 6, 12, 18, 24, divisez-en la circonférence en au-

tant de parties égales que vous pourrez commodément, à commencer en B, & divisez la ligne AB en tout autant

# DES MOUVEMENTS COMPOSÉS 51

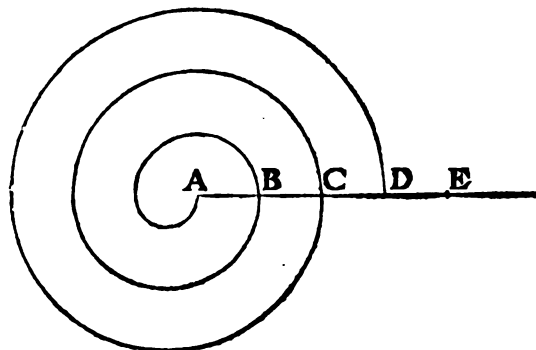
de parties égales; tirez les rayons  $A_1, A_2, A_3, \&c.$  du point A sur le rayon  $A_1$  prenez une des parties aliquotes du rayon AB; sur le rayon  $A_2$  prenez deux des mêmes parties; 3 sur  $A_3, 12$  sur  $A_{12}, 15$  sur  $A_{15}, \&c.$  ainsi des autres, les points que vous aurez marquez sur les demi-diamètres seront dans la Spirale que vous voulez décrire.

Que si dans la même ligne AB vous prenez BC, CD, DE &c. tant que vous voudrez, chacune égale à AB, & que cependant qu'AB fera une seconde révolution du mouvement uniforme, le point qui étoit venu en B s'avance du mouvement uniforme sur la ligne ABCD jusques en C, ce point décrira l'Hélice de la seconde révolution à commencer en B & finir en C, & ainsi de suite pour les autres révolutions.

D'où il s'ensuit que la méthode est la même pour les autres révolutions que pour la première; car voulant décrire la seconde révolution, il faudra

décrire du centre A de l'intervale AC une circonférence de cercle, & l'ayant divisée en autant de parties que la première circonférence du rayon AB, à quoi les mêmes rayons tirez du centre A aux points de la première circonférence serviront s'ils sont prolongez, & chacun pris égal à AC; sur le rayon  $A_1$  de cette seconde circonférence, vous prendrez depuis le centre A une ligne égale à  $AB + 1$  de ses parties aliquotes, sur  $A_2$  vous prendrez une ligne égale à  $AB + 2$  de ses parties aliquotes &c. &

G ij



## 52 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

ainsi les points que vous aurez marquez sur les demi-diamètres de ce second cercle seront ceux par lesquels il faudra décrire la seconde révolution de l'Hélice.

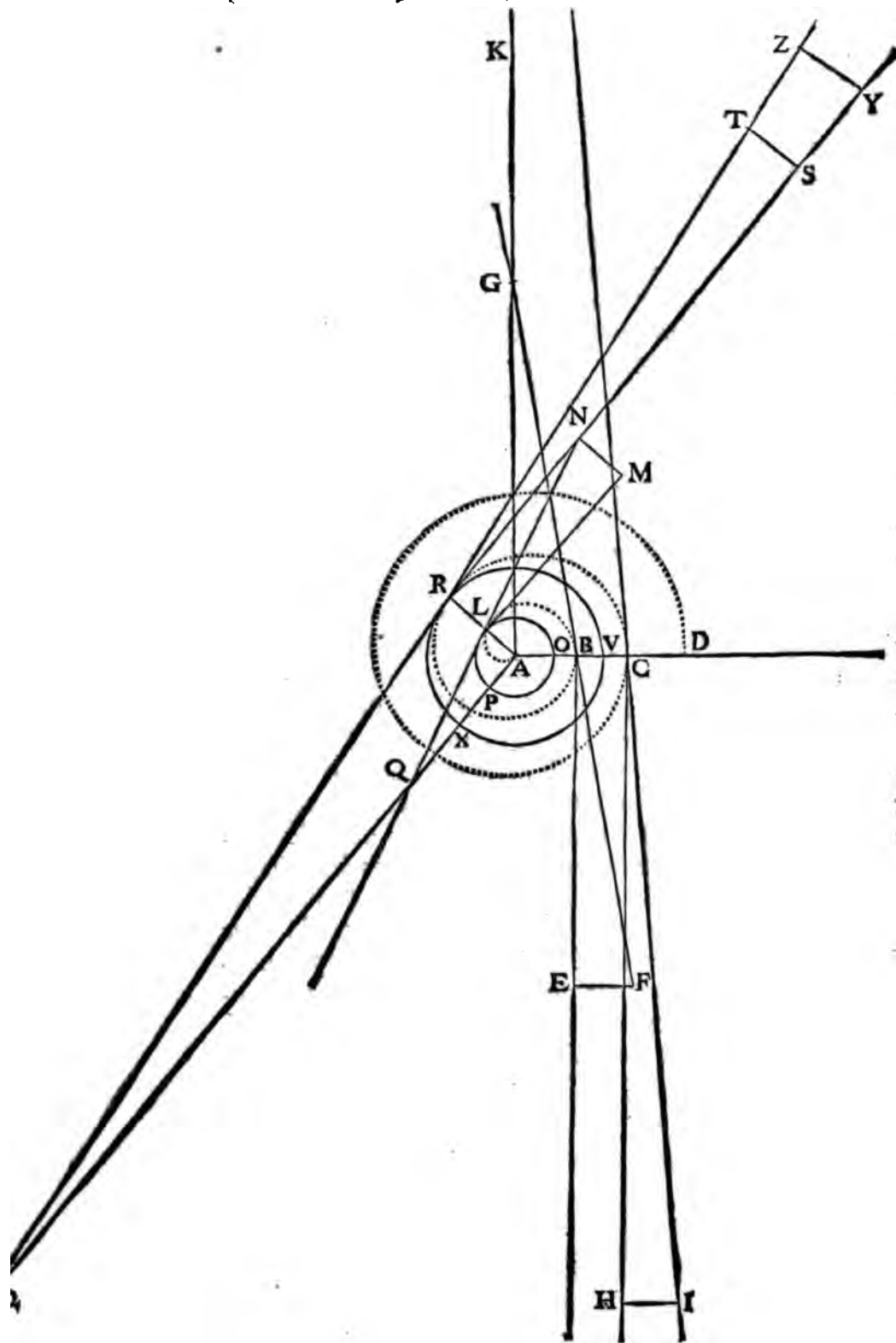
Ceci posé, il faut considérer que le point qui décrit la Spirale, en quelque part qu'il se trouve, a toujours le même mouvement droit sur la ligne ABCDE, & ce mouvement est tel par la nature de cette ligne, qu'en même temps que la ligne AB a fait une révolution, ce point doit en même temps avoir parcouru une ligne égale à AB, mais en chaque endroit il change de mouvement circulaire; de sorte que la vitesse de son mouvement circulaire s'augmente toujours à mesure qu'il s'éloigne du centre A; car son mouvement circulaire est tel que ce point décriroit la circonférence dont la portion de la ligne ABCDE, depuis A jusqu'où ce point se rencontre, est le demi-diamètre pendant le temps d'une révolution, c'est à sçavoir en autant de temps qu'il en employe à parcourir par son mouvement droit la ligne AB depuis A jusques en B, ou de B en C, de sorte que puisqu'en B son mouvement est tel que s'il en eût toujours eû un circulaire égal depuis A jusques en B, il auroit décrit une circonférence dont AB est le rayon pendant le temps d'une révolution, & que le mouvement circulaire qu'il a en C est tel que pendant le temps d'une révolution (ou s'il faut ainsi dire d'une circulation de la ligne droite, car le terme de révolution s'attribue plus ordinairement à la Spirale même) il auroit décrit une circonférence dont le rayon est AC double de AB, il s'ensuit que le mouvement circulaire qu'il a en C est double de celui qu'il a en B, & que celui qu'il a en D est triple de celui qu'il en B &c. & ainsi des autres.

Et parce que le mouvement circulaire de ce point est tel, comme nous avons dit, que pendant le temps d'une circulation de la ligne ABCD, il doit décrire une cir-

# DES MOUVEMENS COMPOSE'S. ¶

conférence de cercle dont la ligne depuis le commencement A de la Spirale jusqu'à l'endroit de la Spirale où ce point se trouve, est le demi-diamètre : & de plus le même point doit décrire par son mouvement droit pendant le même temps d'une circulation, une ligne égale au rayon AB du cercle de la première circulation ; il s'ensuit que, quelque point de la Spirale que nous prenions, nous aurons la raison du mouvement circulaire du point qui la décrit au mouvement droit du même point, comme de ladite circonférence à la ligne AB, mais aussi les deux directions de ces mouvemens sont données ( le commencement de la Spirale & le point où l'on veut la touchante étant donnez ) car la direction du mouvement droit est la ligne droite tirée de A jusqu'audit point, & la direction du mouvement circulaire est la perpendiculaire à cette ligne ; ces deux mouvemens sont donc tout-à-fait connus, & par conséquent le mouvement mêlé de ces deux & sa direction, c'est-à-dire, la touchante de l'Hélice en ce point est aussi donnée ; ce qu'il falloit faire.

Ainsi pour tirer la touchante en B, je joins AB, & je tire BE perpendiculaire à AB, laquelle BE je suppose être égale à la circonférence, dont AB est le rayon ; puis ayant mené EF parallèle & égale à AB, la ligne FB touchera l'Hélice au point B. Et quand bien l'on auroit quelque difficulté à concevoir cette méthode, il nous sera toujours facile de montrer qu'elle s'accorde avec les démonstrations des Anciens. Nous avons ainsi démontré que cette façon de trouver les touchantes des sections coniques s'accorde avec celle d'Apollonius, & nous démontrerons ici que notre construction s'accorde avec les propositions d'Archimède : car soit AG perpendiculaire à AB, il est évident que FB prolongée la rencontrera en un point comme G, puisqu'elle rencontre BE sa parallèle par la construction, & partant l'angle AGB



fera égal à l'angle EBF, & ces triangles semblables; mais le côté AB est égal au côté EF, & partant AG sera égal à BE, c'est-à-dire, à la circonférence du premier cercle de la Spirale, ce qui est vrai par la 18 du livre des Spirales.

De même pour le point C, qui est la fin de la seconde révolution, tirant CH perpendiculaire à AC, & égale à la circonférence dont AC est le rayon, puis tirant HI égale & parallèle à AB, & joignant IC ce sera la touchante: nous démontrerons qu'étant prolongée, elle coupera AGK, prolongée comme en K, & que les triangles JHC, CAK seront semblables: donc comme AC est à HI, ainsi AK sera à CH, c'est-à-dire le double de CH à CH, & partant AK est le double de la circonférence dont AC est le rayon; ce qui est vrai par la 19 des Spirales.

Pareillement pour avoir la touchante en un autre point de la première révolution, comme en L, je tire AL & je décris la circonférence LOPL coupant AB en O, je prends LM perpendiculaire à AL, & égale à ladite circonférence; par M je tire MN parallèle à AL, & égale à AB rayon de la première révolution, NL est la touchante, car soit tirée APQ perpendiculaire à AL, par la même raison NL prolongée la rencontrera en un point, comme en Q, & comme AL ou AO est à MN ou AB, ainsi sera AQ à LM, c'est-à-dire à toute la circonférence OPL: mais par la nature & par la description de l'Hélice, comme AO est à AB, ainsi la portion OPL de ladite circonférence est à toute la circonférence, donc la ligne APQ est égale à la portion OPL de la circonférence OPL; ce qui est aussi démontré dans la 20 proposition des Spirales d'Archimède.

Semblablement pour avoir la touchante en un autre point de la seconde révolution, comme en R, je tire AR

36 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

& je décris la circonférence RVXR coupant ABC en V, je prends RS perpendiculaire à AR & égale à cette circonférence, & je tire ST parallèle à AR, & égale à AB; TR est la touchante: car par la même raison ayant tiré AQ perpendiculaire à RA, la ligne TR prolongée la rencontrera comme en Q, & comme AR ou AV sera à TS ou AB, ainsi AQ sera à SR, c'est-à-dire à la circonférence RVXR: mais par la nature de la Spirale, comme AV est à AB, ainsi la circonférence RVXR étant jointe à la circonférence VXR, est à la même circonférence RVXR; & partant AQ est à la circonférence RVXR, comme la même circonférence RVXR jointe à la circonférence VXR est à RVXR, donc la ligne AQ est égale à l'aggrégé des deux circonférences RVXR & VXR, ce qui est vrai par la 20 du livre des Spirales d'Archimède.

L'on pouvoit dire d'abord tirez AR, & AX qui lui soit perpendiculaire & égale à l'aggrégé de la circonférence RVXR & de VXR, on aura la touchante AR; ou bien ayant tiré AR & ayant décrit la circonférence du centre A & de l'intervale AR, & semblablement RY perpendiculaire à AR, faites que comme AB est à AR, ainsi cette circonférence du cercle soit à RY perpendiculaire, vous aurez le point Y; tirez YZ égale & parallèle à AR, vous aurez le point Z, & ZR sera la touchante.

Mais il a semblé plus claire & plus facile de réduire ces mouvemens à la droite AB & à la circonférence, dont AR est le demi-diametre, & ainsi des autres.

Nous avons supposé qu'on nous donne des lignes droites égales à des circonférences de cercle, ou pour le moins qu'on en entende d'égales, ce qui étant posé nous avons par cette méthode les touchantes de ces lignes, ou pour mieux dire nous démontrons, que concevant  
une

une ligne droite égale à une circonférence de cercle, l'on peut par la connoissance des mouvemens composés concevoir quelle sera la ligne droite qui touchera l'Hélice en un point proposé : nous ferons la même supposition pour la quadratrice.

*Exemple neuvième de la Quadratrice.*

SOIT proposé le quarré ABCD avec son quart de cercle ABD qui lui est inscrit, duquel le centre est A, & le rayon est AB, l'un & l'autre plus grand ou plus petit, suivant que l'on veut décrire la Quadratrice grande ou petite. Soit divisé l'un des côtez du quarré CB ou AD (perpendiculaire à AB rayon du quart) en autant de parties égales qu'on voudra 1 2 3 4 5, &c. & par ces points soit tiré des paralleles à AB jusques au côté opposé; divisez le quart de cercle en autant de parties égales 1 2 3 4 5, &c. à condition que si aux divisions de la ligne BC, vous avez commencé à compter 1, proche de B, vous commencerez aussi à compter au quart de cercle 1, proche de B; mais si vous aviez commencé en C, vous commencerez en D sur le quart de cercle; tirez du centre A des demi-diamètres jusqu'aux points de ces divisions du quart de cercle A 1, A 2, A 3, &c. là où A 1 coupera la première des paralleles, A 2 la seconde, A 3 la troisième, A 4 la quatrième &c. vous aurez les points par où doit passer la portion DH de la Quadratrice de laquelle le sommet H est dans la ligne AB. *Voy. la Fig. suiv.*

*Cette proposition est trop longue & embrouillée.*

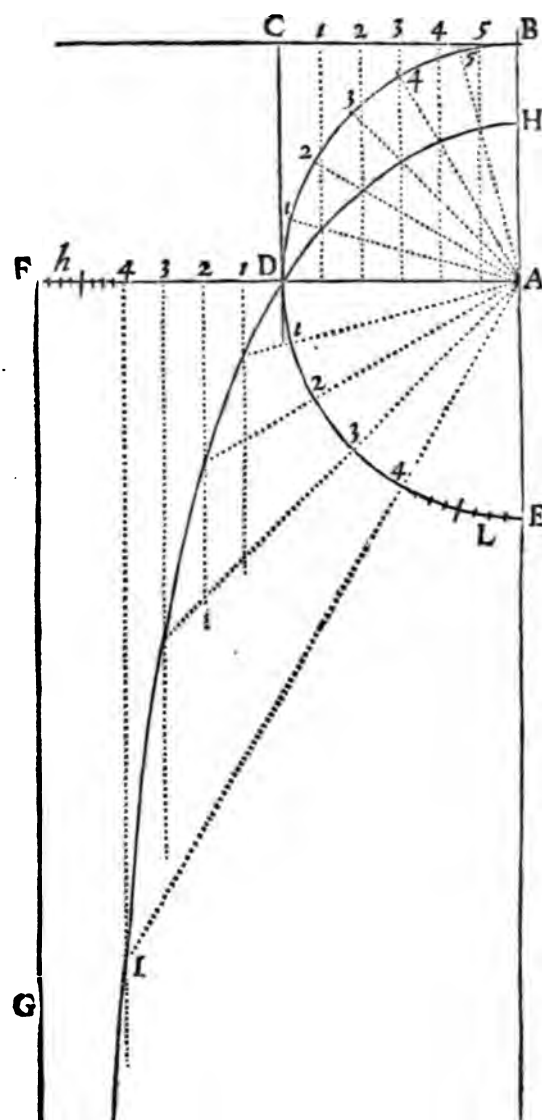
Nota que *Viète Respons. lib. 8. cap. 8.* appelle le point H *finis Quadratarie*; mais il n'en considère que la portion HD pour la quadrature du cercle.

Pour prolonger cette ligne au-dessous du diamètre AD, ayant achevé le demi-cercle BDE du centre A, dans la droite AD prolongée vers D, je prends DF égale.

*Rec. de l'Acad. Tome VI.*

H

à AD, laquelle je divise en autant de parties égales que



je juge à propos 1 2 3 4, &c. à commencer proche de D, & par ces points je tire des paralleles au diamètre du cercle BAE, lesquelles je prolonge au-dessous de DF, autant qu'il est nécessaire; puis je divise le quart de cercle DE, en autant de parties égales que j'ai divisé la ligne DF, à commencer aussi en D; par ces points & par le centre A je tire des lignes A 1, A 2, A 3, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent chacune sa parallele récipro-

que, c'est-à-dire A 1 la premiere, A 2, la seconde, &c.

& par ces divisions je décris la portion DI de la même Quadratrice prolongée.

Or il est manifeste que cette portion peut être prolongée à l'infini, car ayant pris une très-petite portion  $Fh$  de la ligne  $FD$ , & une partie proportionnelle  $EL$  du quart du cercle, l'une & l'autre étant divisées par la moitié, & ayant tiré les lignes, comme nous avons dit, nous trouverons un point de la quadratrice : mais derechef l'on pourra diviser la moitié, puis le  $\frac{1}{4}$ , puis le  $\frac{1}{8}$  &c. partie plus proche de  $F$  de la ligne  $Fh$ , & la moitié, puis le  $\frac{1}{4}$ , puis le  $\frac{1}{8}$  partie plus proche de  $E$  de la circonferance  $LE$ , & tirer de nouveau des lignes paralleles, & des demi-diamètres prolongez qui se coupent, pour avoir de nouveaux points de la quadratrice ; & puisque l'on peut continuer ces divisions sans fin, l'on trouvera aussi sans fin des points de la quadratrice au-dessous de  $D$  & de  $I$  ; car pour la finir, il faudroit que la dernière ligne tirée du point  $F$  de la ligne  $ADF$  parallele à  $AE$  rencontrât son demi-diamètre réciproque, c'est à sçavoir le dernier du quart de cercle  $DE$ , c'est-à-dire que  $FG$  perpendiculaire à  $DF$  en  $F$  rencontrât le diamètre  $BAE$  prolongé, auquel elle est parallele ; ce qui est impossible.

Et par là, vous voyez qu'aucun point de la quadratrice ne se rencontrera dans  $FG$ , puisque le demi-diamètre réciproque à  $FG$  ne la sçauroit jamais rencontrer : elle ne la coupera donc pas quoiqu'elle soit prolongée à l'infini, & néanmoins elle s'en approche toujours de plus en plus, car les points de la quadratrice sont trouvez dans les paralleles à  $FG$  que l'on tire par des points toujours plus proches de  $F$  que leurs précédentes, & partant la ligne  $FG$  est Asymptote de la quadratrice.

L'on peut achever le cercle entier, & continuer la quadratrice de l'autre côté du diamètre  $BE$ , avec son Asymptote &c.

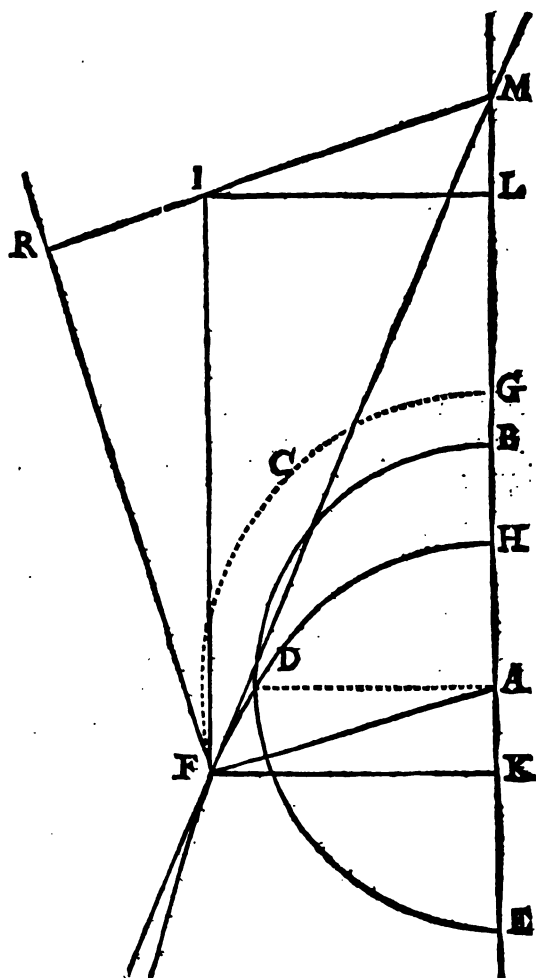
Je ne dis rien ni du nom de la Quadratrice, ni de son usage pour la quadrature du cercle au défaut de Dinostrate ou Nicomede, qui ne se trouvent point. Voyez Pappus lib. 4. Collect. M. ou Viète lib. 8. resp. cap. 8. & Clavius Geom. pract. lib. 7. in appendice.

Pour tirer par cette methode les touchantes à la Quadratrice, il faut examiner les mouvemens qui la décrivent. On voit d'abord que le demi-diamètre AD du cercle BDE étant prolongé & tournant circulairement sur le centre A, & la ligne CD se mouvant en même temps parallèlement à soi-même, soit qu'elle s'approche de BA, ou qu'elle s'en éloigne suivant que nous faisons tourner le demi-diamètre, ou de D vers B, ou du même D vers E, car tout revient au même, que le point, dis-je, qui décrit la Quadratrice a pour le moins deux mouvemens, l'un droit que la ligne CD lui communique, l'autre circulaire à cause du mouvement du demi-diamètre AD; mais outre ces mouvemens il a encore celui qui l'oblige à se rencontrer dans la commune section des deux lignes AD, CD, ce que nous avons expliqué à la fin de la quatrième proposition de ce Traité où vous trouverez une figure très-semblable à celle-ci. En voici pourtant l'application le plus intelligiblement qu'il m'est possible.

Soit proposé la quadratrice HDF, de laquelle le demi-cercle primitif, donnez-moi ce mot, soit BDE & le centre du demi-cercle soit A, & que l'on demande la touchante de la quadratrice en un point, comme en F. Je prolonge le diamètre BHAE de part & d'autre, puis je tire la ligne AF, qui est celle qui communique le mouvement circulaire au point F; je tire encore par F une parallèle au diamètre BE, c'est celle qui communique à nôtre point le mouvement droit duquel la direction est FK parallèle à DA & perpendiculaire à AE. Par

## 61

comprise entre les lignes AF & ABG. Ceci posé je suis obligé d'imaginer que la ligne tirée de F parallèle à ABG se meut de F vers ladite ABG, & par la nature de cette ligne, puisque cette parallèle doit s'ajuster & ne faire qu'une ligne avec AB, lors que la ligne AF ayant tourné de F vers LG aura la même position. Si je conçois deux points, l'un F à l'extrémité de ladite parallèle FI, l'autre



F au bout de la ligne AF, & que l'un & l'autre de ces points n'ait que le mouvement, le premier de la ligne

## 62 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

IF le long de FK, l'autre celui qui lui fait décrire la circonférence FCG; ou pour mieux dire, puisque la direction de ce mouvement circulaire est FR, je suis assuré que pendant que le premier point aura décrit FK, le second étant porté par la ligne AF que nous imaginons se mouvoir parallèlement à soi-même, & partir du point F (comme nous avons pu faire ci-devant comme en la Spirale &c.) puisque la direction du mouvement circulaire est FR, que ce point, dis-je, aura décrit dans FR prolongé une ligne FR égale à la circonférence FCG.

Mais d'autant que ces deux mouvemens ne sont pas les seuls qu'a le point qui décrit la quadratrice, je ne tire pas du point R une ligne parallèle & égale à FK, pour avoir à son autre bout un point de la touchante, mais j'examine plutôt tous les mouvemens du point F qui décrit la quadratrice en cette sorte.

Je remarque donc premièrement ce que je viens d'expliquer, que le point F doit décrire la ligne FR égale à la circonférence FCG en autant de temps que la ligne FI se mouvant parallèlement à soi-même & uniformément en emploiera jusqu'à ce qu'elle ait la position de la ligne ABG.

Secondement. Faisant donc mouvoir la ligne AF parallèlement & uniformément (puisque FR est la direction du mouvement circulaire du point F, comme nous avons dit) sans considérer le mouvement de la ligne IF, & partant considérant ladite ligne immobile, il est certain que, si nous gardons la condition des mouvemens qui décrivent la quadratrice, qui est que le point F doit toujours être en la commune section des lignes AF, FI, quand l'extrémité immobile de la ligne AF sera en R, le point mobile F se doit rencontrer là ou AF prolongée tant qu'il sera nécessaire, coupe la ligne FI; tirez donc par R la ligne RIM parallèle à AF & coupant FI en I

& le diamètre EBM prolongé en M, vous voyez que le point mobile F se doit rencontrer en I.

Troisièmement. Mais outre ces mouvemens il faut encore considerer que la ligne FI emporte ce point de I vers L où il se devra trouver (ayant tiré IL parallele à FK, & coupant ABG prolongée en L) lorsque la ligne IF sera une même avec la ligne ABG, c'est à sçavoir lorsque son extrémité immobile F aura décrit la ligne FK, & son point immobile I, la ligne IL. Il est donc certain que si aux mouvemens précédens l'on ajoute celui du point mobile F ou I le long de IL, sans considerer que ce point mobile doit toujours être dans la commune section des lignes AF, IF, le point mobile F se doit trouver en L.

Enfin il faut encore considerer que ce point F a toujours dû être la commune section des lignes AF, FI, & qu'ayant fait mouvoir AF jusqu'à ce que son extrémité immobile ait décrit FR, on lui a donné la position RI, à laquelle elle s'arrête, posé que IF ne doivent se mouvoir que sur FK, & que par cette condition le point étant porté de I vers L, doit décrire la ligne IM au lieu de IL & se rencontrer en M au lieu de L; & partant tous les mouvemens de ce point étant examinez, l'on trouve que pendant que AF s'est promenée le long de FR, & IF le long de FK, le point de leur commune section est arrivé en M; & partant si vous tirez la ligne MF, vous aurez la touchante de la quadratrice en F; ce qu'il falloit faire.

En deux mots, ayant tiré comme ci-dessus la ligne FR égale à la circonference FCG & les lignes FI, RIM, puisque nous considérons un seul mouvement circulaire du point qui décrit la quadratrice, sçavoir celui qu'il a en F, nous le considérons par notre principe, ce que nous avons pratiqué aux lignes précédentes, même en

la Spirale le long de la touchante FR, ce point doit donc monter de F vers R, mais il doit encore être porté vers la ligne AB, à cause du mouvement de la ligne FI, & outre ces deux mouvemens il doit toujours être la commune section des lignes AF, FI, en quelque lieu que nous tirions ces deux lignes, il sera donc dans leur commune section lorsque AF sera en RIM, & IF en ABM, & partant il sera en M. Voici en deux mots une règle générale quadrat.

Un point F de la quadratrice étant donné, & le demi-cercle BDE, par le moyen duquel elle est décrite. Si du centre A de ce demi-cercle & de l'intervale AF, vous décrivez une circonférence FCG depuis F jusques en un point G du diamètre AB, dans lequel se rencontre le sommet H de la quadratrice vers la partie de ce sommet; & si à cette portion de circonférence vous tirez une touchante en F, dans laquelle vous prenez une ligne FR égale à ladite portion de circonférence (d'où il suit que pour tirer la touchante en D, il ne faut que prendre dans AB prolongée depuis A une ligne égale au quart de cercle BD) la commune section du diamètre AB prolongée vers B, & d'une ligne RM tirée par R parallèle à AF, sera dans la touchante de la quadratrice.

Ou sa converse à la façon d'Archimède au livre des Hélices.

*Si quadratricem linea recta contigat producatunque donec occurrat semi-diametro circuli quadratricis, in qua reperitur quadratricis vertex, etiamsi fuerit opus ad partes verticis producta, & ab ejusmodi puncto sectionis recta linea ducatur parallela ei quæ à centro circuli quadratricis ad punctum contactus in quadratrice ducitur; à puncto vero contactus in quadratrice circumferentia circuli circuli quadratricis homocentri portio describatur ad partes verticis*

*eis quadratricis donec eidem semidiametro etiam productæ occurrat, eique circumferentiæ portioni tangens ducatur ad punctum quod est communis sectio ipsius & quadratricis, occurrat ejusmodi tangens circuli ei quæ à communi sectione tangenti quadratricis & diametri productæ ducta fuerat parallela, eritque lineæ circuli tangenti portio inter punctum (quod est communis sectio ipsius & productæ parallela) & quadratricem intercepta æqualis prædictæ portioni circumferentiæ circuli.*

Nota, l'on peut rendre la règle plus générale, faisant comme la circonférence FCG est à FK; ainsi une ligne prise dans FR, même prolongée, plus grande ou plus petite que FR, soit à une ligne plus grande ou plus petite que FK prise dans FK, même prolongée; mais ne la prenant pas égale, la construction en est plus difficile.

Remarquez deux ou trois choses avant de passer outre. La première, pour plus grande intelligence l'on peut déduire l'application de la seconde partie de la quatrième proposition de ce traité en cette façon.

La vitesse du mouvement de la ligne IF, & partant de son extrémité mobile F étant donnée dans FK, elle sera aussi donnée dans FA; & parce que le point mobile F doit être la commune section des deux IF, FA, la ligne IF ayant la position KAB coupera FA, c'est-à-dire en A; ce point a donc eû deux mouvemens, l'un de la gauche vers la droite égal à FK, l'autre en montant égal à KA; & ces deux se réduisent à un seul FA: pareillement la vitesse de la ligne AF étant donnée dans FR, son point mobile F devant être la commune section de AF & FI se trouvera en I, & partant il a eû les deux mouvemens FR, RI, qui se réduisent à un seul FI; qui est le troisième côté du triangle FRI.

Ces quatre mouvemens (car nous avons divisé en deux

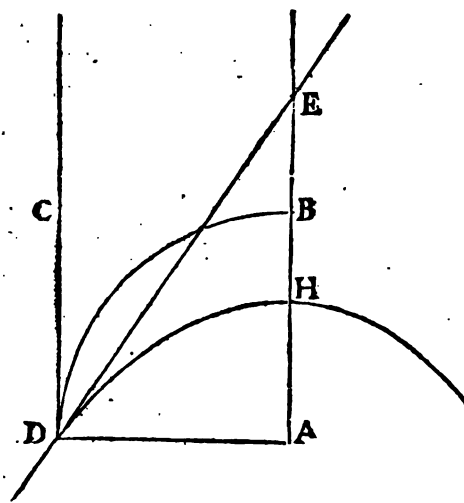
*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

66 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

parties celui qui fait que le point mobile F doit être la commune section des deux lignes AF, IF) étant réduits aux deux IF, FA achevez-en le parallélogramme IFAM, la diagonale FM sera la direction du mouvement mêlé de ces deux.

Ceci avoit déjà été expliqué plus brièvement, mais il y a plaisir de considérer une chose par divers biais & en différentes façons.

La seconde; si l'on demandoit la touchante de la qua-



dratrice au point D, où la ligne AD est d'abord perpendiculaire à DC, que puisque le mouvement de AD est donnée dans DC, ou bien AB, & celui de DC est donné aussi d'abord dans DA, & la raison de ces deux mouvements est comme de la ligne DA au quart de cercle

DB, il ne faut que prendre dans AB prolongée autant qu'il le faut une ligne AE, à commencer en A, égale au quart de cercle, & du point E l'on tirera la touchante ED.

L'on eût pû faire trois divers cas pour les touchantes de cette ligne, mais le discours est tout le même voulant tirer la touchante au-dessus de D entre D & H, que lorsqu'on la tire en un point plus éloigné de H & au-dessous de D, comme au premier exemple.

La troisième, que *Viete loc. cit.* appelle le point H *finis quadrataria*, & le point D *principium*; mais il ne considère que la portion DH, qui lui sert pour la quadrature du cercle, & puis il s'arrête à la façon de décrire la quadratrice, & il est manifeste que le point D se trouve d'abord, & que décrivant la quadratrice DH à l'ordinaire, le point H se trouve après les autres qui sont entre D & H : mais nous pouvons concevoir le point H tout le premier; & parce que considérant la Quadratrice prolongée des deux côtes, chacun des autres points en a un réciproque de l'autre côté également éloigné de H, & que le point H est le seul qui n'a point de réciproque, nous l'avons appelé le sommet de la Quadratrice.

*Dixième exemple de la Cissoïde.*

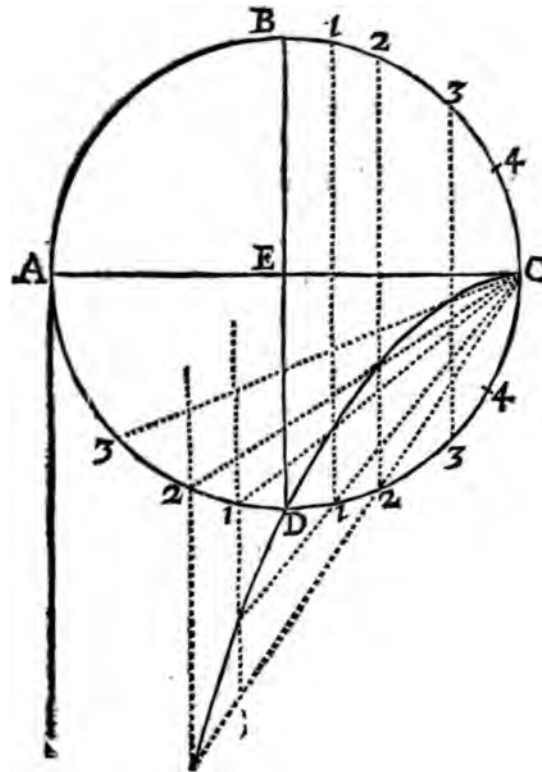
**S**OIT proposé le cercle ABCD, plus grand ou plus petit, suivant qu'on veut décrire la Cissoïde, avec ses deux diamètres à angles droits AC, BD: du point D prenez de part & d'autre des points également distans D<sub>1</sub> & D<sub>1</sub> sur les quarts de cercle DA, DC, puis D<sub>2</sub>, D<sub>2</sub>, puis D<sub>3</sub>, D<sub>3</sub> &c. tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DC des lignes parallèles au diamètre BD, puis du point C joignant les lignes C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> &c. aux points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DA, là où C<sub>1</sub> coupera la parallèle 11, & C<sub>2</sub> la parallèle 22, & C<sub>3</sub> la parallèle 33, & C<sub>4</sub> la parallèle 44, vous aurez des points par lesquels la Cissoïde est décrite.

Que si vous voulez prolonger la Cissoïde CD en dehors du cercle, tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart du cercle DA des lignes parallèles au diamètre BD, & prolongez-les tant qu'il faudra en dehors du cercle du côté de D, puis par les points réciproques 1, 2, 3, 4 du quart de cercle DC, tirez du point C d'autres lignes oc-

68 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

cultes  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , & prolonge-les autant qu'il le faudra hors le cercle, les points où chacune de ces lignes coupera sa réciproque, sçavoir  $C_1$ , la parallèle  $11$ ;  $C_2$  la parallèle  $22$  &c. ces points seront dans la Cissoïde prolongée.

Par un discours semblable à celui dont nous nous som-



mes servis pour la quadratrice, l'on montrera que cette ligne peut être prolongée infiniment, & qu'elle ne rencontrera jamais une ligne droite infinie tirée du point A parallèle au diamètre BD, ou si vous aimez

mieux la touchante du cercle de la Cissoïde au point A.

Et parce que la Cissoïde peut être continuée de l'autre côté par le moyen d'un autre cercle égal à ABCD, & décrit sur son diamètre AC prolongé vers C, en sorte que ces deux cercles se touchent en C, il nous sera permis d'appeller le point C, le sommet de la Cissoïde, puisque c'est l'unique dans la Cissoïde, qui n'en a point de réciproque, ou si vous voulez de semblable : car les points de la Cissoïde prolongée plus loin que D, à l'égard de C peuvent être appellez réciproques des points de la portion DC de la Cissoïde. Ce qui est assez clair par la méthode de trouver ces points.

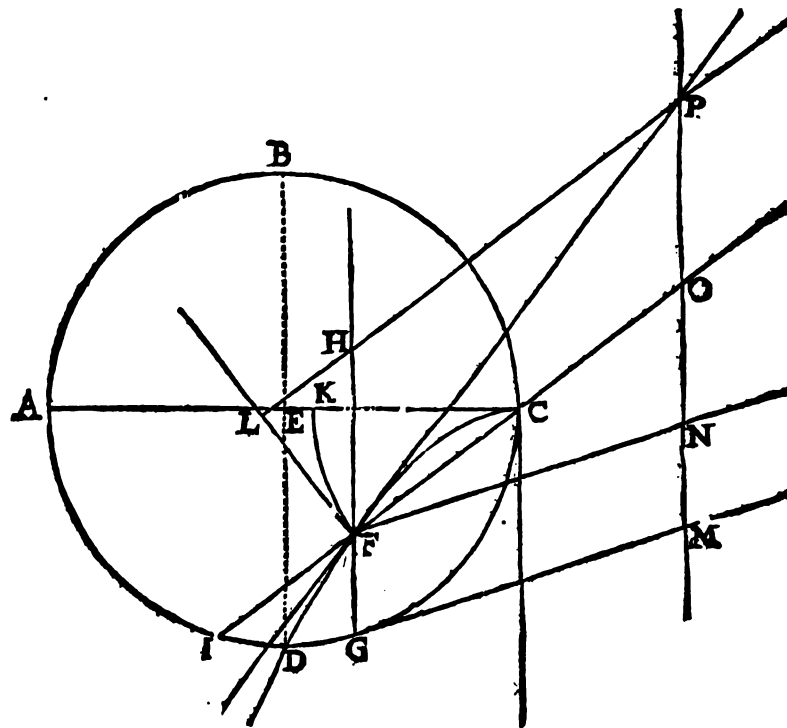
Ceci posé, il faut examiner les mouvemens particuliers du point qui décrit la Cissoïde, pour en donner les touchantes.

Il faut donc remarquer d'abord, que si vous faites tourner la ligne CD circulairement au tour du point C, en sorte qu'elle passe successivement par C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> &c. de D vers A, prenant les points 1 2 3 4 dans le quart de cercle DA, & qu'en même temps le diamètre BD soit porté parallèlement à soi-même vers C, mais en montant de telle façon que son extrémité D décrive le quart de cercle DC d'un mouvement égal & uniforme, & que lorsque la ligne CD aura la position CA, le diamètre BD ait la position de la touchante du cercle en C, c'est-à-dire de l'axe de la Cissoïde, le point qui aura toujours été dans la commune section de ces deux lignes aura décrit la portion DC de la Cissoïde. Ceci posé.

Soit proposé le point F de la Cissoïde lequel soit pris dans cette figure entre les points C & D; mais dans la suivante il fera plus éloigné du sommet, & au-dessous de D à l'égard de C, tirez la ligne FG parallèle au diamètre BD, coupant le cercle en G en sa partie inférieure dans le quart de cercle DC en cette première figure, & prolongez

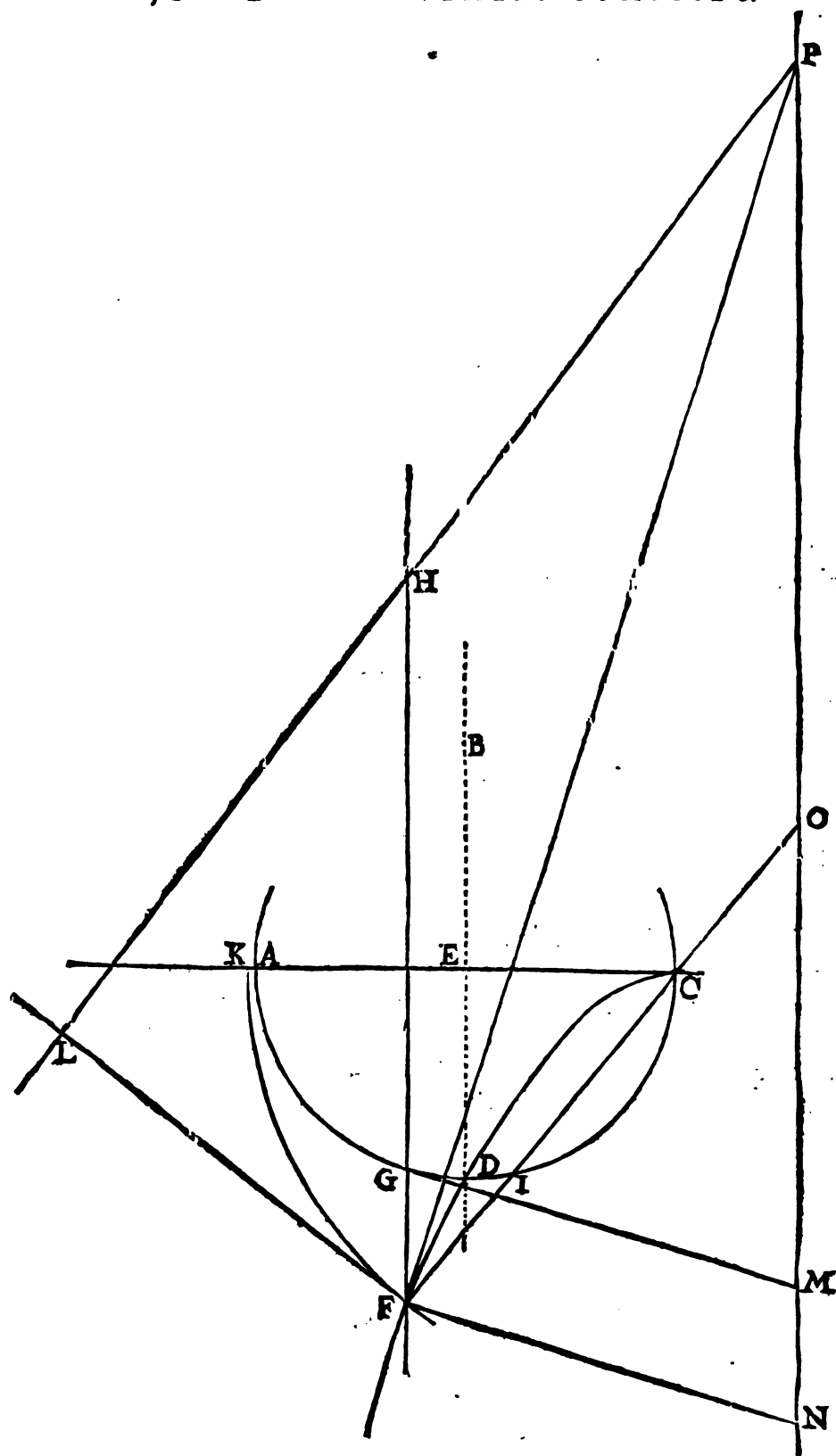
70 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

gez-la du côté de F vers H, puis tirez la ligne CF, & prolongez-la jusqu'à la circonférence du cercle en I, (dans la seconde figure elle coupe le cercle avant que d'arriver en F) vous voyez donc que la ligne CFI en tournant autour du centre C jusqu'à ce qu'elle ait passé par toutes les positions des lignes tirées du point C à tous les points de la circonférence IA jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position CA, dans ce même temps la ligne



FG s'étant mûe, comme nous avons expliqué, parallèlement à soi-même vers C, en sorte que son point G ait décrit la circonférence GC du cercle de la Cissoïde, fera arrivée en C, & aura la position de la touchante du cercle de la Cissoïde au point C.

Mais pendant le mouvement circulaire de la ligne CF vers A, si vous décrivez du centre C & de l'intervale CF un arc de cercle FK compris entre CF & CA & coupant CA en K, il se trouve que le point F de la ligne CF porté par le seul mouvement de la ligne CF, ce point, dis-je, a décrit l'arc FK, il a donc décrit l'arc FK en même temps que le point G porté par le mouvement que nous avons expliqué de la ligne FG, a décrit la circonférence GC, mais chaque point de la ligne FG décrit une ligne égale & semblable à celle que décrit le point G, & partant le point F de la ligne FG porté par cette ligne décrit une circonférence égale à GC : vous voyez donc que ne considérant que les deux mouvemens du point F, que les deux lignes CF, FG lui donnent sans considérer que ce point doit toujours être en leur commune section par le mouvement de la ligne CF, il aura décrit la circonférence FK en même temps que la ligne FG lui aura fait décrire une circonférence égale & parallèle à GC, & partant que ces deux mouvemens sont proportionnez, comme les circonférences FK & GC, mais les directions de ces deux mouvemens sont l'une FL touchante de l'arc FK, & perpendiculaire à CF; l'autre est FN parallèle à GM, qui touche le cercle de la Cissoïde en G (car puis que la circonférence que le point F décrit est parallèle à celle que décrit le point G, & puisque les points GF sont dans la même ligne droite, les touchantes sont parallèles) & partant si vous faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, ou comme le demi-diamètre CF de l'arc FK, au diamètre entier CA, de l'arc GC, ainsi FL soit à FN, vous aurez les raisons de ces mouvemens dans leurs lignes de direction : ceci posé vous ne composez pas un mouvement de deux seuls FL, FN, car vous vous souvenez qu'outre ces deux mouvemens le point mobile F doit encore être toujours la commune section des lignes



CF, FGH. Voici cette construction d'une autre façon.

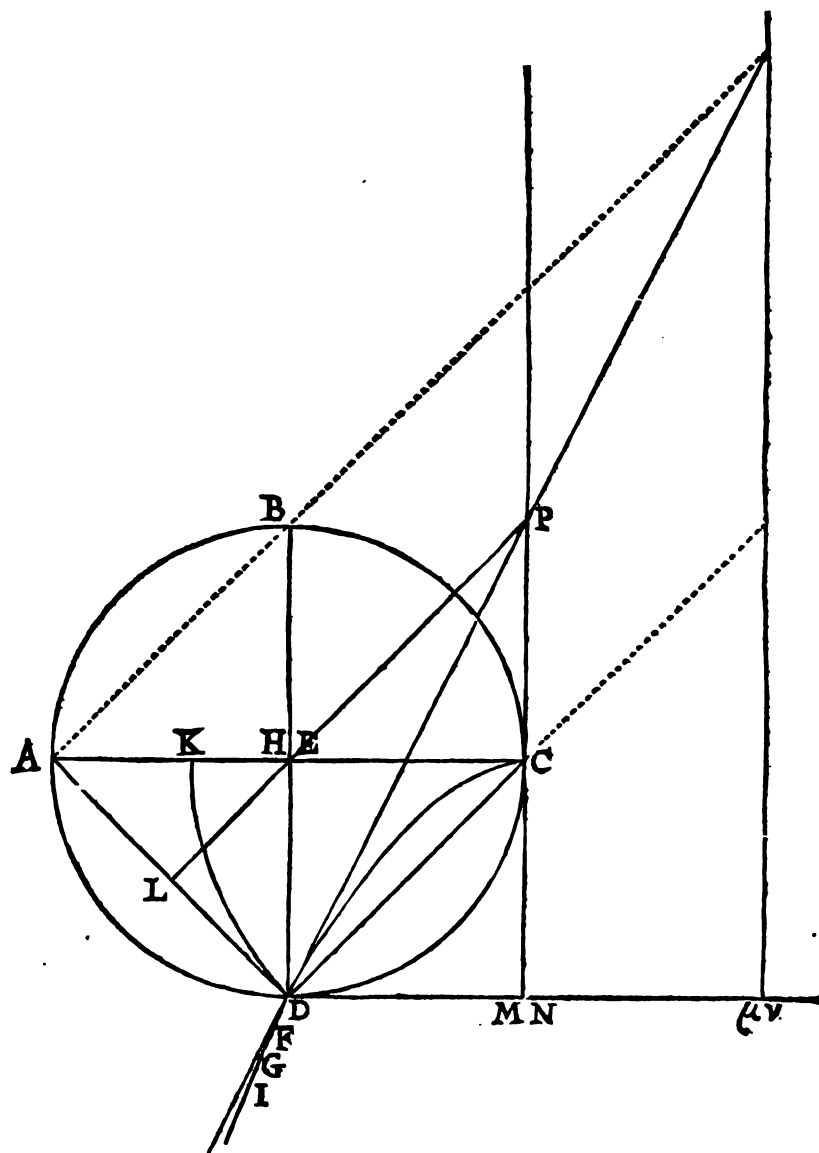
Etant donné le cercle de la Cissoïde ABCD, son centre E, la Cissoïde CDF &c. comme nous avons expliqué, & qu'il faille en trouver la touchante en un point comme F. Par le point F tirez FGH ou GFH parallèle au diamètre BD, coupant le demi-cercle ADC en G, & prolongez-la vers le côté du diamètre AC, comme en H; du sommet C de la Cissoïde tirez la ligne CFI en la première figure ou CIF en la seconde coupant le demi-cercle ADC en I; du centre C & de l'intervalle CF décrivez l'arc de cercle FK vers le diamètre CA coupant le diamètre même prolongé vers A s'il en est besoin en K, tirez FL touchante de cette circonférence vers le diamètre AC, du point G tirez aussi GM touchante du cercle de la Cissoïde, & par le point F menez FN parallèle à GM, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard du point A, faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, c'est-à-dire comme la ligne CF est à CA, ainsi FL dans la première touchante, & prise si vous voulez *ad libitum*, soit à FN; par L tirez LHP parallèle à FC, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard de F, puis par N tirez NOP parallèle au diamètre BD, & prolongez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre LHP, comme en P, de ce point tirez la ligne PF, ce sera la touchante de la Cissoïde.

Dans cette construction nous ne faisons point mention des points H & O, ni du parallélogramme HFOP, quoi-qu'il eût été besoin d'en parler auparavant pour examiner tous les mouvemens du point F de la Cissoïde: l'on eût pu faire le même dans la quadratrice, où la seule intersection des lignes RIM & ABM, nous eût donné le point M, sans considérer le parallélogramme IFAM &c.

L'on pourroit ajouter des démonstrations Géométriques à ces constructions, pour prouver tous ces points de rencontre mais cela seroit un peu long.

Voyez la  
figure de la  
Quadratrice.

74 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.  
 L'on peut encore considérer ces mouvemens de tous les



biais que nous les avons considérez dans la quadratrice.

& énoncer ce Théoreme, que si d'un point P de la touchante FP, l'on tire PL parallèle à CF coupant FL en L, & PN parallèle à BD coupant FN en N, & dire que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à FN, ce qui est facile.

Il suffira avant de passer outre, de dire quelque chose de la touchante de la Cissoïde au point D, dont voici la figure sur laquelle je remarque :

Premièrement, que faisant trois cas pour les touchantes des cette ligne, l'un pour le point D, le second pour les points d'entre C & D, & le troisième pour les points au-dessous de D (car la touchante au point C est le diamètre AC; & généralement en toutes les lignes courbes qui ont un axe, leurs touchantes au sommet sont perpendiculaires à cet axe; ) l'on auroit pû mettre celui-ci le premier, n'eût été qu'il falloit expliquer plus généralement & sans confusion les mouvemens du point F : or en cette figure les points DFGI ne sont qu'un même, le point H peut être le même que le point E ou que le point B, comme en la seconde construction de cette figure, que nous avons marquée par des lignes ponctuées & avec des lettres Greques, & les points MN, ou ~~pu~~ sont un même point.

Secondement, sans supposer dans FL ou GM des lignes égales aux arcs FK & GC, l'on fait par une construction Géométrique, que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à GM en cette façon.

Puisque l'angle ACD est à la circonférence de l'arc AD, & au centre de l'arc FK, il s'ensuit que l'arc AD ou DC est double en ressemblance à FK, & partant que comme le demi-diamètre EC est au demi-diamètre CD ou DA, ainsi l'arc DC est au double de l'arc DK, & par conséquent que comme EC est à la moitié de DC ou de DA, ainsi l'arc CD est à l'arc FK : prenant donc DM égale à EC, & FL égale à la moitié de FA ou de DA,

76 DES MOUVEMENS COMPOSE'S.

l'on aura fait cette construction Géométrique , & la parallèle à CF passera de L par le centre E ; ou encore prenez d'un côté la route DA , & de l'autre G  $\mu$  double de DM , la parallèle à CF fera AB &c.

*Onzième exemple , de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.*

**S**OIT proposé le cercle duquel le centre est  $a$  , le demi-diamètre  $aB$  , & sa touchante BC au point B prolongée en C , l'on imagine que le cercle  $aB$  faisant une révolution sur la ligne BC , soit que BC soit égale à la circonférence du cercle , soit qu'elle soit plus grande ou plus petite ( ce que je suppose indifférent , & facile à démontrer ) le point B de ce cercle étant porté par les deux mouvemens , l'un droit qui le porte de B vers C , l'autre circulaire à cause de la révolution du cercle ; que ce point , dis-je , décrit la Roulette ou Trochoïde ; ou si vous voulez , ayant tiré par le centre  $a$  la ligne  $ad$  égale & parallèle à BC vers le même côté , l'on imagine que le cercle glissant de B vers C sans tourner à l'entour de son axe , en sorte que le centre  $a$  décrive la ligne  $ad$  par un mouvement uniforme , en même temps le point B décrive la circonférence de son cercle passant de B par  $\pi$  QGB d'un mouvement uniforme , & que le centre  $a$  étant arrivé en  $d$  , ce point se retrouve en C , où la ligne BC touche le cercle , & qu'enfin ces deux mouvemens , l'un circulaire , par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de son cercle , l'autre droit , par lequel il est emporté vers C , mêlez comme nous avons dit , étant tous deux uniformes , font décrire la Roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvemens étant uniformes , le point B peut décrire trois diverses sortes de



72 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

& parallèle au rayon FG, par P tirez Py égale & parallèle à FH, puis qz égale & parallèle à FI, & ainsi des autres, vous aurez les points Bxyzθξ↓C, par lesquels la Roulette doit être décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne *ad* un des points de sa division comme par exemple le premier *o*, & tirez *oo* perpendiculaire sur BC, & par conséquent parallèle aux rayons *aB*, FE, mais par la description *ox* est parallèle à FG, & partant l'angle *xoo* est égale à l'angle GFE, & décrivant du centre *o* & de l'intervalle *ox*, l'arc *xo*, cet arc est égal à l'arc GE: mais posé que le centre *a* ait décrit la ligne *ao*, & soit en *o*, le point B doit avoir décrit un arc égal à EG; car par l'hypothèse EG est à sa circonférence totale, comme *ao* est à *ad*, & les mouvements sont uniformes; donc le point B'a décrit l'arc *ox*, il est donc en *x*, & par conséquent le point *x* est un point de la Roulette; ce qu'il falloit démontrer. L'on démontrera la même chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle GHIKLMN d'un autre centre pris dans la ligne *ad*, comme du centre *o*, P, R &c. & faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mêmes points de la Roulette.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvements composez; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

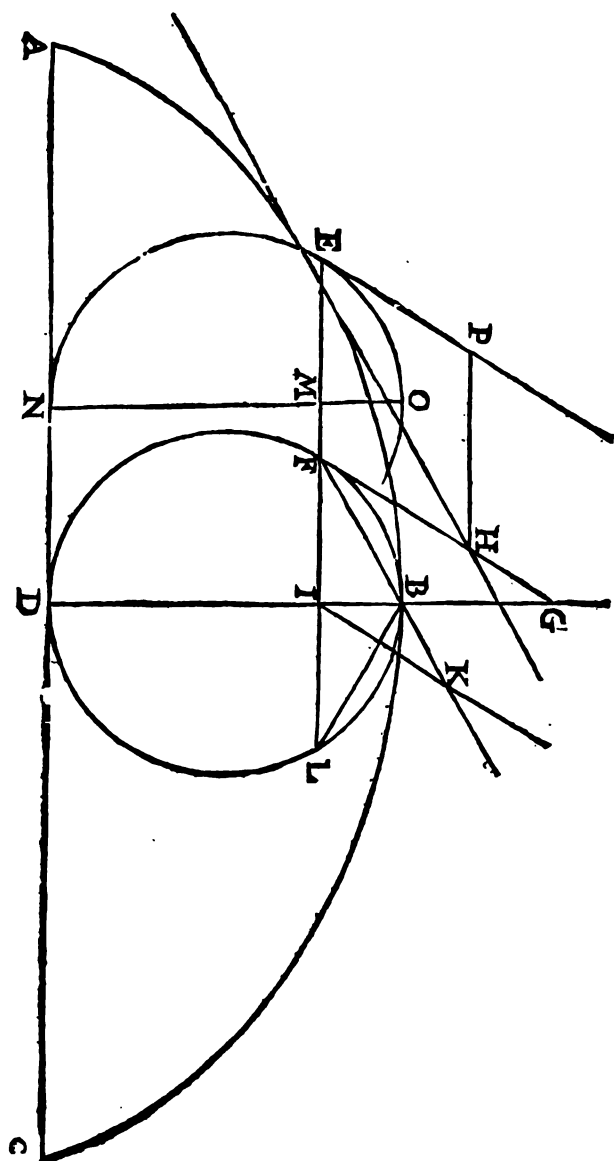
Car soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est ADC, le sommet B & l'axe BD, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, soit autour de l'axe BD, soit sur quelque diamètre perpendiculaire à la ligne ADC; du point E tirez la ligne EF parallèle à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E étant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette.

M. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme ci-dessus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallèle à FB, la ligne EH sera la touchante.

Or il est facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la première, mais elle n'est pas si générale n'étant proposée qu'au cas que la Roulette, soit du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonstration que nous chercherons analytiquement, comme il s'ensuit.

Il faut démontrer qu'ayant tiré comme ci-dessus la ligne EF & FG touchante du cercle au point F, & ayant pris FH dans FG égale à EF; si l'on tire deux lignes l'une HE, l'autre FB, elles seront parallèles.

Pour le prouver, tirez IK parallèle à FH jusqu'à ce qu'elle rencontre au point K la ligne FBK prolongée vers B; prolongez encore la ligne EFIL jusqu'à l'autre côté du cercle en L, & tirez la ligne BL, & supposons que les lignes FB, EH sont parallèles; donc l'angle



EH

EHF est égale à l'angle FKI : mais par la construction l'angle HEF est égal à l'angle EHF, parce que nous avons pris FH égale à EF ; il faut donc montrer que l'angle KFI est égal à l'angle FKI ; mais l'angle FKI est égal à GFK par la construction, ayant tiré IK parallèle à FG, il faut donc prouver que l'angle KFI est égal à l'angle GFK, mais GFK est égal à l'angle BLF, dans la section alterne ; il faut donc prouver que KFI est égal à BLF ; ce qui est certain.

En retournant, l'angle KFI est à BLF, mais BLF dans la section alterne est égal à l'angle GFK, donc KFI est égale à l'angle GFK : mais à cause des parallèles FG, IK, l'angle GFK est égal à FKI, donc KFI & FKI sont égaux, & le triangle FIK est isoscele ; mais le triangle EFH est aussi isoscele par la construction le triangle EFH est donc semblable à FIK, & l'angle HEF est égal à l'angle KFI, d'où il s'ensuit que la ligne EH est parallèle à FBK ; ce qu'il falloit démontrer.

Dans la figure précédente ayant fait décrire le cercle de la Roulette autour de son axe, & tiré la touchante FH, ç'a été toute la même chose, comme si ayant fait tirer le cercle de la Roulette en la position qu'il doit être lorsque le point A du cercle est arrivé en E, nous lui eussions tiré sa touchante par le point E, car ces positions de cercles étant parallèles, & le point E étant aussi élevé sur la base AC, que le point F, les touchantes des cercles sont parallèles, & partant l'une peut servir aussi-bien que l'autre, pour en mêler un mouvement droit, puisque l'une & l'autre rencontre la ligne EF, qui est la direction de ce mouvement droit. C'est pourquoi si l'on vouloit décrire le cercle de la Roulette en la position qu'il est lorsque le point qui la décrit est arrivé en E, ayant premièrement décrit le cercle BFD autour de l'axe BD, & tiré la ligne EFI parallèle à ADC, prenez EM

## §2 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

dans  $EFI$  égale à  $FI$ , qui est comprise entre la circonférence & le diamètre du cercle qui est perpendiculaire à la base  $AC$ , vous aurez le point  $M$  par où doit passer ce diamètre perpendiculaire. Et partant si vous tirez  $MN$  perpendiculaire à  $AC$ , & si vous la prolongez vers  $M$  en  $O$  en sorte que  $NMO$  soit égale au diamètre du cercle de la Roulette, vous aurez le diamètre dudit cercle en la position requise; ce qui est facile.

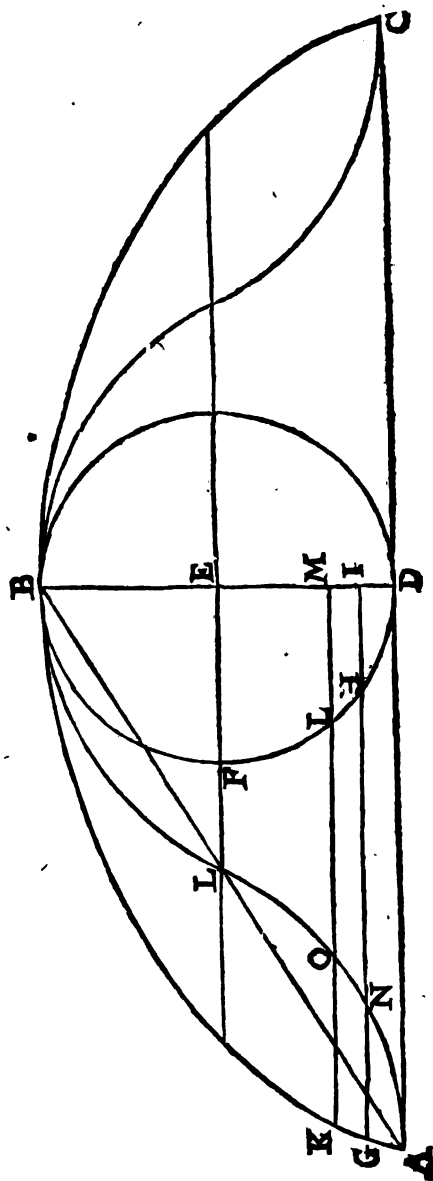
Je ne vous dirai rien des propriétés de la Roulette, comme que la ligne droite  $EF$  est à l'arc  $FB$ , en même raison que la base  $AC$  à toute la circonférence du cercle &c. M. de Roberval ne m'a pas encore fait voir le Traité qu'il en a fait, où après en avoir démontré cette propriété & un grand nombre d'autres, il compare ces lignes les unes aux autres, les semblables, celles de divers genres, les égales, les inégales, leurs ordonnées, leurs espaces &c. ce qu'il a expliqué dans un si bel ordre, qu'il m'a dit que son Traité étoit aussi limé comme s'il eût été sur le point de le faire imprimer.

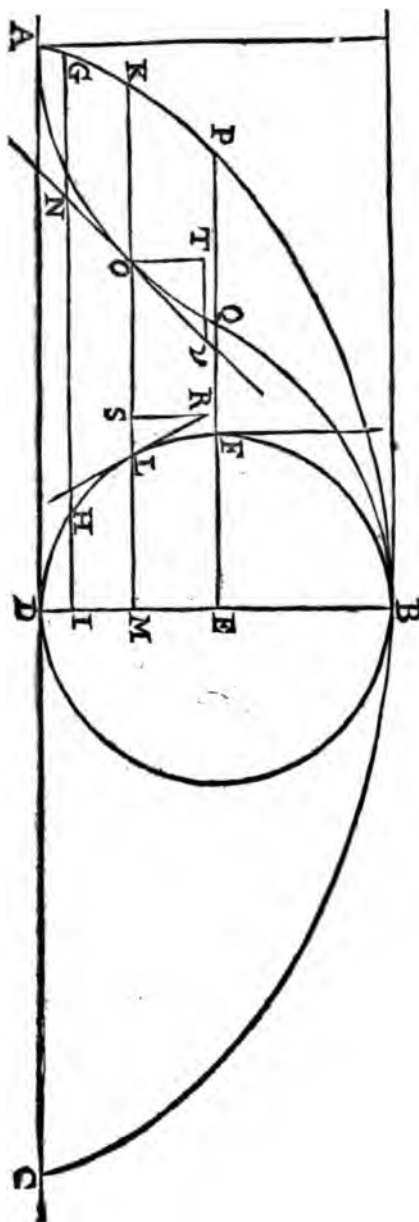
### *Deuxième exemple, de la compagne de la Roulette.*

C'EST ainsi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, & qui en a imaginé l'hypothèse & la description en cette sorte.

Soit proposé la Roulette  $ABC$  de laquelle la base est  $AC$  l'axe  $BD$ , le centre du cercle dans l'axe est  $E$ , & le cercle de la Roulette  $BFD$  à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette est décrite par la seconde façon qui en a été donnée dans l'exemple précédent; c'est à sçavoir que pendant que le cercle de la Roulette glisse depuis  $A$  jusques en  $C$ , en sorte que son centre  $E$  décrit d'un mouvement uniforme une ligne parallèle & égale à  $AC$ , en même temps le point mobile  $A$  parcourt par un mouve-

ment uniforme la circonférence de ce cercle, & décrit la Roulette par le mouvement composé de ces deux ; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainsi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamètre du cercle, qui est toujours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamètre de D vers B d'un mouvement inégal, en sorte qu'il soit toujours également élevé sur la base AC, comme est le point qui décrit la Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H & l'axe en I, lorsque le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, c'est-à-dire en H, dans le cercle, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.





De même tirant par un autre point K la parallèle à la base KLM, qui coupe la circonférence BLHD en L & le diamètre BD en M, lorsque le point de la Roulette est en K, c'est-à-dire dans le cercle en tel endroit qu'en L, le point de la compagne de la Roulette est dans BD en tel endroit que M, & ainsi des autres.

D'où il s'ensuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes parallèles à AC, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la même ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle & son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, si dans la même

ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde; de même prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la même ligne. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, & si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF dans la même ligne PF, vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-ci, & auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux ci-après. Or ç'a été la même chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de lui donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déjà été remarqué dans la Roulette.

Ceci posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-ci est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégale, & desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs parallèles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, & composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvemens droits, l'un parallèle à AD & l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallèle à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point; & sçachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme & égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme, & égal à ladite circonférence, si l'on fait que comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallèle à AC du point de cette ligne-ci qui.

### §6 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

est réciproque à celui du cercle auquel l'on a tiré la touchante.

Par exemple, soit en la dernière figure ci-dessus la Roulette ABC du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle & le reste, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L réciproque du point O, la touchante du cercle LR, & je compose le mouvement LR de deux RS, SL, dont l'un RS est parallèle à BD; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallèle & égale à RS, ce fera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O; puis après parce que le point O a dans une ligne parallèle à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallèle à AC, & égale à LR, j'aurai les directions & la raison des deux mouvemens du point O, & partant la ligne OV sera la touchante de cette ligne au point O; ce qu'il falloit faire.

#### *Treizième exemple, de la Parabole de M. des Cartes.*

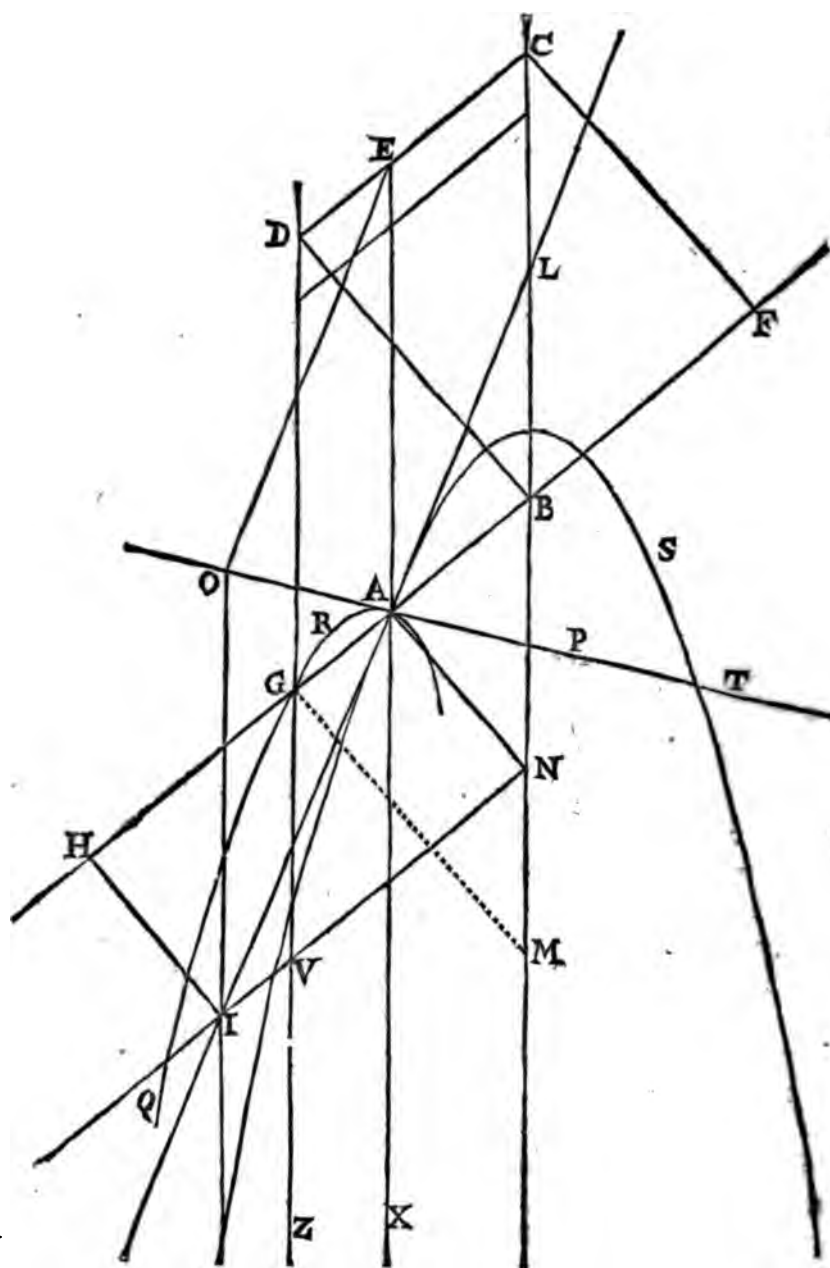
**M**ONSIEUR des Cartes nous apprend le moyen de décrire en deux façons cette ligne courbe, qui est une espèce de Parabole : la première par sa règle composée qui est la 318 page de sa Méthode, & la deuxième en la page 405 de la même Méthode, ou bien 337, qui est en faisant mouvoir une Parabole ordinaire avec son plan le long de son diamètre MC, & prenant un point fixe comme G hors le même diamètre, mais dans un autre plan fixe sur lequel le plan de la Parabole se

meuve en coulant , ces deux plans convenans toujours l'un à l'autre pendant le mouvement de celui de la Parabole : puis dans le diamètre BC soit marqué un point B , qui ne se puisse mouvoir qu'au mouvement de la Parabole , demeurant toujours à pareille distance du sommet ; & soit entendu une ligne droite GB indéfinie , qui tourne à l'entour du point fixe G comme centre , & qui passe toujours par B pendant que la Parabole se meut , cette ligne GB coupant la Parabole mobile continuellement en de nouveaux points , la ligne courbe qui passera par tous ces points sera la Parabole de M. des Cartes , laquelle à proprement parler est une Conchoïde de Parabole , & peut-être double , car la ligne GB peut couper la Parabole proposée en deux points.

Pour avoir la tangente de ladite ligne courbe , par exemple en A , tirons premièrement deux lignes parallèles au diamètre de la Parabole TSV , que nous faisons mouvoir sur la ligne droite MC , desquelles parallèles l'une DGZ passe au point G , qui est comme le Pole , & l'autre parallèle EAX passe au point A auquel nous voulons la touchante ; ensuite examinons premièrement le mouvement du mobile au point B , ledit mobile étant porté sur la ligne GBF , laquelle se meut circulairement sur le point fixe G en tirant vers les points DC , duquel mobile au point B nous avons la direction , à sçavoir BC , parce que par la description de la ligne courbe QRA , ledit mobile se maintient toujours dans la ligne MC : nous avons aussi les deux autres directions desquelles est composée BC , l'une la circulaire DB , la ligne DB étant perpendiculaire sur GB , & l'autre direction la ligne droite BF , nous aurons donc ces directions , & les raisons des vitesses dudit mobile au point B : or les points qui sont dans la Parabole mobile montant tous également , si nous

menons

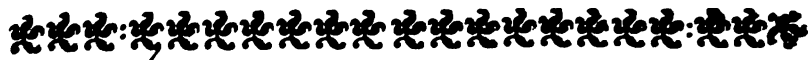
# 88 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.



DES MOUVEMENTS COMPOSÉS. 89

menons du point C une parallèle à BG, sçavoir CD, les lignes DG, EA & BC seront égales, & par conséquent EA & DG seront les mêmes directions que BC; ensuite examinons le mouvement du point A, auquel nous voulons avoir la touchante; & considérons le point B comme étant fixe & arrêté, autour duquel se meuve circulairement la même ligne BG vers VMT, car c'est le même mouvement circulaire que le précédent; donc l'une de ces directions, à sçavoir la circulaire, sera AN; & les angles DGB & GBM étant égaux, en même temps que le point B ira en D, aussi le point G ira en M; & A en N, les lignes GM & AN étant parallèles à BD; donc la direction circulaire du point A sera AN; mais le même point A se maintenant toujours dans la Parabole TSV, sa direction sera la touchante de la même Parabole TSV. Soit donc menée cette touchante, à sçavoir IL, & achevé le parallélogramme AHIN, nous avons donc AI pour direction de ce point A se mouvant circulairement, & se maintenant aussi dans la Parabole STV, nous avons aussi la direction du même point A se maintenant dans MG, à sçavoir AE égale à BC, & par conséquent le parallélogramme EOIA étant achevé, la ligne droite OA diagonale du parallélogramme sera la direction du point A, & par conséquent la touchante de la ligne courbe QGRA audit point A; ce qu'il falloit faire.





# P R O J E T

D'UN LIVRE DE ME'CANIQUE  
*traitant des Mouvements composez.*

**P**AR un mouvement composé j'entens celui qui se fait de deux ou plusieurs mouvemens differens entr'eux, soit par leurs directions ou leurs vitesses, ou par toutes les deux, lorsque tous ces mouvemens sont communiquez à un même mobile, ou en même temps, ou successivement, soit que la communication s'en fasse en un instant, ou avec du temps.

On peut considérer le mouvement composé en trois états différens, sçavoir, ou dans ses causes, ou en soi-même pendant sa durée, ou dans ses effets.

Les causes d'un mouvement en tant que composé sont les mouvemens particuliers qui le composent, qui sont ou simples, ou composez eux-mêmes.

Ici on discourra des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps différens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légèreté, & par de pareilles qui nous paroissent uniformes ou à peu près, soit que ces causes, quoiqu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c. Ce qu'on amplifiera par les exemples des feux artificiels, par la poudre à canon, ou autrement par les arcs, les arquebuses à vent, & les autres actions de l'air. On y ajoutera les mouvemens particuliers du soleil & des étoiles: on y fera entrer l'artifice des

hommes, qui par leurs propres forces, & par celles tant des animaux que des autres corps naturels, peuvent faire des mouvemens composez, d'autant plus diversifiez qu'ils ont de connoissance & d'industrie.

La nature en général possède les principes des mouvemens simples, dont il s'en compose une infinité d'autres dans les animaux, végétaux, minéraux &c.

Quoiqu'on connoisse les mouvemens simples qui en font un composé, il n'est pas toujours facile de connoître ce composé, ni les lignes qu'il décrit par sa composition, particulièrement quand elles sont courbes, comme il arrive d'ordinaire. De là vient cette science spéculative qui tient beaucoup de la Géométrie, & qui traite des lignes & des figures décrites par les mouvemens composez; de leurs tangentes & de leurs autres propriétés.

Le mouvement composé considéré en soi n'est point différent d'un mouvement simple; & on le peut considérer comme simple, quand il est connu, de même que s'il étoit produit dans la nature par sa simplicité; même on peut considérer non-seulement un mouvement composé; mais aussi un mouvement simple droit ou courbe, comme étant composé de plusieurs autres, tant simples que composez; ce qui sert souvent pour la découverte de plusieurs belles vérités touchant la nature & les propriétés des lignes & des figures, qu'on ne découvreroit pas si facilement sans cette considération, quoique souvent elle ne soit qu'une fiction, mais pourtant une fiction d'une chose possible.

Il est remarquable que quand un mouvement composé se présenteroit à nous, si nous ne sçavons point qui sont ceux qui l'ont composé, quand même nous sçaurions qu'il n'est pas simple, nous ne sçaurions pourtant découvrir avec certitude qui sont les composants. La principale raison de ce défaut vient de ce que

tout mouvement peut être composé de plusieurs fortes , & même d'une infinité de fortes , entre lesquelles il seroit difficile , pour ne pas dire impossible , de rencontrer la véritable.

Touchant les effets du mouvement composé , ils ne sont remarquables qu'au même temps qu'il se compose ; car après qu'il est composé , ses effets ne sont plus différens de ceux d'un mouvement simple.

En général ces effets sont de changer de vitesse , ou de direction , ou de toutes les deux , sans compter que de deux ou de plusieurs mouvemens actuels il se peut composer un repos.

Mais en particulier , ou ils font des lignes différentes , ou des figures différentes , ou ils changent des temps égaux en des inégaux , ou au contraire , & partant quelquefois ils régulent , quelquefois ils dérèglent ; ils établissent , ils détruisent , & ainsi d'une infinité d'actions causées dans toute la nature par une telle composition.

Mais il ne sera pas hors de propos d'apporter ici pour exemple quelques-uns de ces effets particuliers , pour porter les esprits à la considération d'une infinité d'autres.

Les carrosses courant vite , & voulant tourner trop court , versent. Il en est de même de ceux qui sautent hors d'un carrosse qui court.

De l'effet des lances , qui rompent , qui faussent , ou qui glissent sur les cuirasses.

Des balles de mousquet , de pistolet &c. sur des corps mobiles , tant sur ceux qui les repoussent que sur ceux qui les laissent entrer plus ou moins , ou qui écrasent la balle ; du coup oblique qui est une espèce de mouvement composé , même sur un corps immobile. On citera les sillons des balles & des boulets sur la terre & sur l'eau , & on examinera si la réfraction ne feroit pas un pareil effet.

Les montres & les horloges se dérèglent dans le transport, & les pendules y sont des plus sujettes.

Les pierres & quelques boulets de fer rougis au feu s'en vont en pièces au sortir des canons.

Le choc de l'air, de l'eau & des corps terrestres font des compositions de mouvemens suprenans & souvent dangereux, tant sur la terre que sur la mer.



## DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

**Æ**QUATIONEM recognoscere, est statum illius examinare, eo fine ut innotescat ejus constitutio hinc ab origine ejusdem, usque ad ultimam ordinationem: atque un nota fiat laterum datorum, ad ea quæ quæruntur habitudo; item ut dignosci possit, an de unico latere ignoto explicabilis sit ipsa æquatio, an vero de pluribus, & quot; atque utrum aliqua ex ipsis sint æqualia, an vero omnia inæqualia. Rursus sintne latera quæsitæ positiva, seu realia, seu etiam possibilia: an contra ficta, seu nulla, seu etiam impossibilia. Quæ omnia ut melius intelligi possint, præmittenda sunt quædam, tum circa vocabulorum ac notarum, seu signorum explicationem, tum etiam circa ordinem, quem in ordinando hoc opere sequi decrevimus;

Ac primum, quod ad vocabula, notas, seu signa spectat, sive de lateribus sit quæstio, sive de potentiis eorumdem laterum, quædam agnoscimus quæ suâ naturâ aliquid inducant supra nihilum; quædam verò quæ suâ naturâ aliquid indicant infra, dicantur omnia tum hæc, tum illa positiva; priora quidem positiva supra, posteriora autem positiva infra.

Rursus tam positiva, supra quam positiva infra, vel affirmativa sunt, vel negativa; sed affirmativa supra æquivalent negativis infra, & è contrario. Et quidem, signum affirmationis tam supra quàm infra, est hoc vulgò receptum  $+$ . Signum negationis tam supra quàm

infra, est hoc aliud vulgò quoque receptum —. Signum differentię inter duas magnitudines, est ejusmodi =. Quo ambiguum relinquitur quęnam ex duabus magnitudinibus propositis, inter quas tale signum intercedit, major est aut minor. Signum æqualitatis tale est  $\propto$ ; quo significatur magnitudines inter quas illud intercedit, esse æquales; sive una magnitudo uni magnitudini æquetur; sive una pluribus; sive plures uni; sive denique plures pluribus.

Operæpretium fuisset si quę suâ naturâ habentur infra magnitudines, certo aliquo signo ab aliis distincto notatę essent: verùm quia passim, immò ferè semper accidit ut in eadem quęstione, sub iisdem terminis, magnitudines quęsitę sint, supra vel infra, ex natura ipsius quęstionis; ac vi æquationis ad ipsam pertinentis; idè talis distinctio commodè fieri non potuit fiet tamen ut notā ejusmodi æquationis constitutione, innotescat etiam natura ipsorum laterum, & quicquid ad numerum eorundem determinandum requiritur, ut magis patebit in sequentibus.

Præterea omnis multiplicator nihilo æquivalens multiplicans quodvis multiplicatum (seu illud multiplicatum nihilo æquivalet, seu aliquid supra, aut infra indicet) producit nihilo æquivalens. Idem accidit, sive multiplicator nihilo æquivalet, sive aliquid indicet supra aut infra, dummodo multiplicatum æquivalet nihilo.

Idem prorsus intelligendum de divisione, quod de multiplicatione; divisor enim hic gerit vices multiplicatoris, quotiens multiplicati, & divisum producti; quandoquidem multiplicatio restituit divisionem, & divisio multiplicationem. Hęc de notis seu signis, nunc de ordine dicamus.

Multis quidem modis ordinari potest æquatio, præ-

96 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

cipue si multipliciter affecta sit; & revera à diversis authoribus diversimodè constitutus est ordo ipse, nobis accommodatissius ille videtur qui omniaquibus æquatio constat homogenea ex una parte constituit; sic ut omnia simul nihilo æquivalent, quod quidem nullo negotio semper efficitur; illud autem vel unico exemplo planum fiet. Proponatur methodo Vietæ hæc æquatio  $A^3 - BA^2 + C^2 A \propto Z^f$ . manifestum est per anthitesim oriri hanc æquationem  $Z^f - C^2 A + BA^2 - A^3 \propto O$ , vel hanc  $A^3 - BA^2 + C^2 A - Z^{sol.} \propto O$ . Et si vero utraque formula nostro instituto accommodari possit, priorem tamen eligimus, eam scilicet in qua magnitudo omninò data  $Z^{sol.}$  afficitur semper affirmatè, ac secundum eam intelligi debent quæcumque postea dicturi sumus.

*De constitutione æquationum quadraticarum.*

CAPUT UNICUM.

*Propositio prima.*

**S**I  $ZP - RA + A^2 \propto O$ .

Sunt duo latera, ambo supra, quorum summa est  $R$ ; rectangulum vero sub ipsis est  $ZP$  & fit  $A$  alterutrum ex istis.

Intelligatur enim  $A - B \propto O$  sic ut  $+A$  æquetur ipsi  $+B$  vel  $A - C \propto O$  sic ut  $+A$  æquetur isti  $+C$ : unde si ducatur  $A - B$  in  $A - C$  quod inde orietur æquabitur nihilo. Productum autem illud est  $BC - \frac{BA}{CA} + A^2$ , proinde hoc æquatur nihilo, quod semper accidet. Sive enim  $A$  æquetur ipsi  $B$  ita ut  $A - B \propto O$ , quicquid valeat  $A - C$ , si  $A - B$  ducatur in  $A - C$ , hoc

hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producit  
nihilum; si  $A$  æquetur ipsi  $C$ , ita ut  $A - C \propto 0$ ,  
quicquid valeat  $A - B$ , si  $A - C$  ducatur in  $A - B$ ,  
hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, produci-  
tur nihilum.

Jam  $BC$  vocetur ex hypothesi  $ZP$ ; &  $B + C$  vocetur  
 $R$ ; fietque id quod proponitur nempe  $ZP - RA + A^2$   
 $\propto 0$  qua in æquatione  $A$  potest explicari tam de ipso  $B$   
quam de ipso  $C$  à quibus producit  $BC$  sive  $ZP$ .

*Pro determinatione.*

**D**ETERMINATIO alicujus æquationis est con-  
stitutio illa in qua vel omnia, vel quadam ex la-  
teribus de quibus explicabilis est æquatio inter se æqualia  
sunt; unde cum de duobus tantum lateribus explicari potest  
æquatio, quales sunt quadraticæ unica tantum potest esse  
determinatio, cum scilicet duo latera sunt æqualia. Cum  
autem de tribus lateribus æquatio explicabilis est, quales  
sunt cubicæ; tunc duplex esse potest determinatio, al-  
tera quidem major, cum omnia tria latera æqualia sunt,  
altera vero minor, cum duo tantum æqualia sunt. At-  
que ita quo plura erunt latera in aliqua æquatione, id est  
quo potentia illius altior erit, eo plures erunt illius de-  
terminationes.

Jam in proposita æquatione unica esse potest deter-  
minatio in qua duo latera de quibus  $A$  est explicabile  
erunt æqualia; cum scilicet  $ZP$  æquatur  $\frac{1}{2}R$ : tunc enim  
unumquodque ex ipsis lateribus  $A$  æquale est  $\frac{1}{2}$  ipsius  $R$ .

Nam in prædicta formula  $BC - \frac{BA}{CA} + A^2 \propto 0$  in  
casu determinationis  $B$  intelligitur æquari ipsi  $C$ ; unde  
illa æquatio æquivaleret huic  $B^2 - 2BA + A^2 \propto 0$ , sive  
etiam huic per interpretationem  $ZP - RA + A^2 \propto 0$

ut proponitur, ubi quoniam  $R \propto 2B$ ...

$ZP$  esse quadratum ipsius  $B$ , five dimidii ipsius  $R$ , ...  
etiam  $ZP$  esse quartam partem quadrati ipsius  $R$ , &  
 $A$  quod æquatur ipsi  $B$  vel  $C$ , esse dimidium ipsius  $R$ .

*Propositio secunda.*

**S**I  $ZP + RA - A^2 \propto O$ .

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum, idemque majus est supra, alterum minus est infra, differentia amborum est  $R$ , & rectangulum sub ipsis  $ZP$  & fit  $A$ , alterutrum ex ipsis, (intelligatur enim  $B - A \propto O$  sic ut  $A$  dum erit supra, æquetur ipsi  $B$ ; vel  $C + A \propto O$  sic ut  $A$  dum erit infra, æquetur ipsi  $C$ . Atque ex hypothesi sit  $B$  majus quàm  $C$ .) Si igitur  $B - A$  ducatur in  $C + A$ , quod inde oriatur æquabitur nihilo.

Productum autem id est  $BC \frac{+BA}{-CA} - A^2$  æquatur nihilo. Quo pacto æquatio explicabilis est de  $A$  supra, æquali ipsi  $B$ . Ubi tamen æquatio hanc interpretationem accipere debet ut  $BC \propto ZP$  &  $B - C \propto R$ . Quod si quis singulas æquationis partes conferre velit, ut noscat qua ratione ipsæ se invicem tollant, is reperiet  $+BC$  &  $-CA$  sese tollere, item  $+BA$  &  $-A^2$  se tollere quoque. Unde fit ut omnia homogenea simul nihilo æquivalent.

Jam si  $C$  intelligatur æquari ipsi  $A$ , atque  $+C + A$  multiplicetur per  $+B - A$ , productum erit rursus  $BC \frac{+BA}{-CA} - A^2$ , quæ æquatio est eadem quæ supra, unde, illa explicabilis quoque est de  $A$  dum ipsum æquatur ipsi  $C$ , ita tamen ut ipsum sit infra ut indicat  $C + A \propto O$ , vide notas post æquationes cubicas. Hic autem  $+BC + BA$  se invicem tollunt sicuti  $-CA -$

$A^2$ ; ut rursus omnia nihilo æquantur; atque æquatio eandem quam supra accipere debet interpretationem.

*Propositio tertia.*

**S**I  $ZP - RA - A^2 \propto O$ .

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum idemque minus est supra, alterum majus est infra, differentia amborum  $R$ , & rectangulum sub lateribus ipsis  $ZP : A$  autem explicabile est de alterutro ex iisdem.

Intelligatur enim ut supra  $B - A \propto O$  item  $C + A \propto O$  &  $B$  minus sit quam  $C$ ; fiet ergo productum  $BC - BA - A^2 \propto O$  quod quidem si hanc interpretationem accipiat ut  $BC \propto ZP$ , &  $C - B$  sit  $R$ , habebimus æquationem propositam: cætera se habent ut supra.

Nec ulla est in duabus prædictis propositionibus determinatio, quia in utraque duo latera, de quibus  $A$  explicabile est, sunt semper inæqualia.

Item nulla alia est inter duas hæc æquationes differentia, nisi quod in priori latus quod est supra majus est eo quod est infra, in posteriori autem illud quod est supra, minus est eo quod est infra.

*Propositio quarta.*

**S**I  $ZP - A^2 \propto O$ .

Sunt duo latera æqualia, quorum alterum est supra, alterum infra, rectangulum sub ipsis est  $ZP$  & fit  $A$  alterutrum ex iisdem.

Intelligatur enim  $B - A \propto O$  sic ut  $+A \propto +B$  supra. Item  $C + A \propto O$ , sic ut  $A$  ex se æquetur ipsi  $C$  infra; ponaturque  $B$  æquari eidem  $C$ : itaque si fiat multiplicatio ut in antecedentibus, productum erit

N ij

$BC \frac{+BA}{-CA} - A^2 \propto O$ . Quod si hanc interpretationem

accipiat ut  $BC \propto ZP$ , quia tollunt se invicem  $\frac{+B}{-C}$  habebimus æquationem propositam  $ZP - A^2 \propto O$ , quæ explicabilis est tam de A supra æquali ipsi B, quam de A infra æqualia ipsi C.

*Propositio quinta.*

**S**I  $ZP + A^2 \propto O$ .

Nullum propriè loquendo est latus, sed unicum planum æquale ipsi  $ZP$  de quo quidem est explicabile ipsum  $A^2$ .

Ejusmodi autem æquatio irregularis est, nec potest ipsa oriri ex multiplicatione, ut factum est in antecedentibus.

Nota ergo æquationes quasdam de planis tantum explicabiles esse, quod etiam ad solida & ultra in infinitum extendi, quivis satis doctus reperiet.

*De constitutione æquationum cubicarum.*

CAPUT PRIMUM.

**S**I  $Z^3 - SPA + RA^2 - A^3 \propto O$ .

*Vide postea  
propositionem  
specialem.*

Sunt tria latera positiva supra, quorum summa est R, summa trium rectorum ex ipsis binis ac binis sumptis est SP, solidum autem sub iisdem contentum est  $Z^3$ , & fit A quodvis ex ipsis tribus.

$$B - A \propto O$$

Intelligamus enim  $C - A \propto O$  & per quodvis ex istis

$$D - A \propto O.$$

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 105  
 tribus binomiis, per illud scilicet quod nihilo æquari  
 intelligitur, multiplicetur productum ex aliis duobus,  
 quicquid illa duo valeant, & quicquid valeat eorundem  
 productum, fiet productum ex omnibus tribus æquale ni-  
 hilo illud autem est.

$$\begin{array}{r} -BCA + BA^2 \\ BCD - BDA + CA^2 - A^3 \propto 0 \\ -CDA + DA^2 \end{array}$$

Omnia autem hanc interpretationem recipiunt ut  $BCD \propto Z^3$ .

$$\begin{array}{r} \text{Item} -BC \propto SP \text{ \& } +B \propto R \\ -BD \qquad \qquad +C \\ -CD \qquad \qquad +D \end{array}$$

Quo pacto habebimus æquationem propositam  $Z^3 - SPA + RA^2 - A^3 \propto 0$ .

Quia vero in multiplicatione binomiorum, ipsum A triplicem valorem induere potuit, puta vel ipsius B, vel C, vel D, sic ut in eandem formulam semper incidamus, nec ullo modo mutetur æquatio, patet ipsam de eodem triplici A explicabilem esse, sub ipso triplici valore.

### *Determinatio præcedentis æquationis.*

HUJUS æquationis déterminatio duplex est, altera major, in qua omnia tria latera sunt æqualia; altera minor, in qua duo tantum æqualia sunt.

Major determinatio ejusmodi fortitur constitutionem ut  $Z^3$  æquale sit cubo tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum  $Z^3 \propto \frac{1}{27} R^3$ , & SP æquale sit triplo quadrati ejusdem tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum SP

102 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

$\propto \frac{1}{3} R^2$ , patet hoc ex eo quod ex constitutione præcedenti, si B, C, D, intelligantur tria latera æqualia, erit solidum BCD, five Zf æquale ipsi B.

BC		B
Item plana BD simul, five SP $\propto 3 B^2$ ; & tandem latera C		
CD		D

simul, five R æqualia 3 B.

Minor determinatio longiori eget apparatu, pro quo ponamus duo latera æqualia esse ea quæ in constitutione præcedenti referebantur per B & C, quo pacto sic æquatio explicari poterit, ut  $B^2 D \propto Zf$ ;

Item  $B^2 + 2 BD \propto SP$  &  $2 B + D \propto R$ .

Atque ita  $B^2 D - B^2 A + 2 BA^2 - A^3 \propto O$   
 $- 2 BDA + DA^2$ .

Jam quia B est A &  $2 B + D$  est R, ideo  $R - 2 A$  est D. Hanc ergo speciem induat D in posterum, ut sit  $R - 2 A$ .

Item  $B^2$  est  $A^2$ , quod ductum in D id est in  $R - 2 A$ , producit  $RA^2 - 2 A^3$  quæ species proinde æqualis est Zf, & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{2} Zf. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto O.$$

Rursus  $B^2$  est  $A^2$ : &  $2 BD$  est  $2 RA - 4 A^2$  quæ ambas species simul constituunt,  $2 RA - 3 A^2$  ambæ autem constituunt SP. Itaque  $2 RA - 3 A^2 \propto SP$ , & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{3} SP - \frac{2}{3} RA + A^2 \propto O.$$

Hic nisi ambigua esset hæc æquatio plana, ac de duobus lateribus supra explicabilis, jam haberetur valor ipsius A; sed quia duplex est valor ille nempe, vel latus ( $\frac{1}{3} R^2 - \frac{1}{3} SP$ ) +  $\frac{1}{3} R$ , vel  $\frac{1}{3} R -$  latere ( $\frac{1}{3} R^2 - \frac{1}{3} SP$ )

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 103  
 estque ex illis, alter quidem utilis, alter inutilis, atque  
 etiam si utilem agnoscere non sit difficile, tamen quia ex  
 comparatione quarumdem aliarum æquationum ad sim-  
 plicem lateralem, ac de unico eoque vero latere expli-  
 cabilem devenire possumus, ideo sic progrediemur.

Sed supra etiam  $\frac{1}{2} Z^f. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto O.$

Ascendat per A depressior harum æquationum nempe  
 hæc

$$\frac{1}{2} SP - \frac{2}{3} RA + A^2 \propto O.$$

Atque ita fiet hæc  $\frac{1}{2} SPA - \frac{2}{3} RA^2 + A^3 \propto O.$

Huc ergo æqualis est  $\frac{1}{2} Z^f. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto O.$

Sublatoque communi  $A^3$  & addito  $\frac{1}{2} RA^2$  puta per  
 anthitesim fiet hæc æquatio.

$$\frac{1}{2} Z^f. \propto \frac{1}{2} SPA - \frac{1}{6} RA^2.$$

Et communidivisor  $\frac{1}{6} R$  adhibito  $\frac{3}{R} Z^f. \propto \frac{2SPA - A^2}{R}.$

Atque omnibus ordinatis  $\frac{3}{R} Z^f. - \frac{2SPA - A^2}{R} \propto O.$

Sed rursus ut supra  $\frac{1}{2} SP - \frac{1}{2} RA + A^2 \propto O.$

Ergo hæ duæ æquationes invicem æquales sunt, unde  
 sublato communi  $A^2$  & per anthitesim fiet hæc æqua-

$$\frac{3}{R} Z^f. = \frac{1}{2} SP = \frac{2SPA - A^2}{R}$$

$$\text{Itaque } \frac{3}{R} Z^f. = \frac{1}{2} SP$$

$$\frac{2SPA - A^2}{R} = \frac{1}{2} R \quad \text{est valor ipsius } A$$

Si ergo accidat aliquam ex præmissis  
utramque esse æqualem nihilo, vel alteram esse  
minorem, alteram verò nihilo majorem, nulla erit ejus-  
modi determinatio: sed æquatio explicari poterit de tri-  
bus lateribus supra, at de uno tantum. Aliquo tamen  
casu fieri poterit, ut sub proposita initio æquationis  
formula unicum inveniatur latus supra, & unicum infra,  
quod proprie latus non est, sed planum tunc autem pro-  
positio specialis est cujus explicandæ hic est locus.

*Propositio secunda specialis.*

**S**I  $Z^f — SP \cdot A + RA^2 — A^3 \propto O$ .

Sit autem  $Z^f \propto SP$ .

R

Sunt duo latera, alterum suprâ æquale ipsi R, alte-  
rum infrâ non proprie latus, sed planum æquale ipsi SP,  
& A explicari potest de quolibet ipsorum. Fingatur enim  
 $BP + A^2 \propto O$  quæ æquatio explicabilis est de unico pla-  
no infrâ æquali ipsi BP ut notatum est prop. 5<sup>a</sup>. Æquat.  
quadraticarum.

Item  $C — A \propto O$  tum fiat multiplicatio ut consuevimus.

Orietur ergo  $BP \cdot C — BP \cdot A + CA^2 — A^3 \propto O$ .

Hæc æquatio eam accipiat interpretationem ut  $BP \cdot C$   
 $\propto Z^f$ , &  $BP \propto SP$ , atque  $C \propto R$ .

Quod pacto indecimus in æquationem propositam,  
ubi manifestum est ex generatione  $Z^f \propto SP$ , & A esse

R

æquale vel ipsi C, hoc est R supra, vel  $A^2$  est æquale ipsi  
BP, hoc est SP infra.

CAPUT

## CAPUT SECUNDUM.

*Propositio prima.*

**S**I  $Z^{\text{r}} - SP A^2 + A^3 \propto O$ .

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infra, idemque majus duobus reliquis simul sumptis, differentia seu excessus tertii, supra summam duorum priorum est R: at SP est differentia seu excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, supra id, quod sub primo & secundo, solidum autem  $Z^{\text{r}}$  quod fit sub tribus, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Intelligentur enim  $B - A$

$C - A$

$D + A$

Quorum D fit majus ambobus B & C simul sumptis; sit autem quævis ex illis tribus speciebus nihilo æqualis, & fiat multiplicatio solito modo orieturque,

$-BDA + DA^2$

$BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O$ .

$+BCA - CA^2$

& quia D majus ponitur quam B & C simul, manifestum est BC multo minus esse quam BD & CD simul sumpta. Itaque omnia hanc interpretationem recipiant ut  $+D - B - C$  sit  $+R$ , item  $-BD - CD + BC$  sit  $-SP$ ; &  $BCD$  sit  $Z^{\text{r}}$ . quo pacto incidemus in æquationem propositam.

$Z^{\text{r}} - SP A + RA^2 + A^3 \propto O$ .

Patet autem ex formula, A explicabile esse tam de B  
*Res. de l'Acad. Tom. VI.* O

aut C supra quàm de D infra, quia in multiplicatione binomiorum ipsum triplicem hunc valorem induere potuit.

*Determinatio præcedentis æquationis.*

**D**ETERMINATIO unica est, nempe minor, cum scilicet duo latera supra sunt æqualia; aliter enim æqualia esse non possunt: si quidem illud quod est infra, duobus reliquis simul majus est.

Posito ergo quod B & C sunt æqua, explicari poterit formula æquationis hoc modo.

$$\begin{aligned} B^2 D - 2 BDA + DA^2 \\ + B^2 A - 2 BA^2 A \propto O. \end{aligned}$$

Quoniam autem B est A &  $D - 2 B$  est R, ergo  $D - 2 A$  est R & per anthitesim  $R + 2 A$  est D, hanc ergo speciem induat D in posterum ut sit  $R + 2 A$ .

Item  $B^2$  est  $A^2$ , quod ductum in D, id est in  $R + 2 A$  producit  $RA^2 + 2 A^3$ , quæ species proinde æqualis est  $Z^1$  & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{2} Z^1 - \frac{1}{2} RA^2 - A^3 \propto O.$$

Rursus  $B^2$  est  $A^2$ , &  $2 BD$  est  $2 RA + 4 A^2$ . Quorum ambarum specierum differentia est  $2 RA + 3 A^2$ , hæc idcirco æqualis est S p & omnibus ordinatis.

$$\frac{1}{3} S p - \frac{2}{3} RA - A^2 \propto O.$$

Ascendat hæc æquatio par A gradum, atque ita rursus

$$\frac{1}{3} S p A - \frac{2}{3} RA^2 - A^3 \propto O.$$

Ergo huic æquationi æquatur hæc

$$\frac{1}{2} Z^1 - \frac{1}{2} RA^2 - A^3 \propto O.$$

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 107  
 Additisque communibus  $A^2$ , &  $\frac{1}{2}RA^2$  fiet hæc

$$\frac{1}{2}SPA - \frac{1}{2}RA^2 \propto \frac{1}{2}Z^f.$$

Et communi divisore adhibebito  $\frac{1}{2}R$ , erit  $\frac{2SPA}{R}$

$$A^2 \propto \frac{3Z^f}{R}$$

Et omnibus ordinatis  $\frac{3Z^f}{R} - \frac{2SPA}{R} - A^2 \propto 0$ .

Mutatisque omnibus signis  $-\frac{3Z^f}{R} + \frac{2SPA}{R}$

$$A^2 \propto 0.$$

Sed rursus supra  $\frac{1}{2}SP - \frac{1}{2}RA - A^2 \propto 0$ .

Itaque addito communi  $A^2$  & per anthitesim fiet hæc æquatio

$$\frac{3Z^f}{R} + \frac{1}{2}SP \propto \frac{2SPA}{R} + \frac{1}{2}RA.$$

$$\text{Itaque } \frac{3Z^f}{R} + \frac{1}{2}SP$$

$$\frac{2SP + \frac{1}{2}R}{R} \text{ est valor ipsius } A.$$

*Propositio secunda.*

**S**I  $Z^f - SPA - A^2 \propto 0$ .

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infrà, idemque æquale duobus prioribus simul sumptis.

SP est excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod

O ij

108 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

sub secundo & tertio, supra id quod sub primo & secundo.

Z<sup>f</sup>. autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus: ponantur enim eadem species quæ supra, nisi quod D intelligi debet æquale duobus B & C simul, fietque rursus eadem æquatio.

$$\begin{array}{r} -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A; \propto O \\ + BCA - CA^2 \end{array}$$

Quoniam autem D, ponitur æquale duobus B & C simul, ideo evanescet affectio sub A<sup>2</sup> quia —BA<sup>2</sup> —CA<sup>2</sup> tollunt DA<sup>2</sup>, superest ergo tantum.

$$\begin{array}{r} -BDA + \\ BCD - CDA + A; \propto O \\ + BCA \end{array}$$

Ubi rectangula BD & CD simul majora sunt quam BC.

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut BCD æquetur Z<sup>f</sup>. & —BD

$$\begin{array}{r} -CD æquetur -SP, \\ +BC \end{array}$$

Incidemus in æquationem propositam Z<sup>f</sup> —SP A + A; ∞ O.

Ubi manifestum est ipsum A explicabile esse tam de B & C suprâ, quàm de D infrâ.

\* Quoniam  
D æquatur B  
& C simul;  
ac B & C si-  
mul in D æ-  
quales sunt 4  
B<sup>2</sup>, ex qui-  
bus sublato  
BC quod est  
B<sup>2</sup> restat 3B<sup>2</sup>.

Determinatio rursus unica est, nempe minor, cum duo latera suprâ sunt æqualia, neque enim aliter æqualia esse possunt, cum illud quod est infrâ duobus reliquis simul sumptis sit æquale.

Invenietur ergo hæc determinatio sic.

Positis B & C æqualibus, æquatio talis esse poterit,

$$B^2 D - 3B^2 A + A; \propto O \text{ unde } SP \propto 3B^2. *$$

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 109

Posito ergo, quod B sit A ex hypothesi determinatio-  
nis, tunc  $SP \propto 3 A^2$ .

Itaque  $\frac{1}{3} SP$  est valor ipsius  $A^2$  &  $Z^f \propto 2 A^3$ .

*Propositio tertia.*

**S**I  $Z^f - SPA - RA^2 + A^3 \propto 0$ .

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium  
infra, idemque minus duobus prioribus simul sumptis,  
excessus summæ duorum priorum supra tertium est R, at  
rursus ut in duabus præcedentibus propositionibus summa  
duorum rectangulorum, ejus scilicet, quod sub primo &  
tertio, & ejus quod sub secundo & tertio excedit id quod  
sub primo & secundo, & excessus est SP;  $Z^f$  autem est  
id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de  
quolibet ex ipsis tribus.

Ponantur enim eædem species quæ suprà ea tamen le-  
geut D intelligatur minus quàm B & C simul, & rectan-  
gula BD & CD simul majora quàm BC, fietque rursus  
hæc æquatio ut suprà, nempe

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \propto 0 \\ & +BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut ex-  
cessus B & C simul suprà D, sit R; at excessus rectangu-  
lorum BC & CD simul suprà BC, sit SP; item solidum  
BCD sit  $Z^f$ , incidemus in æquationem propositam,

$$Z^f - SPA - RA^2 + A^3 \propto 0.$$

Ubi manifestum est A explicari posse tam de B & C  
suprà, quàm de D infra.

*Determinatio præcedentis æquationis.*

**H**UJUS propositionis determinatio triplex esse potest, prima major, cum omnia tria latera sunt æqualia; secunda, cum duo latera suprâ tantum sunt æqualia; & tertia, cum alterum eorum laterum, quæ sunt suprâ, æquale est ei quod est infrâ. Utraque autem harum posteriorum minor est, quàm illa, cum hic accidit esse duplicem.

Et quidem major determinatio facillima est.

Positis enim B, C, D æqualibus, factæque binomiorum multiplicatione, & sublati quæ se invicem destruant, manifestum est superesse

$$BCD - BDA - BA^2 + A^3 = 0.$$

$$\text{Sive quod idem est } B^3 - B^2 A - BA^2 + A^3 = 0.$$

Itaque  $Z^3$  est  $B^3$  sive  $A^3$ .

Sp est  $B^2$  sive  $A^2$  & R, est B sive A.

Prior autem duarum minorum determinationum, cum scilicet duo latera suprâ sunt æqualia, instituitur modo præmisso, tam in prima propositione primi capitis æquationum cubicarum, quàm in prima secundi capitis: positis enim lateribus B & C æqualibus, & argumentando ut suprâ in prædictis propositionibus, præcipuè vero ut in prima secundi capitis, nisi quod hic D invenietur esse  $2A - R$ , reperiemus tandem valorem ipsius A esse

$$\frac{\frac{3}{2} Z^3 - \frac{1}{2} SP}{R} = \frac{2 SP + \frac{1}{2} R}{R}$$

Tandem altera duarum minorum determinationum, cum scilicet alterum laterum suprâ æquale est ei quod est

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 111

infra, facilis est: posito enim quod B sit æquale ipsi D in formula præmissa, ac sublatiis iis quæ se invicem tollunt, remanebit hæc æquatio,  $B^2 C - B^2 A - CA^2 + A^3 \propto 0$ .

Itaque in æquatione proposita,  $Z^2 \propto B^2 C$ ,  $SP \propto B^2$  &  $R \propto C$ :

At C est unum ex duobus lateribus supra, itaque ipsum R est unum ex lateribus supra.

Item eadem ratione  $B^2$  sive SP est quadratum alterius lateris supra, idemque quadratum ejus quod est infra: ergo A explicabile est, tam de R supra, quam de S supra & infra.

*Propositio quarta.*

**S**I  $Z^2 - RA^2 + A^3 \propto 0$ .

Sunt tria latera quorum duo sunt supra, & tertium infra idemque minus quovis duorum priorum, excessus summæ duorum priorum supra tertium, est R. At summa duorum rectangulorum ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, æqualis est ei quod sub primo & secundo.  $Z^2$  autem est id quod sub tribus continetur & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Resumatur enim formula hujus capitis.

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \propto 0 \\ & +BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Intelligaturque D minus esse quàm B & C simul, & singula: at rectangulum BC æquale sit ambobus simul BD & CD, itaque tollunt se invicem ipsa rectangula, & sic evanescit affectio sub latere A, quia B & C simul superant D; differentia esto R, & solidum BCD vocetur 2. so-

112 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.  
 lidum, quo pacto incidemus in æquationem propositam,  
 nempe

$$Z^f - RA^2 + A^3 \propto O.$$

Ubi palam est A explicari posse, tam de B & C suprâ,  
 quàm de D infrâ.

*Determinatio.*

**H**UJUS propositionis unica est determinatio, eaque  
 minor, cùm scilicet duo latera suprâ sunt æqualia:  
 neque enim aliter æqualia esse possunt, quia unumquod-  
 que eorum quæ sunt suprâ, majus est eo quod est infrâ.

Ponantur ergo æqualia B & C, unde in formula præ-  
 missa, sublatis quæ se invicem tollunt, talis erit æquatio.

$$B^2 D + DA^2 \\ - 2BA^2 + A^3 \propto O.$$

Jam quia B est A & 2 B—D est R, idèd 2 A—R est  
 D. Item quia BD & CD simul æqualia sunt BC, idèd si  
 loco tam B quàm C sumatur A, & loco ipsius D sumatur  
 2 A—R fiet hæc æquatio.

$$4 A^2 - 2 RA \propto A^2 \text{ hoc est } 3 A^2 - 2 RA \propto O,$$

Et communi divisore 3 A fiet  $A - \frac{2}{3} R \propto O$ ,  
 Quapropter  $\frac{2}{3} R$  est valor ipsius A.

*Propositio quinta,*

**S**I  $Z^f + SPA - RA^2 + A^3 \propto O$ .

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprâ, & tertium  
 infrâ, idemque minus quovis duorum priorum, ita ut  
 excessus summæ duorum priorum, suprâ tertium sit R;  
 at summa duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub  
 primo

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 113

primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, minor est eo rectangulo, quod fit ex primo & secundo; differentia autem est  $SP$ ;  $Z^f$ . autem est id quod sub tribus lateribus continetur, &  $A$  explicabile est de quolibet ex ipsis tribus lateribus.

In formula præcedentium quam hic resumimus.

$$\begin{array}{r} \text{---} BDA \text{---} B A^2 \\ BCD \text{---} CDA \text{---} C A^2 + A^3 \propto O \\ + B C A + D A^2 \end{array}$$

Intelligentur latera  $B$  &  $C$  tam simul quàm sigillatim, majora esse quàm  $D$ , & rectangulum  $BC$  majus quàm duo simul  $BD$  &  $CD$ . Quo posito & adhibita hac interpretatione ut excessus summæ laterum  $B$  &  $C$  suprâ  $D$  sit  $R$ ; item excessus rectanguli  $BC$  suprâ summam reliquorum  $BD$  &  $CD$  sit  $SP$ , at solidum  $BCD$  sit  $z^f$ . manifestum est nos incidere in æquationem propositam, &  $A$  explicabile esse tam de  $B$  &  $C$  suprâ, quàm de  $D$  infrâ.

*Determinatio.*

**H**UJUS æquationis determinatio unica est eaque minor, tum scilicet duo latera suprâ æqualia sunt, neque alia reperiri potest laterum æqualitas, cum unumquodque ex duobus prioribus majus sit quàm tertium.

Posito ergo quod  $B$  sit æquale ipsi  $C$  in formula præmissa, & augmentando ut in prima propositione primi capitis, aut prima secundi æquationum cubicarum, inveniemus  $D$  esse  $2 A \text{---} R$ , &  $SP$  esse  $2 RA \text{---} 3 A^2$ , unde tandem deducetur valor ipsius  $A$ ,

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} Z^f + \frac{1}{3} SP \\ \hline R \\ \hline \frac{2}{3} R \text{---} 2 SP \\ \hline R \end{array}$$

*Propositio sexta irregularis.*

**S**I  $Z^f + SPA + A \propto O$ .

In hac æquatione A est explicabile de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium, vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua ipsa oriri possit. Potest tamen constitutio illius deduci, ex quatuor proportionalibus, hac ratione ut differentia extremarum sit  $Z^f$ ; rectangulum

$$\frac{1}{3} SP$$

autem sub extremis vel mediis sit  $\frac{1}{3} SP$ , & A sit differentia mediarum.

Sed neque hæc, neque aliæ similes quæ de solis lateribus infrà explicari possunt æquationes ad usum communem revocari possunt, nisi per transmutationem aliarum æquationum, quod etiam rarò aut nunquam accidit.

*Propositio septima irregularis.*

**S**I  $Z^f + RA^2 + A \propto O$ .

Rursus in hac æquatione A explicabile est de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua illa oriri possit. Facile tamen hæc æquatio transmutabitur in aliam similem ei, quæ habetur propositione 6<sup>a</sup> seu præcedenti, unde constitutio ejus ex quatuor proportionalibus deducetur ut suprà; sed neque alia esse potest, quàm præcedentis, utilitas.

*Propositio octava irregularis.*

**S**I  $Z^f + A \propto O$ .

Unicum etiam est latus infrà, idemque æquale lateri cubico ipsius  $Z^f$ .

CAPUT TERTIUM.

**H**OC caput tot propositiones habet, quot præcedens, atque has illarum sigillatim inversas, hac ratione, ut quæ illic suprâ erant latera, hic sint infrâ, & è contrario. Determinationes autem in utroque capite sunt penitus eædem: itaque exposita formula universali, quinque priorum propositionum regularium, enumeratisque breviter singulis octo propositionibus, reliqua ad idem caput præcedens remitemus.

Pro formula igitur universali, intelligantur duo latera infrâ, & unum suprâ hac ratione

$$\begin{aligned} B + A &\propto O \\ C + A &\propto O \\ D - A &\propto O \end{aligned}$$

fiatque multiplicatio qualem consuevimus habita ratione signorum, atque ita reperiemus.

$$\begin{aligned} &+ BDA - BA^2 \\ BCD + CDA - CA^2 - A &\propto O. \\ &- BCA + DA^2 \end{aligned}$$

Qua ratione duo latera infrâ intelliguntur æqualia ipsi B & C; illud autem quod est suprâ, intelligitur æquale ipsi D.

Jam differentia inter summam laterum B & C & unicum D, esto R; differentia autem inter summam rectangulorum BD & CD atque unicum BC, esto S: item solidum BCD esto Z. Hoc pacto prout excessus erit pænes hæc vel illud, vel etiam aliquando nullus, orientur quinque propositiones regulares.

*Propositio prima.*

**S**I  $Z^f + SPA + RA^2 = A; \propto O.$

Sunt tria latera, duo quidem infrà, & unum suprà; idemque majus summa duorum priorum, & differentia est R; rectangulum autem sub summa priorum & tertio excedit rectangulum sub duobus prioribus, & excessus est SP. At  $Z^f$ . est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

*Determinatio.*

**P**Ro detrminatione, positis duobus lateribus quæ sunt infrà, inter se æqualibus, recurremus ad primam propositionem secundi capitis, mutatis tamen iis. quæ hic sunt infrà, in ea quæ ibi erant suprà, reperiemus valorem ipsius A infrà, æquale esse.

$$\begin{array}{r} 3 Z^f + \frac{1}{3} SP \\ \hline R \\ \hline 2 SP + \frac{2}{3} R \\ \hline R \end{array}$$

*Propositio secunda.*

**S**I  $Z^f + SPA = A; \propto O.$

Vide secundam propositionem 2<sup>i</sup> capitis, mutatis tamen suprà & infrà, ut jam diximus, neque etiam determinatione differunt.

*Propositio tertia.*

$$\text{SI } Z^{\text{f}} + \text{SPA} - \text{RA}^2 - \text{A} \propto \text{O}.$$

Vide tertiam secundi capitis, mutatione facta ut diximus, determinatio eadem erit.

*Propositio quarta.*

$$\text{SI } Z^{\text{f}} - \text{RA}^2 - \text{A} \propto \text{O}.$$

Vide iisdem mutatis, quartam secundi capitis ejusque determinationem.

*Propositio quinta.*

$$\text{SI } Z^{\text{f}} - \text{SPA} - \text{RA}^2 - \text{A} \propto \text{O}.$$

Vide iisdem mutatis, quintam propositionem 2<sup>a</sup> capitis ejusque determinationem.

*Propositio sexta irregularis.*

$$\text{SI } Z^{\text{f}} - \text{SPA} - \text{A} \propto \text{O}.$$

Unicum est latus suprà, pro quo vide sextam propositionem secundi capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

*Propositio septima irregularis.*

$$\text{SI } Z^{\text{f}} + \text{RA}^2 - \text{A} \propto \text{O}.$$

Unicum est latus suprà pro quo vide sextam propositionem 2<sup>a</sup> capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

*Propositio octava irregularis.*

$$\text{SI } Z^{\text{f}} - \text{A} \propto \text{O}.$$

Unicum est latus suprà, æquale lateri cubico  $Z^{\text{f}}$ .

## CAPUT QUARTUM.

**H**Oc etiam caput universum est primi cubicorum; differunt enim in eo tantum quod quæ illic erant latera suprà, hic sunt infrà, idque in prima propositione, quæ prorsus regularis est: at in secunda, quæ aliquo pacto est irregularis, ambo latera remanent infrà, etiam si illic alterum esset suprà, alterum infrà, nec etiam in ambabus formula est eadem, quapropter utramque hic apponemus, etiam si utraque sit inutilis, nisi ex transmutatione aliunde oriatur, quod etiam rarò, aut nunquam accidere potest.

*Propositio prima.*

**S**I  $Z^f. + SP A + RA^2 + A; \propto O.$   
 Et  $Z^f$  non sit æquale ipsi  $SP$ ,  
R

Sunt tria latera positiva infrà, quorum summa est  $R$ , tria rectangula sub ipsis, binis ac binis sumptis simul, constituunt  $SP$ : at  $Z^f$ . est quod sub tribus continetur, & explicabile est de quolibet ex ipsis.

Statuantur enim tria latera positiva infrà, in binomiis ut consuevimus hoc pacto

$$B + A \propto O$$

$$C + A \propto O$$

$$D + A \propto O$$

& fiat multiplicatio ut in superioribus, orieturque

$$\begin{aligned} &+ BDA + BA^2 \\ BCD + CDA + CA^2 + A; &\propto O \\ &+ BCA + DA^2 \end{aligned}$$

quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut  $B + C + D$  sit  $R$ , &  $BD + CD + BC$  sit  $SP$ , item  $BCD$  sit  $Z^{\text{sol}}$ . incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est  $A$  explicabile esse tam de  $B$ , quàm de  $C$ , & de  $D$ , infrà.

Determinatio eadem prorsus est, quæ in prima propositione primi capitis cubicarum, atque id tam in maiori quàm in minori determinationum ibi expositarum.

*Propositio secunda.*

**S**I  $Z^{\text{f}} + SP A + RA^2 + A^3 \propto O$ .  
 Sit autem  $Z^{\text{f}} \propto SP$ .  


---

 $R$

Sunt duo latera ambo infrà, alterum quidem æquale longitudine ipsi  $R$ , alterum autem non proprie latus, sed planum æquale  $SP$ , &  $Z^{\text{f}}$  est id quod continetur sub primo latere in planum, quod secundi locum obtinet sive  $SP R$ , &  $A$  explicabile est de quolibet.

Statuatur enim  $R + A \propto O$   
 &  $SP + A^2 \propto O$

ut sint latus & planum, ambo positiva infrà, fiatque multiplicatio; atque ita oriëtur hæc æquatio.

$$RSP + SPA + RA^2 + A^3 \propto O.$$

Jam  $RSP$  esto  $Z^{\text{f}}$ , qua ascita interpretatione incidemus in æquationem propositam, quæ proinde explicabilis est tam de  $A$  æquali, ipsi  $R$ , quàm de  $A$  æquali potentia ipsi  $SP^0$ , ut est propositum.

*Nota circa æquationes præmissas, & circa eas quæ ad altiores gradus aut potentias pertinere possunt.*

*Prima.*

**O**MNIS affectio sub latere positivo suprà, sequitur naturam sui signi, censetur enim affirmativa vel negativa suprà, prout illa afficitur signo affirmationis vel negationis. Idem intellige de affectionibus sub omnibus gradibus, atque etiam de omnibus potentiis ejusdem lateris positivi suprà.

*Secunda.*

**U**T autem innotescat etiam quid censendum sit de affectionibus sub latere positivo infrà, ejusque gradibus & potentiis, præmittendum est primum id quod jam notavimus, nempe affirmativum infrà æquivalere negativo suprà, & è contrario.

Deinde circa latera suprà, ideo  $+$  multiplicatum per  $+$  producere  $+$ , quia multiplicator affirmativus affirmat affirmationem multiplicati. Ideo autem  $-$  per  $-$  producere  $+$ , quia multiplicator negationis negat negationem multiplicati, atque ita constituit affirmationem. At  $+$  per  $-$  vel  $-$  per  $+$ , ideo producere  $-$ , quia multiplicator affirmativus affirmat negationem multiplicati, vel multiplicator negativus negat affirmationem multiplicati, atque ita constituit negationem.

Hinc igitur, quia latus affirmativum infrà, æquivalet negativo suprà, omnis affectio sub latere positivo infrà, sequitur contrariam sui signi naturam, ita ut si sit affirmativum infrà, æquivalet negativo suprà & è contrario.

*Contra*

Contra verò quadratum lateris positivi infrà, æquivalet quadrato lateris positivi suprà, quia fit ex  $+$  A in  $+$  A, vel ex  $-$  A in  $-$  A, unde quovis modo fit  $+$  A<sup>2</sup> suprà, vel æquivalens. Itaque omnis affectio sub quadrato lateris positivi infrà, sequitur naturam sui signi affirmativi vel negativi: in altioribus verò gradibus, simili argumento concludemus idem accidere affectioni sub cubo, quod sub suo latere: & quadratoquadrato, quod suo quadrato, atque ita continuè per gradus altiores, ut illi qui statuuntur in locis imparibus, imitentur latus ipsum; qui autem statuuntur in locis paribus, imitentur quadratum.

Insuper omnis affectio, quæ retinet naturam sui signi, ducta in affectionem, quæ itidem naturam sui signi retineat, producit aliam, quæ etiam naturam, sui signi retinet. Sed & affectio quæ sequitur contrariam sui signi naturam, ducta in affectionem quæ contrariam sui signi naturam sequatur, producit aliam, quæ sequitur eandem sui signi naturam.

Contrarium autem accidit dum ducuntur inter se duæ affectiones, quarum una sui signi naturam sequatur, altera contrariam, quæ enim inde fit affectio, sequitur contrariam sui signi naturam.

### *Tertia.*

EX duabus notis præmissis non difficile erit explicare, cum ex multiplicatione binomiorum in omnibus capitibus jam expositis, circa quadratas & cubicas affectiones, producat tandem æquatio quæ nihilo æquivalet, id autem uno aut altero exemplo illustrabimus.

Proponatur primum, ut in propositione secunda quadraticarum, hæc æquatio

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

Q

122 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

$$\begin{array}{c} +BA \\ BC-CA-A^2 \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio orta est ex ductu affectionum  $B-A$  &  $C+A$  in se invicem, intelligatur ergo primo casu,  $B$  suprâ æquari ipsi  $A$  suprâ unde  $B-A$  æquatur nihilo; quia tam  $B$  quàm  $A$ , cum sint suprâ, sequuntur naturam sui signi, quæ signa cum sint contraria, manifestum est  $B$  &  $A$  tollere se invicem.

Jam  $C+A$  cujuscumque valoris sit ducatur in  $B-A$ , fit rursus manifestò

$$\begin{array}{c} +BA \\ BC-CA-A^2 \propto O. \end{array}$$

Ubi omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, quia quæ ipsas produxerunt, sui signi naturam sequebantur, & quia  $B$  æquatur  $A$ , ideo  $BC$  æquatur  $CA$ , quare propter signa contraria tollunt se invicem  $+BC-CA$ .

Item  $BA$  æquatur  $A^2$ , quare propter signa contraria tollunt se invicem  $+BA-A^2$ , atque ita omnes affectiones simul nihilo æquivalent, dum scilicet  $B$  æquatur ipsi  $A$  suprâ.

Sed secundo casu, esto  $C$  suprâ æquale ipsi  $A$  infrâ: unde  $C+A$  æquatur nihilo, quia ipsum  $+A$  infrâ sequitur contrariam sui signi naturam, æquivaletque ipsi  $-A$  suprâ, sicque tollunt se invicem  $+C+A$ .

Jam  $B-A$  cujuscumque valoris sit, ducatur in  $C+A$ , fit manifestò

$$\begin{array}{c} +BA \\ BC-CA-A^2. \end{array}$$

Ubi duæ affectiones sub latere  $A$ , scilicet  $+BA$ , sequun-  
 $-CA$

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 123

tur contrariam sui signi naturam; at  $\text{---}A^2$  &  $\text{---}BC$  sui ipsius signi naturam sequuntur; & quia  $C$  æquatur  $A$ , ideo  $BC$  æquatur  $BA$ , &  $CA$  æquatur  $A^2$ , quare tollunt se invicem  $\text{---}BC \text{---} BA$ , quia  $BC$  eandem,  $BA$  vero contrariam sui signi sequitur naturam. Eadem ratione tollunt se invicem  $\text{---}CA \text{---} A^2$  quia  $CA$  contrariam,  $A^2$  vero eandem sui signi naturam sequitur: atque ita rursus omnes affectiones simul nihilo æquivalent, cum ipsum  $C$  suprâ æquetur ipsi  $A$  infrâ.

Cum vero sic interpretamur æquationem ut  $BC$  sit  $ZP$ , at  $\text{---}B$  sit  $R$ , ut sic  $ZP \text{---} RA \text{---} A^2 \propto O$ . Patet  
 $\text{---}C$

ipsum  $R$ , esse differentiam inter  $B$  majus &  $C$  minus, quia illæ affectiones  $\text{---}BA$  &  $\text{---}CA$  habent signa diversa, & præterea vel ambæ eandem, vel ambæ contrariam sui signi naturam sequuntur, impediunt ergo signa diversa ne simul jungi debeant.

Item in hac æquatione  $ZP \text{---} RA \text{---} A^2 \propto O$ .

Dum  $A$  intelligitur esse suprâ, omnes affectiones sunt suprâ, sequunturque naturam sui signi, & sic sola affectio  $A^2$  æquatur reliquis duabus simul.

E contrario vero cum  $A$  intelligitur esse infrâ, tum  $ZP$  &  $A^2$  sequuntur naturam sui signi,  $RA$  vero contrariam, sicque  $\text{---}RA$  infrâ æquivalet  $\text{---}RA$  suprâ. Unde  $\text{---}RA \text{---} A^2$  simul æquivalent ipsi  $ZP$ .

Jam in secundo exemplo proponatur æquatio propositionis primæ secundi capitis cubicarum

$$Z^r \text{---} SPA \text{---} RA^2 \text{---} A^3 \propto O.$$

Cujus constitutionem deduximus ex multiplicatione sive ductu harum trium affectionum,  $B \text{---} A$

$$C \text{---} A$$

$$D \text{---} A$$

Q ij

Ex quo oritur hæc æquatio, posito tamen quod D majus sit quàm B & C simul.

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \propto 0 \\ & + BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Quam quidem æquationem legitimam esse, five B suprâ æquetur A suprâ, five C suprâ æquetur A suprâ, five tandem D suprâ æquetur A infrâ, sic ostendimus.

Ponamus primo casu B suprâ æquari A suprâ, unde  $B - A \propto 0$ .

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam  $C - A$ , quàm  $D - A$ , multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{aligned} & +CA \\ CD - DA - A^2 & ; \end{aligned}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia tam A, quàm B, C, D ex quibus ortæ sunt, sunt suprâ. Hoc autem totum productum quicquid valeat ducatur in  $B - A$ , atque ita tandem orietur.

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \\ & + BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Cujus omnes affectiones sequuntur sui signi naturam; propter rationem jam allatam. Quoniam ergo B ponitur æquale ipsi A, ideo BCD æquatur CDA, atque ita tollunt se invicem  $+ BCD - CDA$ ; eadem ratione tollunt se invicem  $- BDA + DA^2$ ; item  $+ BCA - CA^2$  ac tandem  $- BA^2 + A^3$ , unde patet omnes affectiones simul, nihilo æquivalere, dum B æquatur ipsi A.

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 125

Secundo casu C suprà æquetur ipsi A suprà; unde C — A ∞ O.

Jam sub ipso valore A quicquid valeat tam B — A; quàm D + A, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque manifestò

$$\begin{array}{r} + B A \\ BD — DA — A^2 \end{array}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia A, B, C, D ponuntur esse suprà: Hoc autem totum productum, quicquid valeat, ducatur in C — A, orietur rursus ut in primo casu.

$$\begin{array}{r} — BDA + DA^2 \\ BCD — CDA — B A^2 + A^3 \infty O \\ + B CA — C A^2 \end{array}$$

Ubi etiam omnes affectiones sequuntur naturam sui signi propter eandem rationem. Quoniam ergo C ponitur æquari ipsi A, ideo BCD æquatur ipsi BDA, atque ita tollunt se invicem + BCD — BDA: eadem ratione tollunt se — CDA + DA<sup>2</sup>; item + BCA — BA<sup>2</sup>: ac tandem — CA<sup>2</sup> + A<sup>3</sup>. Unde patet quod existente C æquali ipsi A, omnes affectiones simul nihilo æquivalent.

Tertio & ultimo casu, intelligatur D suprà æquari A infrà. Quo pacto D + A ∞ O.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam B — A, quàm C — A, ducantur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{array}{r} — B A \\ BC — CA + A^2; \end{array}$$

Ubi, quia tam B, quàm C sunt suprà, A autem infrà, duæ affectiones BC & A<sup>2</sup> sequuntur naturam sui signi.

Q. iij.

duæ verò reliquæ B A contrariam. Hoc autem totum

CA  
productum quicquid valeat, ducatur in D + A,  
orieturque idem omnino quod primo & secundo casu,  
nempe

$$\begin{aligned} & \text{---BDA} \leftarrow \text{DA}^2 \\ \text{BCD} & \text{---CDA} \text{---B A}^2 \text{+ A}^3 \\ & \text{+ BCA} \text{---CA}^2 \end{aligned}$$

Hic verò omnes affectiones sub latere A, atque etiam cubi A<sup>3</sup> sequuntur contrariam sui signi naturam per regulas præmissas, quia oriuntur ex multiplicatione affectionum, BD, CD, BC, & A<sup>2</sup>, quæ omnes sequuntur naturam sui signi in A quod sequitur contrariam.

Quoniam ergo D supra ponitur æquale A infrà, ideo BCD æquatur BCA, unde tollunt se invicem + BCD + BCA: nam etiam si signa sint eadem, tamen natura est contraria. Eadem ratione tollunt se invicem ---BDA ---BA<sup>2</sup>, item ---CDA ---CA<sup>2</sup>, & denique + DA<sup>2</sup> + A<sup>3</sup>.

Unde patet quod existente D supra æquali ipsi A infrà, omnes affectiones simul nihilo æquivalent. Sive ergo B vel C supra æquetur ipsi A supra, sive D supra æquetur A infrà, semper stabit æquatio, & omnes affectiones simul nihilo æquivalent.

Itaque in æquatione proposita Z<sup>l</sup>. ---SP A + RA<sup>2</sup> + A<sup>3</sup> = 0.

SP intelligitur esse differentia inter summam duorum planorum BD, CD, & planum BC: at longitudo R est differentia inter summam laterum B, C, & latus D, quæ sunt æqualia tribus illis de quibus potest explicari A, in æquatione. Rursus cum in eadem æquatione A intelligatur esse supra, tunc omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, unde sola affectio SP A æquatur tribus re-

liquis simul sumptis. Contrà verò cùm A intelligitur esse infrà, tunc affectiones sub latere A & ipsius cubo A<sup>3</sup> sequuntur naturam contrariam sui signi, duæ autem reliquæ eandem, unde—SPA infrà æquivaler — SPA suprà, & — A<sup>3</sup> infrà æquivaler — A<sup>3</sup> suprà, sicque sola affectio A<sup>3</sup> æquatur tribus reliquis simul sumptis.

His duobus exemplis rite perceptis, non erit difficile idem in omnibus æquationibus extendere, quæ ex duobus, tribus vel etiam pluribus lateribus efformabuntur.

*Quarta.*

**C**UM autem planum aliquod ex se ponitur sequitur naturam contrariam sui signi, tunc occurre posset difficultas circa affectiones lateris quod potentiâ æquale intelligitur eidem plano, & circa affectiones aliorum graduum ejusdem lateris, quæ difficultas etiamsi non difficile solvi possit, speciatim in omnibus affectionibus oblatis, quia tamen proluxa esset solutio, præcipuè quia extendi deberet non ad planum tantum, sed etiam ad gradus altiores, ideò nos solutionem afferemus in universum, quæ ad quascumque æquationes, etiam eas de quibus jam egimus, extendi potest, eamque aliquo exemplo illustrabimus.

Intelligatur ergo BP suprà — A<sup>2</sup> infrà ∞ O. Ubi manifesto A<sup>2</sup> quod planum est, sequitur naturam sui signi contrariam. Sit autem quævis æquatio, quæ orta sit ex multiplicatione hujus affectionis BP — A<sup>2</sup> in aliam quamcumque affectionem, in qua æquatione A sit explicabile de latere A, quod potentiâ æquale sit ipsi BP. Ut ostendamus omnes affectiones æquationis simul nihilo æquavale sic ratiocinabimur. Quia affectio BP — A<sup>2</sup> in aliam quamcumque affectionem ducitur, certum est in ipsam duci primum separatim BP quod sequitur con-

# 113 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONVM.

trariam : quicquid ergo producat  $BP$ , id omne simul, æquale est ei, quod producit ab  $A^2$  propter æqualitatem  $BP$  &  $A^2$ ; sed & singula producta singulis productis sunt æqualia propter eandem rationem, & in singulis æqualibus signa erunt eadem, quia  $BP$  &  $A^2$  habent idem signum. At propter contrariam naturam  $BP$  &  $A^2$  singula producta æqualia contrariæ erunt naturæ, atque idcirco tollent se invicem, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

Ut autem in omnibus æquationibus idem locum habere manifestum sit, intelligatur  $BP - A^2 \propto O$ , sintque tam  $BP$  quàm  $A^2$  suprâ, & utrumque sequatur naturam sui signi. Tunc facta multiplicatione, ut dictum est, singula producta singulis sunt æqualia & ejusdem naturæ; sed signa erunt contraria, quia  $BP$  &  $A^2$  habent contraria, atque ita rursus tollent se invicem omnes affectiones, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

In exemplo proponatur, ut in secunda propositione primi capitis cubicarum,  $BP + A^2 \propto O$ . Ita ut  $BP$  sit suprâ, at  $A^2$  infrâ, & ambo æqualia, ducatur autem hæc affectio in hanc aliam, cujuscumque sit valoris  $C - A$  orietur manifestò  $BP C - BP A + CA^2 - A^3$ , sed ita ut  $+ BP C - BP A$  fiat speciatim ex ductu  $BP$  in  $C - A$ ; at  $+ CA^2 - A^3$  fiat ex  $A^2$  in  $C - A$ . Quia ergo  $+ BP$  ducitur in  $+ C$  & producit  $BP C$ , &  $+ A^2$  ducitur in idem  $C$  & producit  $CA^2$ , sunt autem æqualia  $BP$  &  $A^2$ , atque idem possident signum, erunt æqualia producta  $BP C$ , idemque signum possidebunt: at quia diversæ sunt naturæ  $BP$  &  $A^2$ , illud scilicet  $BP$  sequitur eandem sui signi naturam, hoc verò  $A^2$  contrariam; idem ergo eorum productis accidet, ut alterum eandem sui signi naturam, alterum verò contrariam sequatur: tollent igitur se invicem  $+ BP C$  &  $+ CA^2$ ,

CA<sup>2</sup>. Eadem ratione quia  $BP$  &  $A^2$  æqualia sub eodem signo, sed diversæ naturæ ducuntur sigillatim in  $A$  & producant— $BP A$ — $A^3$ , erunt hæc producta æqualia & sub eodem signo, sed diversæ naturæ; ipsa ergo tollent se invicem, unde tota æquatio nihilo æquivaleret. Nec erit difficile simili argumento uti in quibuscumque æquationibus, semper enim singulæ affectiones singulis erunt æquales, quia fient ex æqualibus in eandem: at vel signa erunt eadem & natura contraria, vel natura erit eadem & signa contraria; sicque tollent se invicem singulæ affectiones, & tota æquatio nihilo æqualebit.

*Quinta.*

**O**PERÆ etiam pretium est scire quot modis complicari possint affectiones speciales, ut ex iis affectiones universales oriantur ad condendas æquationes omnium potentiarum quadraticarum, cubicarum, quadratoquadraticarum, quadratocubicarum &c.

Ad hoc autem habenda primum est ratio numeri graduum ex quibus ipsa potentia componitur: nam quot modis potentia ipsa ex suis gradibus gigni poterit, tot modis complicari poterunt affectiones speciales ad condendam æqualitatem. Sic latus per se, latus tantum est. Planum fit vel per se, vel ex duobus lateribus. Solidum fit vel per se, vel ex plano & latere, vel ex tribus lateribus. Planoplanum fit vel per se, vel ex solido & latere, vel ex duobus planis, vel ex plano & duobus lateribus, vel ex quatuor lateribus. Planosolidum fit vel per se, vel ex planopiano & latere, vel ex solido & plano, vel ex solido & duobus lateribus, vel ex duobus planis & latere, vel ex plano & tribus lateribus, vel ex quinque lateribus. Solidosolidum fit vel per se, vel ex planosolido & latere; vel ex planopiano & plano, vel ex plano-

### 130 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

plano & duobus lateribus, vel ex duobus solidis, vel ex solido & plano & latere, vel ex solido & tribus lateribus, vel ex tribus planis, vel ex duobus planis & duobus lateribus, vel ex plano & quatuor lateribus, vel ex sex lateribus. Atque eodem modo & ordine in infinitum.

Secundo habenda est ratio affectionum specialium ex quibus totalis gignitur: nam ex illis quædam aliquando per se æquationem aliquam constituunt, quæ de unico, vel etiam de pluribus lateribus explicabilis est, omnino autem quævis æquatio superioris ordinis formari potest ex duabus, vel pluribus æquationibus inferiorum ordinum in se ductis, atque id tot modis, quot jam diximus potentias ex suis gradibus gigni posse. Exempli gratia, æquatio cubocubica potest formari ex quadratocubica ducta in lateralem, vel ex quadratoquadratica in quadraticam, vel ex quadratoquadratica & duobus lateribus, vel ex duabus cubicis, vel ex cubica in quadraticam & lateralem, vel ex tribus quadraticis & cæt.

Hinc patet eò pluribus modis complicari posse affectiones speciales ad condendam æquationem aliquam, quò altior est illa æquatio, seu quò altior est illius potentia: atque ipsam altiore gigni posse ex omnibus inferioribus debite complicatis nullâ exceptâ, & præterea eandem per se ipsam constitui aliquando nullo inferiorum habito respectu.

#### *Sexta.*

**I**L L U D autem notatu dignissimum est, quamcumque æquationem de tot lateribus explicabilem esse, quot sunt illa de quibus explicari possunt omnes affectiones, seu æquationes speciales à quibus illa producta est. Immo & latera illius lateribus illarum singula singulis esse æqualia sive potius eadem; atque aded ejusdem affectionis & naturæ.

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 131

Exempli gratia æquatio lateris ut  $B - A \propto 0$  de unico tantum latere supra explicabilis est, sicut &  $C - A \propto 0$ . At ambæ invicem ductæ producant quadraticam æquationem

$$\begin{aligned} & -BA \\ BC - CA + A^2 & \propto 0: \end{aligned}$$

Quæ de iisdem duobus lateribus supra est explicabilis.

Rursus si hæc æquatio quadratica ducatur in hanc lateralem  $D + A \propto 0$ ; quæ de unico latere infra explicari potest, producet hæc æquatio cubica.

$$\begin{aligned} & -BDA - DA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 & \propto 0 \\ +BCA + DA^2 \end{aligned}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus explicabitur, duobus quidem supra, altero verò infra.

Eodem modo si ipsa æquatio cubica ducatur in aliam lateralem de unico latere explicabilem, producet æquatio quadratoquadratica, quæ de quatuor lateribus explicari poterit.

Item hæc æquatio cubica  $Z^f - SPA - A^3 \propto 0$ .

De unico tantum latere supra est explicabilis

$$\text{Hæc quadratica } BP - RA - A^2 \propto 0$$

De duobus, altero supra, & altero infra: his ergo duabus æquationibus in se invicem ductis fiet hæc quadrato-cubica

$$\begin{aligned} & -BPSPA + RSPA^2 - BPA^3 \\ BPZ^f - RZ^fA - Z^fA^2 + SPA^3 + RA^4 + A^5 & \propto 0 \end{aligned}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus, duobus quidem supra, & tertio infra, est explicabilis, atque ita de reliquis.

Cum verò quædam æquatio per se ipsam constituitur,

R ij

### 132 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

nec constare potest ex ductu duarum aut plurium inferiorum, tunc illam de unico tantum latere contingit explicari posse, quales sunt omnes illæ irregulares de quibus diximus suprâ cap. 2<sup>o</sup> & 3<sup>o</sup> cubicarum.

Prætereà si accidat omnia latera alicujus æquationis esse fictitia, & impossibilia, ejusmodi æquatio in quamcumque aliam ducta tertiam producet, quæ de lateribus secundæ æquationis tantum explicabilis erit; quod si etiam secundæ illius latera omnia fictitia sint, quæ ex ambabus primâ scilicet & secundâ oritur æquatio, habebit latera omnia fictitia, & impossibilia. At si duarum priorum æquationum latera quædam fictitia sint & quædam positiva, tunc æquatio quæ ab ipsis duabus producit, tot latera habebit positiva, quot in duabus à quibus producta est, reperiuntur. Cætera erunt etiam fictitia.

In exemplo esto hæc æquatio quadratica.

$$ZP - RA + A^2 \propto O.$$

& intelligatur  $ZP$  majus esse quàm  $\frac{1}{4} R^2$  unde duo latera de quibus aliàs explicabilis esset ipsa æquatio, sunt fictitia: esto quoque hæc æquatio lateralis  $B - A \propto O$  de unico latere suprâ explicabilis, ducanturque in se invicem æquationes ipsæ, unde producet hanc æquatio cubica.

$$\begin{aligned} & -BRA + BA^2 \\ ZPB - ZPA + RA^2 - A^3 & \propto O. \end{aligned}$$

Quæ quidem æquatio de unico tantum latere suprâ est explicabilis, reliqua duo sunt fictitia.

*Corollarium.*

**E**X hac nota intelligi potest methodus, quâ dignosci poterit num æquatio proposita habeat quædam latera fictitia, an verò omnia sint positiva, an etiam omnia fictitia; illud autem aliquando & longissimæ & difficillimæ indagationis est, præcipuè in æquationibus ultra cubum elatis & multipliciter affectis. In universum autem considerandum erit quot modis æquatio proposita ex aliis inferioribus produci poterit, habitâ ratione formulæ, & quot modis accidere poterit ut illæ inferiores habeant latera, vel fictitia, vel positiva, quidve tam hæc, quàm illa efficiant, dum inter se multiplicantur: nam hoc intellecto, dum proponetur illa æquatio, examinandum erit num id illi conveniat, quod à parte laterum fictitiorum produci debuit, num vero id quod à parte laterum positivorum exempli gratia, propositâ hac æquatione cubicâ.

$$C^f. — DPA + FA^2 — A^3 \propto O.$$

Cujus formula similis est ei quam sub finem notæ sextæ adduximus, patet eam produci potuisse à duabus, alterâ planâ, sub hac formula:

$$ZP — RA + A^2 \propto O.$$

Altera autem laterali sub hac formulâ  $B — A \propto O$ . Unde æquationis productæ formula est hæc, quæ etiam ibi adducta est.

$$\begin{aligned} & — BRA + BA^2 \\ ZPB — ZPA + RA^2 — A^3. \end{aligned}$$

Conferantur ergo inter se singula homogenea amborum ipsarum æquationum, scilicet  $C^f$ . cum  $ZPB$ , item

134 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

DE cum ambobus simul BR & ZP, & longitudo F, cum ambabus B & R: his enim collatis si reperiatur ZP majus esse quàm  $\frac{1}{4} R^2$ , concludemus latera æquationis planæ fuisse fictitia atque adeo & eadem, in æquatione cubica, fictitia esse. Quod si ZP non sit majus quàm  $\frac{1}{4} R^2$ , erunt in utraque æquatione latera positiva. Verùm tota difficultas consistit in modo & ratione examinandi: hic enim in exemplo, videndum esset, num longitudo F sic dividi possit in duas partes, quæ referant B & R, & rectangulum sub ipsis demptum ex DP relinquat  $\frac{1}{4}$  quadrati alterutrius partium, putà ipsius R. Ac præterea C<sup>f</sup>. applicatum ad reliquam partem exhibeat idem  $\frac{1}{4} R^2$ , hoc enim casu æquatio proposita explicabilis erit de tribus lateribus, duobus quidem æqualibus, tertio verò utcumque, & ambo æqualia simul æquivalent primæ portioni ipsius F, puta ipsi R, eritque hic casus minoris majorisve determinationis.

Aliter, quod tamen eòdem recidit, dividatur longitudo F, sic ut rectangulum sub partibus unà cum  $\frac{1}{4}$  quadrati unius portionum æquale sit DP, est autem hujusce divisionis problema planum de duobus lateribus explicabile, & determinationi obnoxium, ac tunc si divisio fieri non possit, statim pronunciare licet æquationis planæ latera fuisse fictitia. Si autem divisio fieri possit, sitque ipsa maxima eademque unica, cum scilicet altera pars ipsi B correlata, erit  $\frac{1}{3} F$ , altera autem ipsi R correlata, erit  $\frac{2}{3} F$ , tunc nisi C<sup>f</sup> sit præcise  $\frac{1}{27} F^3$  erit rursus æquatio plana, fictitia: existente autem C<sup>f</sup>. æquali ipsi  $\frac{1}{27} F^3$ , erit tunc casus majoris determinationis, de qua dictum est propos. prima, cap. 1 cubicarum. At verò si facta divisione longitudinis F ut dictum est, non incidamus in maximam, cum scilicet portio ipsi B correlata non erit  $\frac{1}{3} F$ , sed major, vel minor (duplex enim hoc casu contingere potest solutio,) tunc

fi ductâ alterutrâ ex iis duabus partibus quæ ipsi B correlatæ sunt, in  $\frac{1}{4}$  quadrati alterius sibi congruentis, fiat solidum æquale ipsi  $C^f$ , habebitur casus minoris determinationis, in quo tria latera erunt positiva, duo quidem æqualia, ad æquationem quadraticam pertinentia, quorum summa erit illa portio longitudinis F, quæ ipsi R correlata est; & tertium singulis productis inæquale, quod ad æquationem lateralem pertinebit, eritque tertium illud portio ipsi B correlata. Quod si ex duobus illis solidis quæ hac ratione fieri possunt, (videlicet ob duplicem solutionem, quæ contingere potest, divisa longitudine F, ut proponitur) neutrum æquale reperiat ipsi  $C^f$ , sit autem hoc  $C^f$ , maximo prædictorum minus, minimo majus: tunc tria æquationis latera erunt positiva, sed inæqualia. Si tandem  $C^f$ , vel maximo prædictorum majus, vel minimo minus extiterit, hoc casu erunt duo illa latera fictitia quæ ad æquationem planam pertinebunt, ac solum reliquum illud erit positivum, quod æquationis lateralis proprium erit.



# DE GEOMETRICA

## PLANARUM ET CUBICARUM

### ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

**Æ**QUATIONEM Geometricè resolvere, est invenire Geometricè omnia latera de quibus ipsa æquatio explicabilis est.

Inventio autem ejusmodi laterum dicitur esse Geometrica, cùm illa deducitur ex locis propriis secundùm Geometriæ leges descriptis, atque inter se certo ac legitimo modo compositis; ita ut ex ipsorum locorum sectione vel tactione, lineæ quædam rectæ deducantur quæ latera quæsitæ exhibeant.

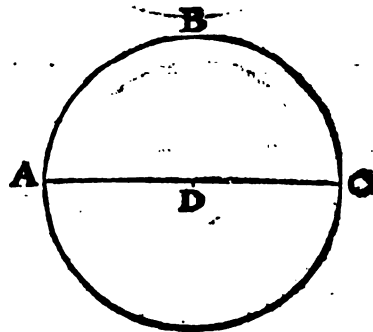
Quoniam verò ista laterum inventio pendet à locis Geometricis, non abs re fuerit aliqua de ipsis locis præmittere, tum circa eorum naturam atque constitutionem, tum etiam circa eorumdem divisionem, ac diversos gradus; ut quæ simpliciora sunt, à magis compositis distinguantur.

Locus ergo Geometricus in univèrsum, est magnitudo quædam ex qua deduci possunt quotcunque aliæ magnitudines secundùm eandem atque uniformem quandam legem, quæ eandem aliquam atque uniformem sortiantur proprietatem.

De locis ejusmodi complures libros antiqui conscribere, quorum numerum & titulos apud Pappum Alexandrinum legere licet; sed illi temporis injuria, summo rei literariæ detrimento, perierunt. Neque nos eorum instaurationem hîc intendimus, quia ad nostrum institutum,

tutum, paucis iisque non admodum difficilibus, ege-  
mus. Non abs re tamen fore judicavimus selectiores ali-  
quot ex illustrioribus locis in exemplum hinc afferre,  
quod eorum natura & constitutio magis elucescat. Nec  
ultra constructionem seu compositionem ipsorum pro-  
grediemur: demonstrationem autem, quia plerumque  
nimis longa est, ad eam partem Geometriæ quæ talem  
materiam tractare debet, remittimus.

In primo ergo exemplo. Estò quævis circuli circum-  
ferentia ABC, cujus cen-  
trum sit D; manifestum est  
ergo rectas omnes ab ipsa  
circumferentia ad centrum  
D ductas esse æquales. Ita-  
que ex præmissa loci defi-  
nitione, circumferentia illa  
locus est; quandoquidem ea  
magnitudo est ex qua de-  
ductæ quotcumque aliæ ma-  
gnitudines, lineæ rectæ sci-  
licet, secundum eandem at-  
que uniformem legem, puta quæ ad idem centrum D  
tendant, eandem aliquam atque uniformem sortiuntur  
proprietaem, ut scilicet omnes sint inter se æquales.

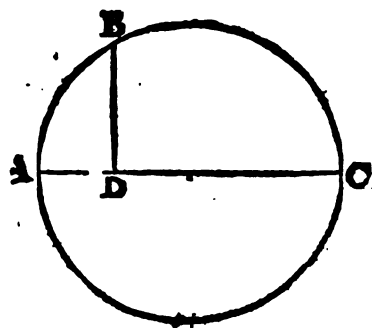


Geometriæ autem, cum magnitudinem aliquam ad  
quendam locum referre volunt, primum magnitudinis  
istius genus ac speciem, deinde ejusdem conditiones ex-  
primunt, ac tandem locum ipsum enuntiant, addito mo-  
do quo ipsa magnitudo ad prædictum locum refertur.

In exemplo ergo præmissa sic illi loquerentur. Si ab  
aliquo puncto educantur quotcumque rectæ, quæ uni-  
eidemque rectæ sint æquales, erit alterum cujusvis edu-  
ctæ extremum ad circuli circumferentiam.

In altero exemplo. Estò quævis circumferentia cir-  
*Act. de l'Acad. Tom. VI.*

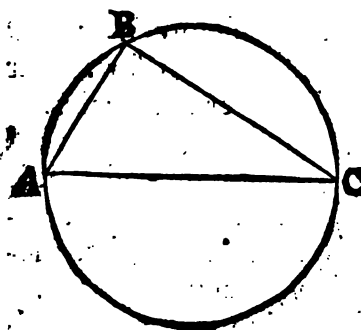
culi ABC, cujus diameter sit AC, atque in ea diametro



statuatur punctum quodvis D, à quo erecta ad diametrum perpendicularis recta DB, terminetur ad circumferentiam in B: erit ergo hæc BD media proportionalis inter diametri portiones AD, DC; unde ipsa circumferentia, rursus alio respectu locus erit, quippe ad medias proportionales.

Phrasis Geometrica hujus loci talis esset. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, si inter terminos illius sumatur quodvis punctum, à quo educatur ad rectos angulos ipsius rectæ quævis alia recta, quæ inter prioris rectæ portiones media proportionalis existat, erit alterum educæ extremum ad circuli circumferentiam.

In tertio exemplo. Esto adhuc quævis circumferentia

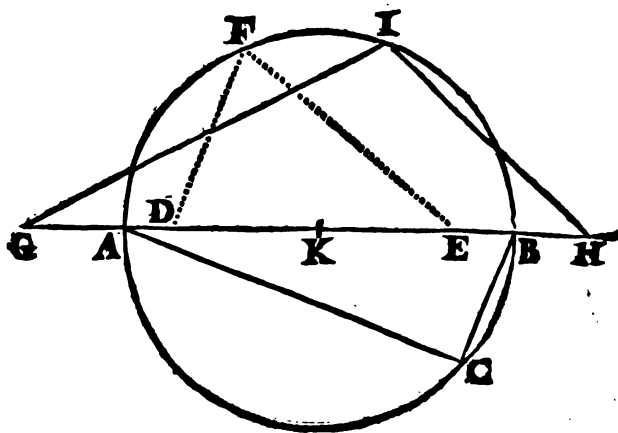


circuli ABC, atque in ea recta quædam AC quæ subtendat arcum ABC utcunque; atque in eo arcu, sumpto quovis puncto B, ducantur rectæ BA, BC ad ejusdem arcus sive chordæ ipsius extrema: manifestum est angulum ABC æqualem esse omni alii angulo qui in eadem portione ABC existet. Manifestum est quoque potuisse super rectam

AC constitui portionem circuli ABC, quæ cujuscunque anguli ABC capax esset; unde circuli portio ABC hoc respectu locus erit; quippe ad angulos æquales.

Phrasis Geometrica hæc erit. Rectâ lineâ utcunque terminatâ , & exposito quovis angulo rectilineo : si à rectâ lineæ terminis ad aliquod punctum inclinentur duæ aliæ rectæ quæ angulum exposito æqualem contineant: erit hoc punctum, sive vertex anguli, ad alicujus portionis circuli circumferentiam.

In quarto exemplo. Esto ut suprâ quivis circulus cujus diameter AB; atque ex punctis A, B, ducantur ad quodvis punctum C in circumferentia existens, rectæ AC, BC. Patet ergo ambo simul quadrata AC, BC



æqualia esse quadrato diametri AB, ac proinde ipsam circumferentiam locum esse ad summam duorum quadratorum uni eademque quadrato semper æqualem.

Atque etiam si assumpta puncta non sint ipsa A, B, sed alia duo quæcunque in rectâ AB etiam productâ, si libuerit, modò ipsa puncta à centro K hinc inde æqualiter distent, vel intra circulum, qualia sunt D, E; vel extra; qualia sunt G, H; ducanturque ad quodvis circumferentiæ punctum F vel I rectæ DF, EF; vel rectæ

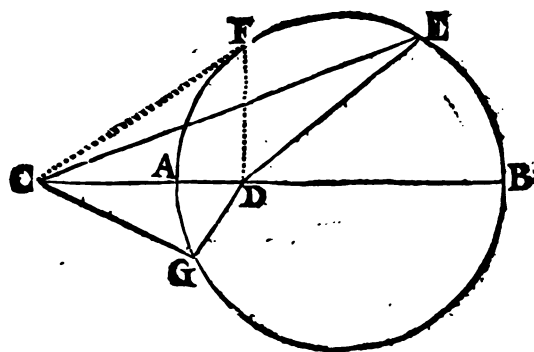
GI, HI; semper ambo quadrata DF, EF simul sumptæ uni eidemque spatio erunt æqualia, nempe summæ amborum quadratorum DB, BE, vel summæ amborum EA, AD: similiter ambo quadrata GI, IH simul sumpta, uni eidemque spatio æqualia erunt, nempe summæ amborum quadratorum GB, BH, vel summæ amborum HA, AG. Hinc ergo circumferentia illa, lato illo respectu, locus erit ad summam duorum quadratorum uni eidemque spatio semper æqualem.

Phrasis Geometrica. Rectâ lineâ quâcunque expositâ, signatisque in ea utcumque duobus punctis, si ab ipsis punctis ad tertium quodpiam punctum duæ rectæ inclinentur, & sint species quæ ab ipsis fiunt simul sumptæ exposito alicui spatio æquales, tertium illud punctum erit ad alicujus circuli circumferentiam.

Species dicunt Geometræ, non quadrata; ut indicent hoc universaliter verum esse, non de quadratis modò, sed etiam de figuris similibus, similiterque super rectis de quibus agitur descriptis. Quod enim de quadratis verum est, idem quoque de ejusmodi figuris verum esse omnino constat. Immo, si assumpta puncta in superiori quarto exemplo plura sint quàm duo, sive omnia in eadem recta existant, sive non, quicumque tandem sit illorum numerus, & quæcunque positio; atque ab iisdem punctis ad aliud quoddam punctum totidem rectæ ducantur, singulæ scilicet à singulis punctis, & omnium ipsarum rectarum species simul sumptæ alicui spatio sint æquales: erit illud aliud punctum ad circuli circumferentiam. Dabitur quippe circulus quispiam in cujus circumferentia sumpto quovis puncto, atque ab eo ad omnia puncta primò posita ductis totidem rectis, erunt harum omnium ductarum species simul sumptæ eidem spatio æquales: quo quidem respectu circumferentia illa erit locus, qui omnium locorum planorum elegantis-

simus jure cenferi poffit ; fed illius, ficuti & aliorum diffuffio fpecialior , ad fpecialem de locis tractatum pertinet, nos autem hîc ad generalem quandam locorum notionem attendimus.

In quinto exemplo. Efto item circulus, cujus diameter AB, quæ producatûr verfùs A extra circulum utcunque in C ; & ducatur recta CF tangens circulum in F, à quo demittatur in diametrum perpendicularis FD. Itaque erit ut CA ad AD, ita CB ad BD. Jam in cir-



cumferentia fumatur quodvis punctum E, vel G &c. à quo rectæ ducantur EC, ED, vel GC, GD &c. erit fane femper EC ad ED, vel GC ad GD, vel etiam FC ad FD &c. ut CA ad AD, vel ut CB ad BD ; ut hoc refpectu circumferentia AFEBG fit locus nobiliffimus ad binas & binas rectas in eadem ratione exiftentes.

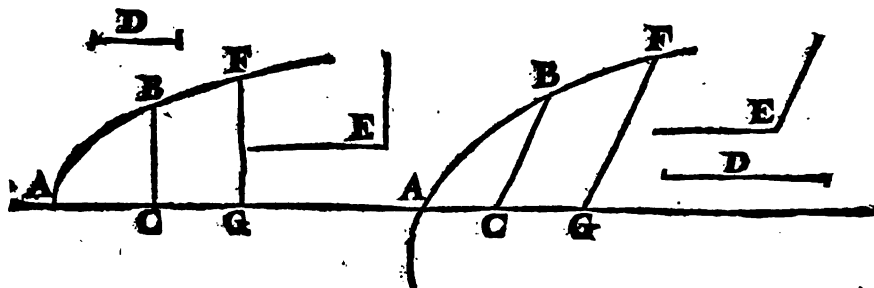
Phrafi Geometricâ. Si à duobus punctis C, D, ad idem aliud punctum E duæ rectæ inclinentur CE, DE, in data ratione inæqualitatis exiftentes : erit tertium illud punctum E ad cujufdâ circuli circumferentiam.

Omninò, quot proprietates habet magnitudino aliqua, modò proprietates ipfæ magnitudini conveniant, non

autem punctis quibusdam tantum numero definitis: tot modis ipsa magnitudo locus esse potest; ita ut si infinitæ numero sint tales proprietates ad aliquam magnitudinem pertinentes, etiam infinitis modis, talis magnitudo locus esse possit. Sed & uniuscujusque modi locus denominationem fortietur à proprietate illa, respectu cuius ipse locus est.

Sic, in quinque allatis exemplis, propter quinque nobilissimas circuli proprietates, quinque etiam modis circumferentia illius locus esse ostenditur. At cum innumeræ aliæ sint ipsius circularis figuræ proprietates, quarum unaquæque in suo genere eximia est, sequitur ut innumeris etiam modis circumferentia circuli locus esse queat: at nos quid sit locus Geometricus indicare tantum atque exemplis quibusdam illustrare decrevimus, non autem integrum eorum tractatum instaurare: itaque paucis aliis exemplis alterius generis locorum ad præcedentia additis, ad id quod propositum est accedemus.

In sexto ergo exemplo. Esto parabola AB, cujus dia-



meter fit AC, vertex A, atque ad diametrum ordinatim applicata sit quævis recta BC, & latus rectum ponatur esse D. Notum est ergo ex conicis, quadratum rectæ BC æquale esse rectangulo contento sub latere

recto  $D$ , & sub rectâ  $AC$ , quæ ex diametro inter verticem  $A$  & applicatam  $BC$  intercipitur, siue diameter illa sit axis, siue alia quæcunque. Itaque ordinatim applicatæ  $BC$ , quæcunque illa, sit media proportionalis est inter latus rectum  $D$  & portionem diametri  $AC$ . Ac proinde parabola quævis locus esse potest ad medias proportionales, quarum altera extremarum sit semper eadem.

**Phrasi Geometricâ.** Rectâ lineâ quacunque expositâ  $AC$  quæ indefinita sit, atque signato in ea quocunque puncto  $A$ ; item aliâ rectâ quavis  $D$ , longitudine datâ, & dato angulo quocunque  $E$ , si in priori recta sumatur quodcunque punctum  $C$  ad unas partes ipsius  $A$ , & educatur recta  $CB$  in angulo  $ACB$  qui æqualis sit angulo  $E$ , & punctum  $B$  sit semper ad unas partes rectæ  $AC$ , ipsa autem  $BC$  media sit proportionalis inter expositam  $D$  & portionem  $AC$ : erit punctum  $B$  ad parabolam.

Quod si plures sint in eadem parabola ordinatim ad eandem diametrum applicatæ, putâ  $BC$ ,  $FG$ , inter quas à vertice  $A$  interceptæ sint portiones diametri  $AC$ ,  $AG$ : erunt hæ portiones  $AC$ ,  $AG$ , inter se longitudine, ut applicatæ potentiâ; hoc est, erit quadratum  $BC$  ad quadratum  $FG$  ut recta  $AC$  ad rectam  $AG$ ; quo pacto parabola erit locus ad quadrata rectis lineis proportionalia, quod satis ex dictis patet.

In septimo exemplo. Esto rursus parabola  $BAC$ , cujus diameter  $AD$ , atque ad ipsam diametrum ordinatim applicata sit recta  $BDC$ ; sumpto autem in ipsa parabola quovis puncto  $H$ , ducatur recta  $HE$  parallela diametro  $AD$ , occurrens ipsi  $BC$  in puncto  $E$ . Erit ergo ut recta  $AD$  ad rectam  $HE$ , ita rectangulum  $BDC$  ad rectangulum  $BEC$ . Similiter, sumpto in eadem parabola alio quovis puncto  $I$ , & ductâ rectâ  $IF$  parallelâ ipsi  $AD$  vel  $HE$ , erit quoque recta  $AD$  ad rectam  $IF$ .

ut rectangulum BDC ad rectangulum BFC, & recta

HE ad rectam IF  
erit ut rectangulum  
BEC ad rectangu-  
lum BFC: atque ita  
de reliquis similiter  
ductis. Unde para-  
bola erit locus ad  
rectas lineas rectan-  
gulis proportiona-  
les.

Phraſi Geome-  
tricâ. Si expoſitâ  
quacunqꝛ rectâ  
BC, ſumptiſqꝛ in  
ea quotcunqꝛ pun-  
ctis DEF &c. edu-

Quòd si recta BC ordinatim applicata producat in directum extra parabolam ex quacunque parte versùs B vel C quantum quisque voluerit usque in K, & ducatur recta KL prædictis AD, HE, IF, &c. parallela, quæ parabolæ etiam productæ occurrat in L, sed ad alteras partes ipsarum AD, HE, IF, &c. tunc quoque erit recta AD ad rectam KL ut rectangulum BDC ad rectangulum BKC, atque ita de reliquis.

**Nec**

Nec ideo phrasis Geometrica à præcedenti diversa est, nisi in eo tantum quod rectæ KL, AD, sunt ad diversas partes ipsius BC; quandoquidem sic exigit loci natura.

Neque etiam refert an rectæ AD, HE, IF, KL, &c. sint perpendiculares ipsi BC, vel ad illam obliquæ; hoc enim vel illo modo semper verum erit quod proponitur.

In octavo exemplo. In alterutra figurarum præcedentium ponatur recta AD esse axis parabolæ, ad quam ideo perpendicularis sit ordinatim applicata BC, existentibus angulis ADB, ADC rectis; sitque in axe AD producto, si opus sit, focus G, à quo ad puncta H, I, B, L, &c. quæcunque in parabola existunt, ducantur totidem rectæ GH, GI, GB, GL, & reflectantur aliæ rectæ HE, IF, LK ad quamvis ordinatim applicatam BC quantum satis productam, perpendiculares: tunc verò (eximia scilicet parabolæ proprietas) quævis ducta GH cum sua reflexa HE, æqualis erit cuivis alii ductæ GI cum sua reflexa IF &c. Siquidem reflexæ ipsæ respectu ipsius BC, omnes sint ad partes verticis A, & summa cujusvis talis ductæ cum sua reflexa, puta summa GHE, æqualis erit summæ ambarum GAD, sive uni rectæ GB quæ sola ducta est, cui nulla convenit reflexa respectu ordinatæ BC. Quod si ductæ quædam, ut GL &c. suas reflexas LK &c. habeant ad alteras partes verticis A respectu ordinatæ BC: tunc differentia inter ductam GL & reflexam LK æqualis est eidem GB. Erit ergo parabola locus ad quotcunque rectas ab eodem puncto ductas, atque à parabola ad eandem aliquam aliam rectam perpendiculariter reflexas, ita ut summa vel differentia cujusvis ductæ & suæ reflexæ æqualis sit alicui datæ rectæ lineæ.

Phrasi Geometricâ. Expositâ quâcunque rectâ lineâ indeterminatâ BC; signatisque in ea duobus punctis B,

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

T

146 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

C, atque ad eandem erectâ perpendiculari rectâ quâdam longitudine datâ AD, existente puncto D in ipsa BC, sumpto etiam quocunque puncto G in eadem AD: si ductâ quâcunque rectâ GH ad partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum E inter puncta B, C, summa ambarum GHE æqualis sit datæ alicui rectæ: vel si ductâ quâcunque rectâ GL ad alteras partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum K ultra puncta B, C, differentia ambarum GL, LK, æqualis sit datæ alicui rectæ, ei scilicet cui summa GHE æqualis est: punctum reflexionis H, vel L, erit ad parabolam cujus ipsum punctum G erit focus; recta AD, axis; & recta AG erit quarta pars lateris recti.

Talis verò locus parabolicus ad specula ustoria pertinet. Nam si assumatur pars concava BAC, & radii solis sint rectæ, FI, EH, &c. qui ad sensum sunt paralleli; illi ad puncta I, H, &c. reflectentur à forma parabolica, & reflexi concurrent ad focum G; ubi si speculum sit satis amplum, & sol in debita dispositione, intensissimus calor excitabitur. Hoc autem idèd fit, quia si per punctum I duceretur recta parabolam tangens, tunc rectæ FI, GI, ad ipsam tangentem angulos æquales constituerent: eorum autem angulorum alter esset angulus incidentiæ alter autem angulus reflexionis, atque ita de reliquis ad alia puncta H, &c. pertinentibus.

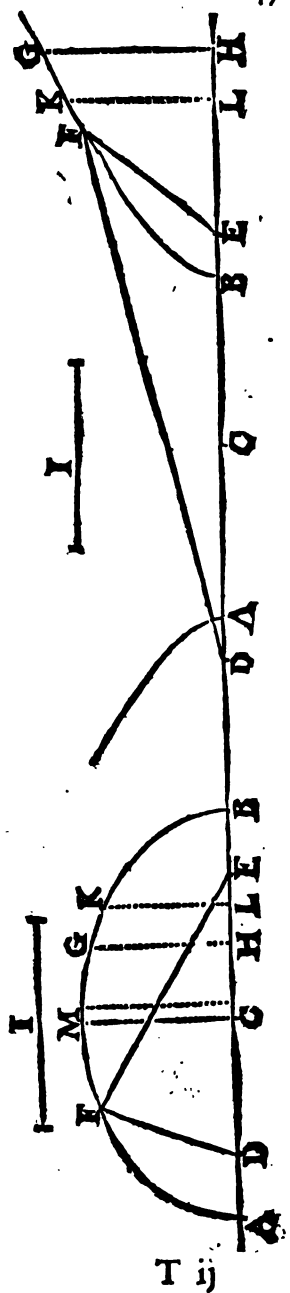
Quod si candela in puncto G constitueretur, ejus radii GH, GI, &c. post reflexionem à speculo fierent paralleli, putà HE, IF, &c. atque ita lumen candelæ longissimè produceretur; sed hæc sunt alterius loci.

Nono exemplo. Esto ellipsis vel hyperbola, cujus axis sit AB, centrum C, vertices autem sint A & B, & focī D, E, quorum D propior sit vertici A, at E sit propior vertici B; atque in sectione sumatur quodvis punctum

F, à quo ad focos ducantur rectæ DF, FE. Patet ergo ex conicis, in ellipfi summam amborum DFE, in hyperbola autem, differentiam ipsarum DF, FE, axi AB æqualem esse. Unde hoc pacto illipsis locus erit ad summam, hyperbola autem ad differentiam duarum rectarum à duobus certis punctis procedentium & ad idem tertium aliud quodpiam punctum inclinatarum.

Phrasis Geometrica, ad imitationem præmissarum facilis est.

Decimo exemplo. In iisdem sectionibus noni exempli, esto I recta latus rectum suæ sectionis, & recta AB sit quæcunque diameter cui conveniat tale latus rectum, sive ipsa diameter sit axis, sive non, atque ad ipsam diametrum sint ordinatim applicatæ quotcunque rectæ GH, KL, &c. quarum puncta K, G sint in sectione: puncta autem L, H sint in diametro AB quæ in hyperbola producta sit indefinitè. Ergo ex conicis, rectangulum ALB est ad quadratum LK, ut diameter AB ad latus rectum I; item rectangulum ALB est ad rectangulum AHB, ut quadratum LK ad quadratum HG: unde utraque sectio ad utramque talem proprietatem locus est,



148 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

Nec phrasis Geometrica difficilis est, modò quis eaz quæ superius exposita sunt imitari voluerit.

Si AB sit axis, sitque ipsi æquale latus rectum I, vel rectangula ad quadrata sint in ratione æqualitatis: tunc loco ellipsis habebimus circulum, ut in secundo exemplo. At non mutabitur hyperbola, nisi specie tantum, illa enim in genere semper erit hyperbola; sed hoc casu æqualitatis, asymptoti illius erunt inter se ad angulos rectos, cum in ratione inæqualitatis illæ asymptoti sint ad angulos obliquos; sed hæc omnia ex conicis manifesta sunt.

Undecimo exemplo. Esto quæcunque sectio conica, cujus axis AB, vertex A & focus B; atque producto utrinque axe, sumatur in eo ultra verticem punctum C; ita ut, in parabola quidem, recta AB æqualis sit rectæ AC, in hyperbola verò ipsa AB major sit quàm AC, in ea scilicet ratione quam habet distantia focorum ad longitudinem axis inter vertices sectionum oppositarum intercepti; at in ellipsi, AB minor sit quàm AC, in ea rursus ratione quam habet distantia focorum ad axem ellipsis inter vertices interceptum.

Hæc autem utraque ratio est ea quam in figuris noni exempli habet recta DE ad rectam AB; tum ex C excutetur CD perpendiculariter ad CB, eademque CD indefinite utrinque producat. His positis, sumantur in sectione quotcunque puncta F, G, &c. à quibus ducantur totidem rectæ DF, EG, &c. ipsi BC parallelæ quæ occurrant rectæ CD in punctis D, E, &c. ac tandem jungantur rectæ BF, BG, &c. ac tunc erit ut BA ad AC, ita BF ad FD, vel BG ad GE, atque ita de reliquis: unde quævis trium illarum sectionum locus est ad pulcherrimam illam proprietatem.

Phrasi Geometrica. Expositis duabus rectis CB, CD ad angulum rectum constitutis, signato in altera illa-

rum unico puncto B, quod à puncto C diversum sit, in altera verò sumantur quotcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ sint rectæ FD, GE, &c. ipsi CB parallele, quæ in punctis F, G, &c. inclinentur ad punctum B, & sint rationes BF ad DF, BG ad EG, &c. omnes inter se eadem: puncta F, G, &c. erunt omnia in una eademque sectione conica, cuius punctum B focus erit.

Hujus propositionis, in parabola quidem, unicus est casus, quia in ea unicus est focus, & vertex unicus; at in hyperbola atque in ellipsi, quia in utraque duplex est focus, B, M, & vertex duplex A, H: ideò in unaquaque ex illis sectionibus, quadruplex est casus, duo quidem respectu unius focorum propter duplicem verticem, & duo respectu alterius focorum propter eundem duplicem verticem. At quoniam id quod de uno ex istis focus verum est, verum quoque est de altero similiter considerando; ideò ad explicandos istos casus sufficiet, si unum focorum, puta B, assumpserimus.

Ille ergo focus B necessario propior est uni verticum quàm alteri. Esto vertex propior H,



remotior autem esto A. Itaque, sive puncta F, G, &c. sint prope verticem remotiorem A, sive eadem puncta F, G sint prope verticem propiorem H, semper vera est propositio, nempe BF rectam esse ad rectam FD sibi conterminam ad punctum F, ut recta BG ad rectam GE sibi conterminam ad punctum G. Hinc verò quædam deduci possunt consequentiæ quæ apud Apollonium in suis conicis non reperiuntur, nec tamen forsan illis cedunt quas ipse habet ibidem, qualis est hæc. In hyperbola, summa ambarum BF, BF, suprâ diversos vertices A, H tendentium, & ad eandem rectam FF axi AH parallelam pertinentiam, se habet ad ipsam FF, ut recta BM, quam distantiam focorum esse supponimus, ad axem AH. In ellipti, differentia earundem BF, BF, ad eandem FF, se habet ut distantia focorum BM ad axem AH; ac proinde in hyperbola, summa ipsarum BF, BF est ad summam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG. In ellipti, differentia ipsarum BF, BF est ad differentiam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG; atque ita de multis aliis quas consilio omittimus, quia id tantum, quid sit locus geometricus, declarare, atque exemplis quibusdam illustrare intendimus.

Illud tamen minime prætereundum putamus quod ad Dioptricam pertinet, nec ita pridem innotuit, nempe talem proprietatem sumptam in ratione inæqualitatis, ad refractiones pertinere, atque illis esse specificam, ad hoc ut radii omnes qui ante refractionem erant ejusdem ordinis ( hoc est vel paralleli, vel ad idem punctum inclinati, sive illi ad ipsum punctum tendant, sive ab eo divergant ) iidem post refractionem fiant adhuc ejusdem ordinis, qui tamen ordo diversus sit à priori. Et convertendo. Si superficies quædam refractiva talis sit, ut qui ante refractionem ejusdem ordinis erant radii, iidem post refractionem sint adhuc ejusdem ordinis, sed ab

# DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 351

ordine priori diversi : fiet necessariò ut tali superficiè talis conveniat proprietas , quam in hoc undecimo exemplo sectionibus conicis convenire diximus , in ratione tamen inæqualitatis.

Hic verò in universum tres sunt casus. Primus est, cum radii qui ante refractionem erant paralleli , post refractionem fiunt adhuc paralleli , sed diverso à priori parallelismo ; qui quidem casus ad sola refractiva plana pertinet , nec admodum utilis est. Secundus casus est , cum radii qui ante refractionem erant paralleli , post refractionem ad idem punctum inclinantur ; vel contrà , qui ante refractionem ad idem punctum inclinabantur , post fiunt paralleli ; qui casus ad ellipsim pertinet atque ad hyperbolam , quibus proprietas illa convenit in ratione inæqualitatis , non autem ad parabolam , cui ipsa convenit in ratione æqualitatis. Tertius casus est , cum radii qui ante refractionem ad unum punctum inclinabantur , post refractionem ad unum aliud punctum inclinantur ; qui casus aliquando ad superficiem sphericam pertinet , sed in aliquo tantum casu admodum particulari , aliàs enim ac multò magis universaliter , ipse pertinet ad alias superficies de quibus in exemplo sequenti dicturi sumus.

Quomodò autem secundus casus ad ellipsim pertineat vel ad hyperbolam , aut , quod universalius est , ad superficiem spheroidis vel conoidis hyperbolici , quæ superficies ab ipsis ellipsi vel hyperbolâ circa suos axes conversis gignuntur : non inutile erit hoc loco declarare. Posthàc enim , sequenti exemplo , quomodò tertius casus ad alias superficies pertineat , aperiemus.

In figura ellipsis vel hyperbolæ undecimi hujus exempli , sumpto in sectione quovis puncto F , quâ parte illa sectio magis distat à foco B , eademque vertici A propior est , & factâ constructione ut ibidem ; producaturs recta

# 372 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

DF ad partes F utcunque in L, tum circa axem AH intelligatur circunvoluta sectio, ut habeatur sphæroides, vel conoides hyperbolicum, ad cuius formam perficiatur perspicillum vitreum vel crystallinum, vel ex aliqua ejusmodi materia quæ ære densior sit, & radios ab ipso aëre in eandem obliquè incidentes refringat; & ratio inter aërem & talem materiam, quod ad rarefactionem & condensationem spectat; sive, ut vulgò jam loquimur, ratio refractionis inter aërem & ipsam materiam, eadem sit ei rationi quæ est inter rectas BA, AC; sive inter rectas AH, BM, conferendo semper majorem terminum rationis ad minorem, dum confertur corpus rarius ad densius: (quid sit autem ratio refractionis inter duo corpora diversæ densitatis, jamjam explicabimus:) dico quod in tali perspicillo, si radius incidentiæ sit LF, qui axi AH parallelus est, idemque progrediatur ab L ad F, frangetur radius ille in F, & fractus inclinabitur ad punctum B. Quod si radius incidentiæ sit BF progrediens à puncto B, ille frangetur in F, & post fractionem fiet radius FL axi HA parallelus. Nam in refractione, sicuti & in reflexione, progressus cujusvis radii, & regressus ejusdem, sunt per easdem lineas: atque omnino quævis species visibilis eundo & redeundo idem servat iter.

Quoniam ergo ponimus superficiem sphæroidis vel conoidis hyperbolici, exhibere nobis perspicillum ipsum à quo radii refringuntur in ingressu vel in egressu ejusdem superficiæ; & superficies illa duplici modo accipi potest, primo quidem prout convexa est, ita ut convexitas pertineat ad corpus densius; secundo prout concava est, ita ut cavitas pertineat ad idem corpus densius: sciendum est nos de priori modo jam locutos esse; quod si de secundo modo loquamur, contrarium accidet: nam si radius incidentiæ sit FF axi parallelus, atque

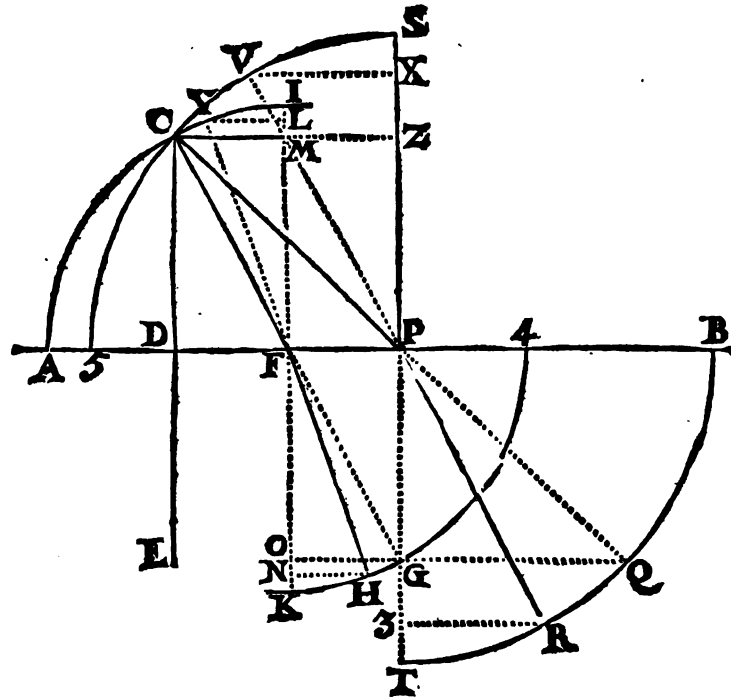
que ipse radius à parte foci remotioris B incidat in sectionem cujus vertex est A, is post refractionem in puncto F, fiet radius FI qui diverget tanquam si ab ipso foco remotiore B profectus sit, eritque in directum cum recta linea BF. Si autem radius incidentiæ sit IF, qui ad focum B inclinatur, is post refractionem fiet FF axi parallelus.

In his duobus modis manifestum est sphæroïdem à conoïde hyperbolico in eo differre, quòd priori modo radius LF in conoïde sit intra densum corpus, & FB intra rarum; in sphæroïde autem, LF sit intra rarum & FB intra densum: at secundo modo, è contrario in conoïde radius LF sit in raro, & FB in denso; in sphæroïde autem, LF sit in denso, & FB in raro.

Jam quid sit ratio refractionis inter duo corpora diaphana diversæ densitatis, putà inter aërem & vitrum, sic explicabimus.

Esto AB superficies communis duorum corporum propositorum; sitque rarius, putà aër versùs partem superiorem C; densius autem, putà vitrum, sit versùs partem inferiorem E: & sumpto in rariori, quovis puncto C, progrediantur ab eo quocunque radii CD, CF, CP &c. cadentes in superficiem AB in punctis D, F, P, &c. per quæ ingrediantur in vitrum: ex iis autem radiis, CD perpendicularis sit ad illam superficiem; cæteri autem obliqui, ita ut CF minùs obliquus sit quàm CP. Omnes ergo, præter CD frangentur in ingressu vitri; at CD solus rectà sine fractione transibit ad E. Jam cujusvis aliorum, putà ipsius CF, fractio sic se habebit. Centro F & intervallo FC describantur duo circuli quadrantes ACI quidem intra aërem, KG<sub>4</sub> autem intra vitrum, ita ut recta IFK sit diameter ad superficiem AB perpendicularis, & quadrantes habeant angulos AFI, KF<sub>4</sub> rectos, ad verticem oppositos; quo pacto illi jacebunt in eodem

154. DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.  
 plano, eruntque sibi invicem oppositi. Producatur in di-  
 rectum recta CF intra vitrum usque ad circumferentiam  
 quadrantis in G.



Si igitur radius CF fractus non esset in F, ille rectè  
 progrediretur in G; at propter fractionem fit contrà, ut  
 deviet ab ipsa rectitudine CFG, fiatque CFH ex duabus  
 rectis CF, FH angulum obtusum ad F constituentibus,  
 sic ut intra aërem angulus inclinationis CFI major sit  
 quàm angulus HFK qui est quoque angulus inclinatio-  
 nis intra vitrum; hûc enim inclinationem radiorum  
 mensuramus per angulos quos illi faciunt cum perpen-  
 diculari erecta à puncto incidentiæ, & hi anguli respe-

ætu ejusdem radii fracti, majores sunt intra rarum quàm intra densum.

Præterea producat in directum recta HF ultra centrum F usque ad circumferentiam in Y; atque à quatuor punctis C, Y, G, H in circumferentia existentibus, cadant in rectam IFK totidem perpendiculares CM, YL, GO, HN, ex quibus duæ majores CM, GO inter se æquales erunt, sicuti & duæ minores YL, HN inter se. Ratio ergo quam habet utraque majorum ad utramvis minorum, ea est quam vocamus rationem refractionis ab aëre ad vitrum, putà ratio CM ad HN vel ad YL; & convertendo, ratio minoris ad majorem, putà HN ad CM vel ad GO, vocabitur ratio refractionis à vitro ad aërem; ac universaliter major ratio vocatur ratio refractionis à rariori ad densius; minor autem, ratio refractionis à densiori ad rarius.

Et hæc quidem ratio respectu duorum eorundem corporum nunquam mutatur, sed eadem semper manet per omnes radiorum insuperficiem communem incidentium inclinationes, ut constanti experienciâ comprobatur: neque enim hoc, cùm à corporum natura pendeat, aliter haberi potuit quàm ab experientia, ex qua tale Dioptricæ fundamentum longè præcipuum atque nobilissimum depromptum est.

Sed esto in eandem superficiem AB alius radius CP priori CF obliquior; ac centro P, intervallo PC describantur ut prius duo circuli quadrantes CS, TQB prior in aëre, posterior in vitro, ambo ad verticem oppositi, atque in eodem plano jacentes, & communem diametrum habentes rectam SPT quæ ad planum AB perpendicularis existat; hic autem radius CP frangatur in P, & post fractionem abeat in R, ita ut angulus inclinationis CPS intra rarum major sit angulo inclinationis RPT intra densum; producat quoque CP in di-

## 156 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

rectum in Q, & RP producat in directum in V, sintque puncta S, C, V, S, T, R, Q, B in eadem circuli circumferentia, in cuius diametrum SPT cadant quatuor perpendiculares CZ, QG, R<sub>3</sub>, VX, quarum duæ majores CZ, QG sunt inter se æquales, sicuti & duæ minores R<sub>3</sub>, VX inter se. Rursus ergo, ratio cujusvis majoris ex quatuor illis perpendicularibus ad quamvis minorem, puta ratio CZ ad R<sub>3</sub> vel ad VX, est ratio refractionis à raro ad densum; & ratio cujusvis minoris ad quamvis majorem, est ratio refractionis à denso ad rarum, puta R<sub>3</sub> ad CZ vel ad QG; & hæ rationes eadem sunt cum præcedentibus CM ad HN, vel HN ad CM, &c.

*Vide figuras  
præcedentes  
pag. 149.*

Tale autem fundamentum refractionis ad prædictas sectiones ellipsim & hyperbolam sic accommodatur. Sumpto in quavis illarum sectionum puncto F, & factâ constructione omnino ut supra, ac posito quod sectionis species talis sit ut ratio axis AH ad distantiam focorum BM, sit ratio refractionis à raro ad densum in ellipsi, & à denso ad rarum in hyperbola, inter duo corpora proposita aërem & vitrum; ducatur recta FR quæ sectionem tangat in F; tum recta FO ipsi tangenti perpendicularis, atque adeo perpendicularis quoque ipsi sectioni, quæ quidem FO utrinque producat indefinitè, sed hoc loco speciatim, ad partes concavas sectionum; deinde centro F & intervallo quocunque FO, describatur circuli quadrans cuius arcus secet rectam FL in K, & rectam BF in N; & à punctis K, N in rectam FO deducantur perpendiculares KQ, NP: demonstrabitur ex natura conicorum, harum perpendicularium KQ, NP rationem eandem esse cum ratione axis AH ad distantiam focorum BM, ac proinde esse rationem refractionis inter duo corpora proposita aërem & vitrum. Posito ergo quod LF in ellipsi, in hyperbola autem KF sit radius incidentiæ, erit FB radius refractionis; & contra, si BF sit

radius incidentiæ, erit LF in ellipfi, & KF in hyperbola, radius refractionis.

Cætera quæ plurima sunt, minutatim persequi, Dioptriciæ sunt partes; nobis verò qui de locis agimus hoc ostendendum restat, cur tale argumentum, quod manifestò ad Dioptricam pertinet, hoc loco attigerimus.

Id ergo ostendere voluimus, non solùm in rebus purè geometricis locorum geometricorum vim cerni posse, sed etiam in aliis Matheseos partibus quæ objectum suum à Physica mutuuntur, modò talis objecti actiones per lineas geometricas producantur: quod sanè radiis specierum visibilium accidere satis superque notum est. Idem autem in Mechanica locum faciliè habere ostenderetur; atque etiam in Astronomia: sed istam segetem, quia ad hanc materiam directè non spectat, alio tempore metendam relinquamus.

Porro, si quis phrasi dioptricâ uti voluerit in enunciando ejusmodi loco dioptrico, is hoc modo loqui poterit.

Si perspicilli alicujus superficies, radios omnes parallelos in eam incidentes sic refringat, ut ad idem punctum inclinentur: vel si omnes radios ad idem punctum inclinatorum, parallelos efficiat, talis superficies erit superficies sphaeroidis, vel conoïdis hyperbolici, & punctum inclinationis erit focus ab ipsa superficie remotior, qui autem paralleli erunt radii, iidem & axi ipsius superficiei erunt paralleli, sed & axis ipse inter vertices interceptus, ad distantiam focorum eam rationem habebit quæ est ratio refractionis inter corpus ex quo fit illud perspicillum, & medium diaphanum per quod transeunt radii in tale perspicillum incurrunt.

Duodecimo exemplo. Ostendamus quomodò tertius ille casus de quo undecimo exemplo locuti sumus, & quem hûc remisimus, aliquando ad superficiem sphæ-

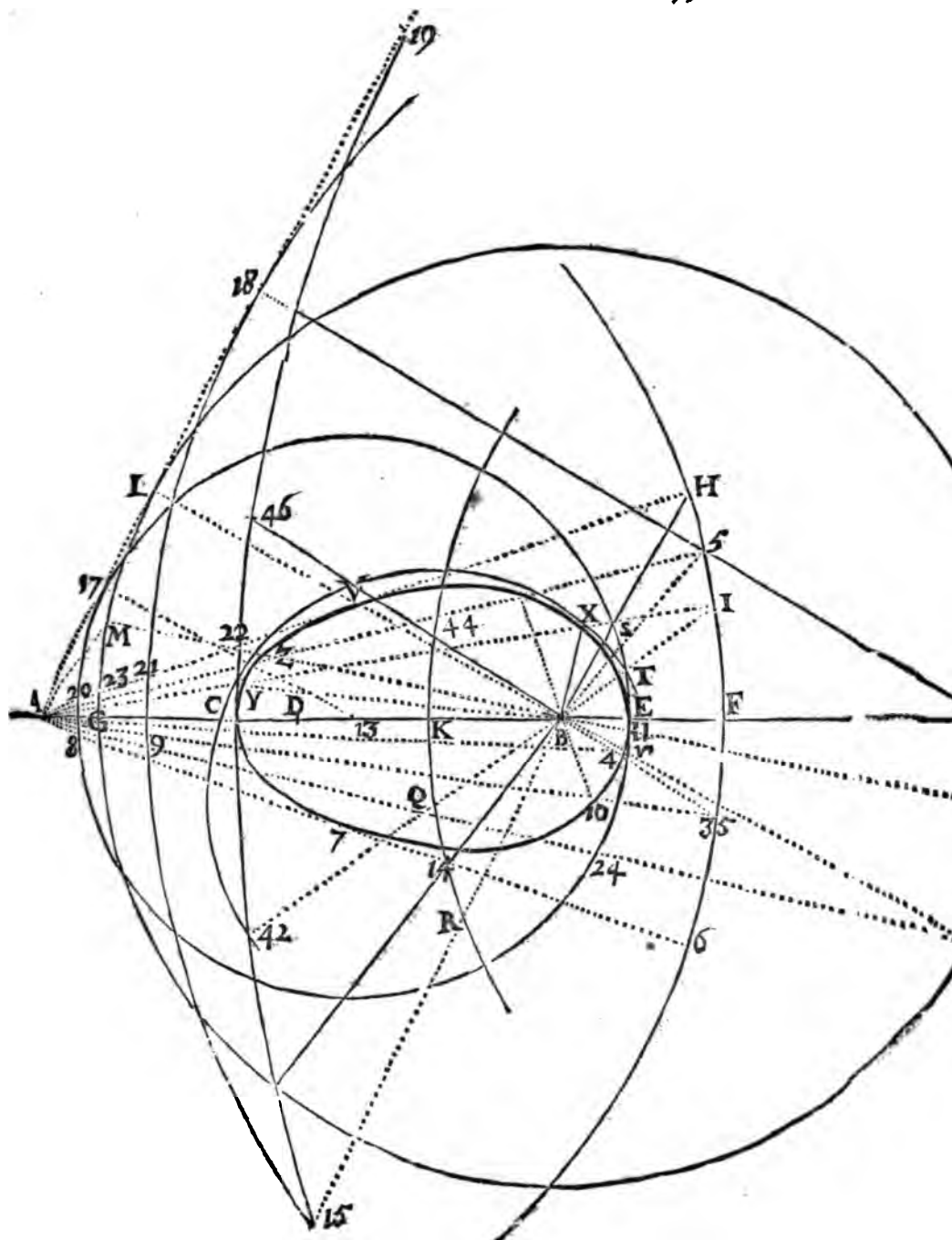
ricam, sed multò magis universaliter ad alias superficies pertineat, quas antiquis notas fuisse nullibi apparet.

Sunto ergo in figuris sequentibus, duo puncta  $AB$ ; & quæratur perspicillum quod radios ad punctum  $A$  inclinatos sic refringat, ut post refractionem iidem ad punctum  $B$  inclinentur. Et quidem jam monuimus perinde esse, siue radii ad punctum  $A$  convergant, siue ipsi radii à puncto  $A$  divergant, utroque enim modo, eodem dici ad punctum  $A$  inclinari: quod idem de quocunque alio puncto  $B$  &c. intelligi debet, ne quis circa ea quæ dicta sunt, vel quæ dicenda sunt, hærare possit.

Hinc ergo quadruplex casus particularis oriri potest. Vel enim radii ab uno punctorum  $A, B$ , divergentes, sic refringendi sunt, ut post fractionem iidem ad alterum convergant; vel radii ab uno punctorum  $A, B$  divergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant: vel radii ad unum punctorum  $A, B$ , convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero convergant; vel denique radii ad unum punctorum  $A, B$  convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant.

Et quidem omnes illi quatuor casus differunt inter se perspicillis duplici modo inter se diversis. Priori modo, cum perspicilla ipsa diversi sunt generis, quod ad formam siue figuram spectat: quemadmodum diversi sunt generis sphæroïdes, & conoïdes de quibus undecimo exemplo egimus. Posteriori modo, cum talia perspicilla differunt tantum secundum convexum & concavum, prout scilicet hoc vel illud ad corpus densius pertinet, vel ad rarius.

Verum, in universum, eorum omnium constructio non multò magis diversa est quàm constructio ellipsis à constructione hyperbolæ, quam suprà initio undecimi exempli ostendimus differre tantum secundum rationem majoris inæqualitatis, & rationem minoris



inæqualitatis. Dicamus ergo breviter de ejusmodi constructione, ut appareat ipsam ad quosdam eosque pulcherrimos geometriæ locos pertinere.

Sunto ergo puncta A, B data, oporteatque in plano figuram describere, quâ circa rectam AB circumvolutâ, gignatur forma ad perspicillum apta, ita ut radii à puncto A divergentes, quotquot in perspicillum ipsum inciderint, refringantur ad punctum B. Ex duobus autem mediis diaphanis per quæ radii siue species transibunt, alterum, idemque rarius sit aër; alterum autem, idemque densius est vitrum, atque inter illa duo corpora ratio refractionis data sit.

*Vide Figur.  
præced. p. 159.*

Ducatur recta AB, quæ indefinitè producatul ultra B versùs E (ad alteras enim partes versùs A inutile fuerit) ac inter puncta A, B, sumatur quodvis punctum C in recta AB, quod punctum C futurum sit vertex figuræ planæ quæsitæ, quæ ad ovalem formam apprimè accedet, caret tamen adhuc speciali nomine, propterea quòd ipsa geometris hujusque ignota fuisse apparet. Nec multum refert an vertex ille C puncto A, an verò puncto B propior sit; hoc enim liberum est, quamquam ad praxim utilior futurus sit, si ad punctum A magis accedat. Posito autem hoc primo ac præcipuo vertice C ex arbitrio, jam vertex alter E à puncto A remotior erit, immò ultra punctum B in recta AB producta; neque ex arbitrio pendeat illud punctum E, sed illius positio ex prædeterminatis sic habebitur. Fiar ut summa terminorum (id est antecedentis & consequentis simul) eorum inter quos ratio refractionis consistit, ad eorundem differentiam, ita recta CB ad BE, & habebitur secundus vertex quæsitus F; fietque, ut si ex CB secetur CD æqualis ipsi BE, tum recta CE quæ axis erit futuræ ovalis, sit ad rectam BD in ratione refractionis à raro ad densum; fiat quoque BE ad EF in eadem sed inversa ratione nempe

pe ut BD ad CE; & ut CE ad BD, ita AF ad BG; sed punctum F sit in recta AE producta ultra E, punctum autem G è contrario sit propè A. Tum centro A intervallo AF describatur circulus FH, (sufficiet aliqua hujus circuli portio) & centro B intervallo BG alius circulus integer GMLNO, quem tangat recta AL in puncto L, à quo ducatur diameter LBO quæ angulum ALB rectum constituet; ducatur quoque recta BH ipsi AL parallela, sive ad LB perpendicularis, ita ut anguli recti ALB, LBH sint alternatim oppositi, & recta BH occurrat circumferentiæ FH in puncto H, & jungatur recta AH secans BL in puncto V hæc AH determinabit portionem circuli FH quæ ad propositum nostrum utilis erit, sed & eadem AH tanget ovalem describendam in puncto V, & ratio BV ad VH erit ratio refractionis ut BE ad EF, sicuti & LV ad VA. Jam constructio ovalis per puncta talis erit.

Sumpto in arcu FH quocunque puncto I, ducatur recta AI, in qua tale reperiatur punctum X, ut ductâ rectâ BX, ratio hujus BX ad XI sit ratio refractionis ut BE ad EF, sive ut BV ad VH; sic enim punctum X erit in ipsa ovali. Et quia in eadem recta AI aliud reperiri potest punctum Y, ad quod si ducatur recta BY, erit quoque BY ad YI in eadem ratione refractionis: tale punctum Y ad eandem ovalem adhuc pertinebit. Quoniam autem recta AI ducta est utcunque, si multæ ducantur eodem modo ad quotlibet puncta in arcu FH assumpta, habebuntur simili constructione in singulis ex illis rectis, duo puncta ad ovalem pertinentia. Inventis ergo hac ratione quocunque punctis per quæ ipsa ovalis transire debet, describetur illa ut describi solent multæ lineæ curvæ per quotlibet puncta inventa per quæ linea illa transire debet.

Porrò, ex tali constructione methodus non inelegans  
*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

X

deduci potest quâ ipsa ovalis motu aliquo continuo describeretur, nec machina ad talem descriptionem requisita, quamquam satis composita, admodum difficilis esset, nec unico modo perficeretur, immò forsan innumeris: at verò hæc ad organicam potius pertinent, nos autem de locis geometricis hîc agimus.

Patet ergo talem ovalem locum esse ad rectas in ratione data existentes; siquidem BE ad EF, BX ad XI, BY ad YI, BV ad VH, &c. sunt semper in eadem ratione, nempe in ratione refractionis à denso ad rarum.

At phrasi geometricâ sic loquemur. Expositâ quâcunque rectâ AB indefinitâ, signatisque in ea duobus punctis A, B, ac descripto centro A & intervallo AF majori quàm AB, circulo FIH, ductâque ad ejus circumferentiam quâcunque rectâ AI quæ sic secetur in X, ut ratio rectæ BX ad XI data sit, sed minoris inæqualitatis, erit punctum X ad lineam quampiam alicujus generis, quod nec ad rectas nec ad conicas pertinet, & tamen ad Dioptricam utile esse poterit.

Quomodò autem, & quando ejusmodi ovalis Dioptricæ inserviet, sic declarabimus. Ad hoc sanè duæ conditiones præcipuæ requiruntur. Prima est, ut ratio data BX ad XI sit ratio refractionis à denso ad rarum inter duo corpora diaphana per quæ radius opticus sive species visibilis transire debet. Secunda, ut datis duobus punctis A, B, semidiameter AF non sit cujuscunque longitudinis, sed illa major quidem sit quàm AB, at minor quàm ea recta ad quam AB habet rationem refractionis à denso ad rarum, sequàm BE ad EF; ut sic postquàm factum fuerit ut FE ad EB, ita FA ad BG, ipsa BG minor sit quàm AB; nam his conditionibus aut altera earum deficientibus, describeretur quidem aliqua linea curva, sed quæ ad Dioptricam inutilis esset: cùm autem aderunt illæ conditiones, tunc usus illius in Dioptrica talis erit.

Dux quidem sunt partes ejusmodi curvæ. Prior ac præcipua est ea que existit circa verticem C usque ad duo puncta contactus V, 7; posterior est reliqua circa alterum verticem E usque ad eosdem contactus: sed hæc posterior pars inutilis est, prior verò facit ut existente corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolito, putà vitro cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat; radii omnes à puncto A procedentes, atque in superficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in punctum B; atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in A: quâ ratione primo casui particulari ex quatuor præmissis factum est satis. Sic, si radius incidentiæ in raro sit AY, radius refractionis in denso erit YB; atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit BY, erit radius refractionis in raro YA.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore sive vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra densum dirigebantur versùs punctum B, inciduntque in superficiem VC7, sic refringuntur, ut intra rarum divergant, tanquam si à puncto A progrediantur. Atque è contrario, radii omnes qui intra rarum ad punctum A convergebant inciduntque in eandem superficiem, sic refringuntur intra densum, ut divergant tanquam si à puncto B progrediantur. Sic radio incidentiæ existente LV, MZ, fiet radius refractionis VH, Z5; & è contrario, existente radio incidentiæ HV, 5Z, fiet radius refractionis VL, ZM; hoc autem pacto satisfecimus quarto ex quatuor casibus particularibus.

Alio modo, nec minus eleganti, describi potest ejusmodi ovalis per puncta, beneficio circuli GMLNO su-

periùs descripti. Ducatur enim ab ejus centro B ad illius circumferentiam ex utraque parte, quæcunque diameter LBO, in qua producta, si opus sit, inveniatur tale punctum V, ut ducta recta AV sit ad VL in ratione refractionis, sed à raro ad densum; (in priori constructione, BX ad XI habebat eandem rationem, sed inversam, quippe à denso ad rarum) sic enim rursus punctum V erit ad eandem ovalem. Simili modo, si in eadem diametro LBO producta si opus sit, inveniatur punctum aliud 4, ita ut ducta recta A 4 sit ad 4 O in eadem ratione refractionis à raro ad densum ut AV ad VL, sive ut FE ad EB, erit punctum 4 ad ovalem. Quòd si ducantur aliæ quotcunque diametri per centrum B, sed diversæ à diametro LBO, putà MB 12, &c. habebuntur simili constructione unaquaque duo puncta, putà Z, 11, &c. ac per omnia illa puncta ducetur ovalis.

Nec admodum difficile erit invenire ex tali constructione motum aliquem continuum qui ipsam ovalem uno tractu perficiat; quod rursus ad Organicam pertinet.

Mirum autem est quanta in præmissa ovali locorum geometricorum seges, nec verò qualiumcunque, sed talium qui inter elegantissimos annumerari possint & debeant. Labet ergo ex amplissima illa messe spicas aliquas selectiores metere, ex quibus geometræ de tota judicium ferre possint.

In prima ergo constructione diximus BX esse ad XI in ratione refractionis à denso ad rarum. Quòd si ergo, ducta utcunque semidiametro AI, quærat in ea punctum X quod ad ovalem esse debet: manifestum est in triangulo BXI (intellige ductam esse rectam BI) dari basim BI, angulum I, & rationem laterum BX, XI. Quia etiam infinitæ sunt semi-diametri, putà A 35, AH, &c. manifestum est quoque infinita esse talia triangula B 10 35, BVH, &c. in quibus omnibus basis data est una

tum angulis qui sunt ad puncta 35, H, &c. & ratione laterum, quæ semper est ratio refractionis à denso ad rarum. Jam ergo eò deducta est quæstio, ut omnium illorum triangulorum inveniuntur vertices X, 10, V, &c. Et quidem tale problema vulgare est: at in praxi proposita, si constructio illius toties repetenda esset quot sunt triangula sive quot sunt inveniendæ puncta per quæ ovalis ducenda sit, id sanè & tædiosum esset, & errori valdè obnoxium. Huic ergo difficultati pulcherrimè occurret geometria, exhibendo nobis locos quosdam, nempe circulorum circumferentias quæ brevissimo compendio dabunt puncta quæsitæ. Sed quoniam loci illi ex vulgari constructione problematis deducuntur, operæ præmium erit ipsam explicare; pendet autem illa ex loco quinti exempli præmissi, hoc modo.

Propositâ basi BI cujusvis ex triangulis, putà BXI, cujus vertex X inveniendus sit; secetur ipsa BI in T, ita ut IT ad TB sit quemadmodum FE ad EB, hoc est in ratione refractionis, ita tamen ut BT sit minor terminus, quandoquidem latus BX debet esse minus quàm XI, atque in eadem ratione. Tum productâ rectâ IB ultra B usque in 42, fiat I 42 ad 42 B in eadem ratione, seceturque bifariam recta T 42 in Q; ac centro Q, intervallo autem QT, vel Q 42, describatur circulus TXY 42, qui secabit rectam AI, dabitque in ea punctum X quæsitum: sed & idem circulus dabit in eadem AI punctum Y: erunt ergo illa puncta vertices duorum triangulorum BXI, BYI, quorum latera erunt in ratione proposita refractionis, ut quidem BX ad XI, ita BY ad YI, & utraque ratio est ut BE ad EF, sive ut BT ad TI.

Quòd si super omnibus basibus datis B 35, BH &c. fiat similis constructio; habebuntur hæc vulgari constructione vertices omnium triangulorum. Patet autem in unaquaque ex illis constructionibus dari centrum unum quale

est centrum Q, & duo intervalla qualia sunt QT, Q<sub>42</sub>, ad describendos tot circulos, quot sunt bases datæ, sive quot sunt centra.

Sed, quod mirum permultis videri possit, omnia illa centra existunt in una eademque quadam circuli circumferentia, qualis est RQK, quæ fecat bifariam axem EC in K; & centrum illius P existit in eodem axe producto ultra E, sic ut ratio FB ad BK eadem sit cum ratione semidiametri AF ad semidiametrum KP; unde respectu duorum circularum FH, RK, quorum centra sunt A, P, punctum B ad utrumque ex istis circulis est similiter positum: ita ut si per punctum illud B ducatur recta quæcunque IBQ, arcus IF, QK, qui ad ipsos circulos pertinent, sint similes, ut si unus illorum sit 30. grad. exempli gratia, erit & alter 30. grad. Similiter si ducatur alia recta HBR, erunt arcus HF, RK similes, & punctum R erit centrum respectu basis BH, ad inveniendum verticem V trianguli BVH in recta AH; atque ita de reliquis. Verùm in hac recta AH hoc speciale est ( quia ipsa tangit ovalem ) quodd circulus centro R descriptus, exhibeat in ipsa unicum duntaxat punctum V in quo circulus ille tangit tantùm rectam ipsam AH, non autem fecat, sicuti secant suas rectas reliqui circuli quorum centra sunt in arcu RK, à puncto R ad K.

Manifestum est ergo circumferentiam RQK centro P descriptam, esse locum ad centra infinitorum aliorum circularum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum: hæc ergo circumferentia dicatur primus centrorum locus; dabitur enim alius, ut infra patebit; dicetur etiam aliquando circulus RQK primus centrorum circulus.

Præterea, sicuti in basi BI inventum est supra punctum T; sic in unaquaque alia basi putà B<sub>35</sub>, BH &c. reperiri potest punctum ipsi T analogum; erunt ergo infi-

ita talia puncta, sicuti numero infinitæ sunt tales bases: at illa omnia existunt in una eademque circuli circumferentia ET 24 8, quæ ovalem tanget in vertice E; centrum autem illius erit punctum 13 in recta EA inter B & A: eritque ut FB ad BE, ita semidiameter FA ad semidiametrum E 13: quo pacto rursus punctum B ad utrumque circulum FIH, ET 8, similiter positum erit. Sicuti autem ad inveniendum punctum X verticem trianguli BXI nisi sumus intervallo QT à centro Q ad punctum T in basi BI; sic ad inveniendum punctum 10 verticem trianguli B 10 35, utemur intervallo 44 r à centro 44 in circulo RQK, ad punctum r in circulo ET 8.

Pater igitur circumferentiam ET 8 centro 13 descriptam, esse locum ad infinita intervalla infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum. Hæc ergo circumferentia dicatur primus intervallorum locus, dabitur enim statim alius, dicetur etiam aliquando circulus ET 24 8, primus intervallorum circulus.

Rursus, quemadmodum in eadem basi BI producta ultra B, inventum est punctum 42; sic in unaquaque alia basi reperietur punctum ipsi 42 analogum: ac infinita illa puncta existunt in una eademque circuli circumferentia 15 46 42 C quæ ovalem tanget in vertice C; centrum autem ipsius circumferentiæ erit 27 in axe CE producto ultra E; sed in præmissa figura centrum illud 27 nimis remotum esset à reliquis, unde non potuit in ea signari: atque ut suprà, punctum B respectu hujus circuli, similiter positum est ut respectu circuli FIH; quia ut recta FB ad rectam BC, ita est semidiameter AF ad semidiametrum hujus circuli C 27. Quoniam etiam hic circulus terminat intervallum Q 42 æquale intervallo QT, & intervallum 44 46 æquale intervallo 44 r, & sic de reliquis; dicetur idem, secundus intervallorum

circulus; & circumferentia illius, secundus intervallorum locus.

Huc usque ergo habemus quatuor circulos, quorum respectu punctum B similiter positum reperitur, nempe FIH qui primus omnium est; KQR qui primus est centrorum circulus; ET 8 qui primus est intervallorum circulus; & C 42 46 qui intervallorum secundus est. Atque etiamsi punctum B nullius ex ipsis quatuor circulis centrum existat; tamen quia ipsum in unoquoque similiter positum est, fit ut omnis recta quæ per B ducta circulos omnes illos secat, abscindat ab omnibus quatuor circumferentiis, arcus similes ad axem CE productum utrinque si opus fuerit, terminatos. Sic recta ITBQ<sub>42</sub> abscindit quatuor arcus, IF, TE, QK, & 42 C omnes inter se similes, atque ita de cæteris.

Cur autem fiat ut in uno ex istis circulis centrum P sit ad unas partes puncti communis B; in alio verò centrum 13 sit ad alteras; nulla alia est causa quàm quòd vertices ipsorum circulorum sunt ad diversas partes ejusdem puncti B: sed minima quæque persequi in exemplis, non vacat: hæc enim facile supplebit vel mediocris geometra.

Suprà dedimus duas nostræ ovalis constructiones per puncta, quarum prior utebatur ciculo FIH ad determinandas triangulorum bases BI, BH, &c. Posterior verò utebatur ciculo GMLNO ad determinandas aliorum triangulorum bases, putà basim AM trianguli AZM; basim AL trianguli AVL; basim AO trianguli A4 O, &c.

Itaque circumferentia prioris horum duorum circulorum FIH dici potest primus basium locus; & circulus dicetur primus basium circulus.

Eodem jure circumferentia posterioris circuli GMLNO dicetur secundus basium locus; & circulus, secundus basium circulus.

Quæcumque

Quæcunque autem diximus de primo centrorum loco, ac de primo & secundo intervallorum, referuntur omnia ad primam constructionem; sicuti & primus basium locus. At si ad secundam constructionem respiciamus, ad quam pertinet secundus basium locus GMLNO; tunc respectu illius constructionis dabitur secundus centrorum locus hoc modo.

Primus intervallorum locus ET 24 8 secatur axem EC productum inter C & A, in puncto 8. & idem locus tangit rectam AL in puncto 17; sicuti ex constructione secundus basium locus eandem AL tangit in L; secetur bifariam recta C 8 in puncto 9; tum centro P (hoc enim commune est centrum tam primi quàm secundi centrorum circuli) intervallo autem P 9, describatur circulus 9 18, qui eandem rectam AL productam ultra L tanget in 18; hic ergo erit secundus centrorum circulus, & circumferentia illius erit quoque secundus centrorum locus; quomodo autem centra secundæ constructionis in tali loco accipiantur, postea declarabimus. Sed & secundus intervallorum locus 15 42 C tangit eandem rectam AL supra punctum 18 in puncto 19; eritque recta 18 19 æqualis rectæ 18 17, propterea quòd recta 9 8 æqualis est rectæ 9 C.

Quòd autem tres circuli, nempe secundus centrorum, & ambo intervallorum, tangant rectam eandem AL productam quantum satis, id vi geometriæ deducitur ex constructione illorum, atque ex eo quòd secundus basium circulus eandem tangat ex constructione; sed demonstratio, ut elegantissima est, ita & longissima: nos ergo ipsam cum plurimis aliis relinquimus.

Quoniam itaque quatuor illi circuli, secundus basium, secundus centrorum, & ambo intervallorum, eandem rectam tangunt, habentque omnes centra sua in eadem recta AB producta quantum satis; atque huic rectæ AB occurrit

ipsa tangens AL in puncto A; sequitur tale punctum A respectu omnium quatuor illorum circulatorum, esse similiter positum. Sed & in omnibus quatuor, erunt distantia à puncto A usque ad illorum vertices 8, G, 9, C, semidiametris illorum proportionales: erit quippe recta A 8 ad rectam AG ut semidiameter 13 8 ad semidiametrum BG. Et ut recta A 8 ad rectam A 9, ita semidiameter 13 8 ad semidiametrum P 9: atque ita de reliquis.

Unde si per punctum illud A ducatur quaecunque recta quæ circulos illos omnes secet, auferet hæc ab omnibus similes arcus circumferentiarum, à recta AB usque ad puncta sectionum extensos; puta arcus 8 20, G 23, 9 21, & C 22, inter rectas AB, AV &c.

Dicamus verò nunc quâ ratione secundæ constructionis nostræ ovalis centra in circumferentia 15 9 18, quæ secundus centrorum locus est, accipiantur. Ad hoc autem ducatur à centro B ad secundum basium locum GML, quævis semidiameter BL, quæ producta perficiat integram diametrum LBO ut supra; ducaturque tam AL, quàm AO, quarum utraque basis erit, illa quidem trianguli AVL, hæc autem trianguli A 4 O, quorum vertices quærentur: illi ergo vertices, beneficio talis secundi centrorum loci, sic reperientur. Prima basis AL occurrit illi secundo centrorum loco in puncto 18; & eadem occurrit primo intervallorum loco in puncto 17; secundo autem, in puncto 19: sumetur ergo pro centro punctum 18, pro intervallo, 18 17, vel 18 19, (æqualia enim sunt illa ut supra notavimus) tale enim intervallum dabit in semidiametro BL, punctum V quæsitum. Sed & hoc speciale est huic puncto V, quòd ducta AV tangat ovalem in ipso V, eò quòd centrum 18 est punctum contactus rectæ AL & secundi loci centrorum. Similiter, si altera basis AO producat quousque illa

ex altera parte versùs O, occurrat tam secundo centro-  
rum loco in puncto 26, quàm ambobus intervallorum,  
in punctis 24, & 25, dabit illa centrum aliud 26, &  
duo intervalla æqualia 26 24, & 26 25; quorum il-  
lud quod erit 26 24, terminabitur in primo intervallo-  
rum loco; (centrum 26, & alterum intervalli punctum  
25, in nostra figura, nimis longè distarent à puncto A)  
tali ergo centro, ac tali intervallo, inveniemus in se-  
midiametro BO, punctum quæsitum 4 in ovali.

Simili modo, si in secundo basium circulo, ducatur  
diameter M B 12; huic convenient duæ bases, AM, &  
A 12, pro triangulis AZM, A 11 12; (finge triangula  
illa esse absoluta, quod vitandæ confusionis gratiâ hîc  
factum non est) ac unaquæque ex illis basibus secabit  
tam secundum locum centrorum, quàm utrumque in-  
tervallorum; dabitque in illo quidem centrum, in his  
verò, intervallum, cujus beneficio, in utraque semidia-  
metro BM, B 12, invenietur punctum Z, vel 11, quæ-  
situm.

In hac verò secunda constructione unicum centrum,  
putà 18 dat in ovali unicum punctum putà V; quod idem  
de omnibus aliis verum est; cùm è contrario, in prima  
constructione unicum centrum Q dederit duo puncta X  
& Y.

Neque verò prætereundum est quomodo talium lo-  
corum beneficio, & centra, & intervalla, ac denique  
puncta ad ovalem pertinentia facillimè inveniuntur.  
Quod sanè in prima ex duabus præmissis constructioni-  
bus præstitisse sufficiet: hinc enim, quâ ratione eadem  
methodus ad secundam constructionem accommodari  
possit, illicò patebit. Quæcunque autem circa tale ar-  
gumentum dicturi sumus, praxim respiciunt, quæ hoc  
modo expeditissima, & certissima reddi potest.

Descriptis ergo secundùm præscriptas leges sex cir-  
Y ij

## 172 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

culis sive sex locis ut suprà, duobus quidem basium, duobus centrorum, & duobus intervallorum: assumatur in primo loco basium, quodvis punctum I inter F & H (ultrà enim inutile fore suprà notatum est) & jungatur recta AI, in ea enim reperiri debent duo puncta X, Y, ad ovalem pertinentia: tum arcui FI sumantur duo alii arcus similes, alter KQ in primo centrorum loco, alter ET in primo loco intervallorum: ac sumpto intervallo QT, & pede circini manente in centro Q, notentur altero pede mobili duo puncta X, Y, in recta AI, ut propositum est.

Verùm, inquiet aliquis, possuntne promptè ac expedite haberi arcus similes in diversis iisque inæqualibus circulis? Possunt sanè, nec uno modo; sed hic omnium facillimus jure videri possit. Duc quamcunque basium BH (extrema ad extremum punctum H pertinens, in hac prima constructione, reliquis præstat, in secunda constructione, nihil refert) quæ producta quantum factis, dabit in primo loco centrorum arcum KR; ac in primo intervallorum, arcum ES, qui inter se, & ipsi FH similes erunt. Dividantur omnes illi tres arcus singuli in quocunque partes æquales, ita tamen ut partes unius sint quoque numero æquales partibus alterius: putà, dividatur unusquisque primùm bifariam, deinde quælibet pars rursùm bifariam, atque ita continuè quantum quis voluerit. Hoc enim pacto, puncta arcus FH terminabunt semidiametros AI, AH, &c. Puncta autem prædictis ordine correspondentia in arcu KR, dabunt centra Q, R &c. ac tandem puncta eodem ordine sumpta in arcu ES, terminabunt intervalla. Cætera sunt facilia, nec est cur in iis immoremur.

Expeditis ut suprà, quæ ad primum & quartum ex casibus particularibus refractionum pertinebant, superest nunc ut reliquis duobus, secundo scilicet & tertio,

satisfaciamus : nempe ut explicemus rationem componendi loci qui duobus illis casibus inserviat. Sed antequàm ad rem ipsam veniamus, lubet hîc aliquantisper immorari circa quatuor præcipua puncta figuræ præcedentis, duo nempe focorum A, B, & duo verticum C, E: ex tali enim consideratione magis elucescet analogia quæ inter casus jam expeditos, & eos de quibus agendum superest, intercedit; quæ quidem analogia ad eorundem casuum figuras extenditur, habetque aliquid simile ei analogiæ quæ in doctrina conica reperitur inter hyperbolam & ellipsum.

*Vide Figuram*

*pag. 159.*

Statuamus primum ex illis quatuor punctis, duo B, & C, esse immobilia, eademque remanere in eo statu in quò hucusque constituta sunt: at punctum A (quod primum ac præcipuum est) mobile esse, idemque diversas positiones successivè ad arbitrium obtinere, ac tandem quartum E eatenus mobile esse, quatenus necessitas geometrica id exigeret: existant tamen omnia quatuor in una eademque recta linea AB, quæ ad hoc negotium, utrinque indefinitè producat.

Ergo, respectu puncti B, vel ipsum punctum A erit versùs C, vel versùs E. Et siquidem illud sit versùs C; vel erit intra figuram inter B, C; vel illud erit in vertice C; vel idem erit extra figuram ultra C, ut in figura præmissa; sed ita ut ab ipso puncto C longissimè, immò infinitè distare possit. Rursùs, si respectu puncti B, punctum A sit versùs E; vel illud A erit inter puncta B, E intra figuram; vel illud erit in vertice E; vel idem erit extra figuram ultra E, sic ut ab ipso puncto E longissimè, immò infinitè distare possit. Tandemque illud idem punctum A considerari potest tanquam si puncto B congruat; ita ut ambo simul unicum punctum efficiant.

Incipiamus ab hoc ultimo statu quo punctum A puncto B congruat.

*L. Statum*

to B congruit : tunc verò loco ovalis CVE 7 habebimus circulum, cujus centrum erit idem punctum commune A vel B, & intervallum sive semidiameter BC, cui æqualis erit BE ; unde punctum E vi geometricâ ; tantum distat à puncto B quantum C ab eodem B. Duo loci basium describentur circa idem centrum B vel A secundum præscriptas leges in præcedenti constructione ; ex duobus locis centrorum, alter, nempe primus coalescet in unicum punctum B, alter erit circumferentia ejusdem circuli CVE 7 qui loco ovalis succedet : tandemque ipsa eadem circuli CVE 7 circumferentia referet duos reliquos locos intervallorum. Sed omnia ad Dioptricam erunt planè inutilia.

II. Status.

Esto deinde punctum A intra ovalem inter B & C ; ac tunc fiet figura ovalis in qua præcipuus vertex C propior erit præcipuo foco A quàm vertex E foco B ; attamen distantia BE minor erit quàm BC ; atque ita excessus rectæ AE supra rectam AC major erit quàm excessus rectæ BC supra rectam BE ; ac duorum illorum excessuum ratio erit ipsa ratio refractionis. Sex loci, nempe duo basium, duo centrorum, & duo intervallorum, non aliter invenientur quàm in præcedenti figura, sed illi paulò aliter erunt dispositi, quod tamen nullius momenti est ; quia hæc omnia ut priùs, ad Dioptricam sunt inutilia.

III. Status.

Esto jam punctum A in præcipuo vertice C : quo pacto fiet ovalis quàm acutissima esse potest versùs ipsum C, versùs E autem, quàm obtusissima : siquidem, dum focus A procedit à B ad C, ipsa ovalis in vertice C fit semper acutior ; in E autem, obtusior, quousque ipse focus A pervenerit in C, à quo procedendo extra ovalem, vertex C fit minùs acutus, E verò minùs obtusus. At hoc in statu foci primarii A in præcipuo vertice C constituti, ratio axis CE ad excessum quo recta BC superat rectam

ram BE, est ipsa ratio refractionis. Primus locus basium, primus centrorum, & primus intervallorum inveniuntur ut in superiori constructione factum est, inter quos ille qui primus est intervallorum transit etiam per C vel A; quo pacto idem cum transeat per extrema axis C, & E, tangit ovalem in ambobus illis punctis, & centrum illius est in medio axis ejusdem in K. Secundus locus basium, secundus centrorum, & secundus intervallorum omnes transeunt per idem punctum C vel A, sed centris differunt: illa tamen, qui hæc ovalis ad Dioptricam nihil confert; relinquenda judicavimus.

Existat nunc focus A extra ovalem, ultra verticem C, non tamen infinitè; tunc autem omnia se habebunt prorsus ut in præmissa figura; ita tamen ut, quò major erit ratio rectæ AB ad rectam BC, eò magis ovalis ipsa ad figuram veræ ellipsis conicæ accedat, neque tamen unquam vera ellipsis fiat. Ac in illa, portio circa præcipuum verticem C ad Dioptricam utilis est, ut in descriptione figuræ præmissæ notavimus. IV. Status.

Abeat nunc punctum A in infinitum ultra C, qui status nobilissimus est, præbet enim veram ellipsim conicam, ac prorsus eam quæ undecimo exemplo exposita est, quamque ibidem ad Dioptricam pertinere monuimus, cum scilicet ratio axis AH ad distantiam focorum BM est ipsa ratio refractionis. Hic verò omnes sex loci basium, centrorum, & intervallorum abeunt in lineas rectas: sed ex illis, secundus basium, & secundus centrorum infinitè distant à præcipuo vertice, qui in figura ejusdem exempli erit A; reliqui quatuor transeunt per puncta quæ ibidem sunt C, H, A, & centrum ellipsis, suntque illi omnes quatuor ad axem ejusdem ellipsis perpendiculares. Quoniam autem à puncto illo qui præcipuus vertex est & infinitè distat, duci debent rectæ: sciendum est ipsas duci debere axi ellipsis V. Status.

*Vide Figuram  
pag. 149.*

parallelas. Cætera faciliè intelligentur ab eo qui doctrinæ Infiniti in Geometria assuevit.

Similiter, si præcipuus focus A infinitè distet ab altero foco B, ex altera parte versùs secundum verticem E, idem omninò accidet, quod jamjam diximus, cum idem infinitè distaret versùs C; nam ex doctrina infiniti, idem est distare infinitè versùs C, ac distare infinitè ad contrarias partes versùs E: quod sanè illis qui tali doctrinæ minimè assuefacti sunt mirum videri solet, & plerisque absolute impossibile.

Apparet ergo ex suprà dictis, id quod hucusque la-  
tuisse opinamur, nempe in ellipsi conica, quatenùs il-  
la ad Dioptricam referri potest, tres intelligi debere  
focos, duos scilicet internos, & unum externum qui  
infinitè distet à quovis ex duobus verticibus. Unum di-  
cimus externum, non duos, etiamsi cuius doctrinæ infi-  
niti imperito, ille minimè unus, sed duo infinitè à se  
invicem distantes videri possint. Ille enim quandiu in  
distantia finita à foco B distat, ut suprà, unicus fuit  
A; postquàm autem abiit in infinitum versùs C, idem  
eodem modo se habet, ac si uno saltu transilierit ad  
alteram partem versùs E, paratus regredi ab illa par-  
te versùs E secundùm rectam lineam N F E B, usque  
ad B unde moveri cœperat; immò, sive versùs C, sive  
versùs E infinitè distare ipse intelligatur, perinde est,  
quod ad constructionem pertinet: quæcunque enim rec-  
ta ab eo duci intelligetur, illa axi CE semper existet pa-  
rallela.

Supereft nunc ut ipsum focum A consideremus ab infi-  
nita distantia versùs E regredientem usque ad B secun-  
dùm rectam NFEB, hic enim status dabit locos illos qui  
duobus reliquis particularibus casibus refractionum sa-  
tisfacient. De his agemus postea, sed priùs operæpræ-  
tium fuerit statuere puncta A & C fixa, B verò mobile  
ad

ad arbitrium; at E rursus eatenus mobile tantum, quatenus vis geometriæ id postulabit. Neque enim hujus speculationis fructus minor futurus est quam præcedentis cum qua sanè multa habet communia, sed multa etiam planè diversa, cum scilicet punctum B in infinitum abibit.

Itaque vel puncta immobilia A & C sunt simul, vel illa à se invicem sejuncta sunt. Si simul sint, vel punctum mobile B eisdem congruit, ita ut tres simul existant, vel idem B ab ipsis A, C, distat; idque vel secundum distantiam finitam, vel infinitam.

Si tria puncta A, B, C simul existant, tum quartum *VI. Status.* E cum iisdem existet, evanescetque ipsa ovalis, quæ in idem punctum coalescet, atque unà cum ea omnes sex loci: estque status hic prorsus inutilis.

Si puncta AC simul existant, B autem ab iis utcunque distet, sed finitâ distantia, habemus tertium statum *VII. Status.* ex iis qui suprâ expositi sunt, cum punctum A mobile erat, idemque in C constituebatur.

Si punctis A, C, invicem constitutis, punctum B ab *VIII. Status.* utroque infinitè distet ex utraque parte (perinde enim est ex doctrina infiniti, ut suprâ,) tunc nulla habebitur ovalis, sed loco illius succedent duæ rectæ secantes se invicem in puncto communi AC, ita ut recta AB angulum ab illis contentum bifariam dividat; eritque ille angulus tantus quantus debetur asymptotis hyperbolæ illius de qua undecimo exemplo dictum est, posito quòd ratio axis ad focorum distantiam sit ipsa ratio refractionis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad rectam AB perpendiculares, sed ex iis tres primi infinitè distant, sicuti & punctum B; tres secundi in unicam coalescunt rectam quæ per punctum commune AC transit: at illa omnia ad Dioptricam sunt inutilia.

Jam puncta AC, quæcunque distantia finitâ à se invicem  
*Rec. de l'Acad, Tome VI,* Z

178 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

cem distent, & punctum mobile B incipiat ab A, moveaturque ad C, & ultra usque in infinitum.

**IX. Status.** Existente ergo puncto mobili B in A, loco ovalis habebimus circulum, cujus centrum erit punctum illud commune A vel B, intervallum AC. Et hic status supra expositus est, fuitque primus.

**X. Status.** Existente autem ipso puncto mobili B inter A & C, multi habebuntur status inter se diversi, de quibus agemus postea; illi enim sunt qui reliquis duobus casibus particularibus refractionum satisfaciunt.

**XI. Status.** Existente jam ipso B in C, evanescet ovalis, eademque in idem punctum B vel C coalescet; quod jam supra notatum est, atque inter inutilia repositum: is status sextus fuit.

**XII. Status.** Existente deinde puncto B ultra C, ita ut C sit inter duo B, A, habebimus statum figuræ præmissæ in qua tamdiu immorati sumus: & idem status supra fuit quartus.

**XIII. Status.** Existente porrò puncto B ultra C vel ultra A in distantia infinita ex quacunque parte (perinde enim est, ut jam non semel notavimus) tunc statum nobilissimum habebimus: abibit enim ovalis nostra in hyperbolam illam de qua undecimo exemplo dictum est, cum scilicet ratio axis ad focorum distantiam est ipsa ratio refractionis. Ac hujus quidem hyperbolæ vertex præcipuus erit, hoc loco, in C; alter minus præcipuus E abibit in infinitum: quæ autem huic hyperbolæ opponitur alia hyperbola, respectu præcipui foci A erit inutilis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad axem infinite productum perpendiculares; sed ex iis duo primi infinite distant versus C, nempe primus basium, & primus centrorum; primus intervallorum transit per verticem hyperbolæ inutilis, secundus intervallorum transit per præcipuum verticem C. Secundus centrorum transit per centrum hyperbolarum; secundus autem basium transit per illud

punctum in quo recta AC sic dividitur, ut tota AC ad portionem ipsi puncto C conterminam, habeat rationem refractionis à raro à densum.

Apparet ergo idem hyperbolæ conicæ accidere quod de ellipfi supra dictum est, quodque antiquos latuisse opinamur; nempe, præter duos focos vulgares de quibus in conicis agitur, quique distantia finitâ à centro ultra vertices removentur, dari tertium qui ex utraque parte infinitè distet ab eodem centro, quatenus scilicet ipsa hyperbola ad Dioptricam refertur, &c. ut supra de ellipfi.

Tandem verò punctum mobile B ab infinita distantia ultra A regrediatur versùs ipsum A à quo moveri incœpit, ita ut idem A existat inter C & B; ac tunc habebimus secundum statum illum inutilem de quo dictum est dum punctum A mobile statuebatur, atque illud existeret intra ovalem inter B & C; nec est quod hîc ultra addamus.

XIV. Status

Quòd si quærat aliquis quinam hujusce speculationis circa mobilia puncta fructus futurus sit, præcipuè circa locorum doctrinam ad quam pertinere debent hæc nostra exempla: sciat ille primùm quidem in universum, tali, vel aliâ simili consideratione apprimè detegi naturam figurarum omnium; cùm scilicet ritè notaverimus quid ex diverso situ præcipuorum punctorum ad illas pertinentium, eisdem figuris accidere possit, unde illæ immutari queant.

At in specie, quòd ad locos attinet, meminerit vix aliter detegi posse quomodo illi invertantur, aut in figuras genere, aut specie diversas permutentur; quemadmodum supra vidimus locum illum de quo hoc duodecimo exemplo agimus, nunc esse ovalem aliquam, nunc circulum, & aliquando ellipsem, aut etiam hyperbolam: quod adhuc in iis quæ statim dicturi sumus, non minùs evidentè apparebit.

XV. STAINS.

Præterimus suprà eum statum in quo punctum B mobile procedens ab A, progreditur, non quidem versùs C, sed ad contrarias partes usque in infinitam distantiam, quia status ille ad Dioptricam inutilis est: quando enim ipsum existit in distantia finita, habetur secundus status in quo A statuitur inter B & C, de quo suprà; cum autem idem existit in distantia infinita, habetur hyperbola inutilis, cujus focus internus est A, vertex autem inter A & C; ac illud C est vertex hyperbolæ oppositæ, quæ sanè opposita poterit esse utilis, sed illa eadem prorsus erit cum ea de qua duodecimo statu locuti sumus.

Nihil etiam diximus de puncto C infinite distante; quia tunc evanescit omnis figura, atque unà cum ea, quæcunque puncta ad eandem pertinebant: quæ omnia in infinitum abeunt.

In universum ergo, res eò reducitur ut vel A focus infinite distet, ac tunc habetur ellipsis utilis; vel B focus infinite distet, ac tunc habetur hyperbola, cujus altera ex oppositis utilis est, altera inutilis; vel ex tribus punctis A, C, B medium sit C, ac tunc habetur status utilis, cui intervitt figura præmissa; vel A & C simul existant, vel A sit medius inter C & B, vel idem A sit in B, qui tres status sunt inutiles, sicuti & inutiles sunt duo illi in quibus vel tria puncta A, C, B, vel, quod eodem recidit, duo B & C simul existunt; vel tandem punctum B medium sit inter C & A: unde septem oriuntur status nondum expediti, atque omnes utiles, de quibus agendum nobis superest, quia illi omnes & soli duobus reliquis particularibus refractionum casibus satisficient. Nec multum in singulis immorabimur; illi enim omnia habent præmissis analoga, scilicet focos, vertices, & locos basium, centrorum, & intervallorum; sed illa omnia positione differunt, atque ex diversa

illa positione, figuræ diversissimæ evadunt.

Primus ergo status ex illis septem reliquis esto ille in quo duo puncta B, & E media sunt inter focos C, A; ac vertex secundus E medius quoque est inter B & A; cui statui inservit figura sequens: in qua quatuor puncta C, B, E, D, se habent prorsus ut antea; ita scilicet ut rectæ CD, BE, sint æquales; sicuti & CB, DE; sitque tota CE ad mediam BD in ratione refractionis à raro ad densum. At quia præmissæ conditiones omnes non solum huic statui, sed etiam tribus sequentibus conveniunt, idèd huic primo illud peculiare esto quod ratio rectæ AE ad rectam EB sit major ipsâ ratione refractionis à raro ad densum. In secundo autem statu ponetur hæc ratio AE ad EB esse præcisè ratio refractionis à raro ad densum. In tertio è contrario, ponetur AE esse ad EB in ratione minori quàm sit ratio refractionis à raro ad densum, non minori tamen quàm à denso ad rarum. In quarto, ponetur ratio AE ad EB esse minor ratione refractionis à denso ad rarum, quousque punctum A pervenerit ad verticem E. In quinto, ponetur punctum illud A esse in E. In sexto, ponetur idem A esse inter B & E intra ovalem; ita tamen ut ratio totius BE ad portionem EA major sit quàm ratio refractionis à raro ad densum. In septimo denique statu, ponetur ipsum A rursus intra ovalem inter B & E, sed propiùs ad idem B; ita ut ratio BE ad EA non major sit ratione refractionis à raro ad densum, sed vel eidem æqualis, vel ipsâ minor.

Etsi verò figuræ omnes, quæ singulis ex istis casibus propriæ sunt, differant tam inter se, quàm ab ea quam primam suprâ exposuimus; ipsæ tamen plurima habent inter se similia: immò illæ omnes sic delineari ac notis distingui possunt, ut una eademque explicatio omnibus inserviat, nec alia distinctio abhibenda sit, quàm circa positionem aliquot punctorum, quorum quæ in

una figura priora fuere, eadem in alia figura fient posteriora, & quæ erant media, fient extrema, aut omnino quid simile. Talis sanè est præmissa explicatio, quæ etiamsi primæ figuræ usqueadè quadret, ut illi soli propria esse appareat, & reverà soli illi propria sit strictè loquendo; eadem tamen, paucis tantùm mutatis, omnibus inservire potest. Id verò in hac secunda figura clarè intueri licet; sed ad hoc monendus est lector, ut quotiescumque in dicta aliqua inciderit quæ secundæ illi figuræ quadrare non videbuntur, tum ipse huc recurrat ad ea quæ statim dicturi sumus, quæque continent præcipua capita in quibus discrepant ejusmodi figuræ.

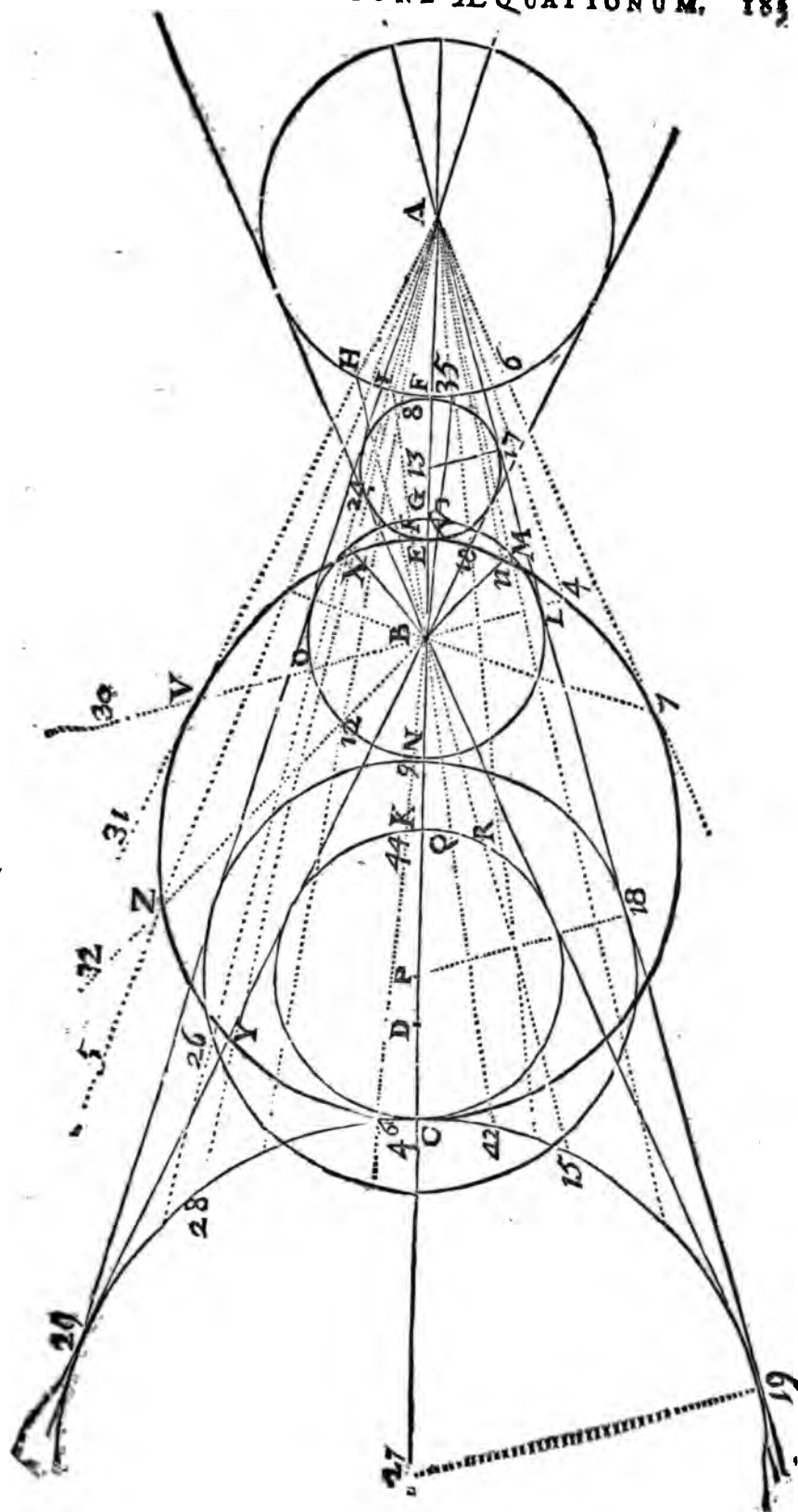
Ac primùm, in hac secunda figura, quia punctum A est ultra tria puncta C, B, E, versùs E, quod contrarium est primæ figuræ: fit ut punctum G sit quoque ad easdem partes ipsius E, cùm in prima esset versùs C.

Secundò, anguli recti ALB, LBH, in secunda figura sunt interiores & ad easdem partes respectu parallelarum AL, BH, qui tamen in prima erant alterni.

Tertiò, in secunda figura, intervallum AF minus est quàm AB, quod in prima majus erat.

Quartò, cujuscunque longitudinis reperiaturs intervallum AF in secunda figura, semper ovalis utilis erit, quod in prima verum non erat.

Quintò, hæc secunda figura satisfacit secundo & tertio casui ex quatuor illis particularibus casibus refractionum ad perspicilla pertinentium qui suprà expositi sunt, cùm prima satisfaceret primo & quarto, ut dictum est. Nam in eadem secunda, posito corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolitò, putà vitro, cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat: radii omnes ad punctum A tendentes, atque in superficiem VC7 incidentes, refringuntur præcisè in puncto



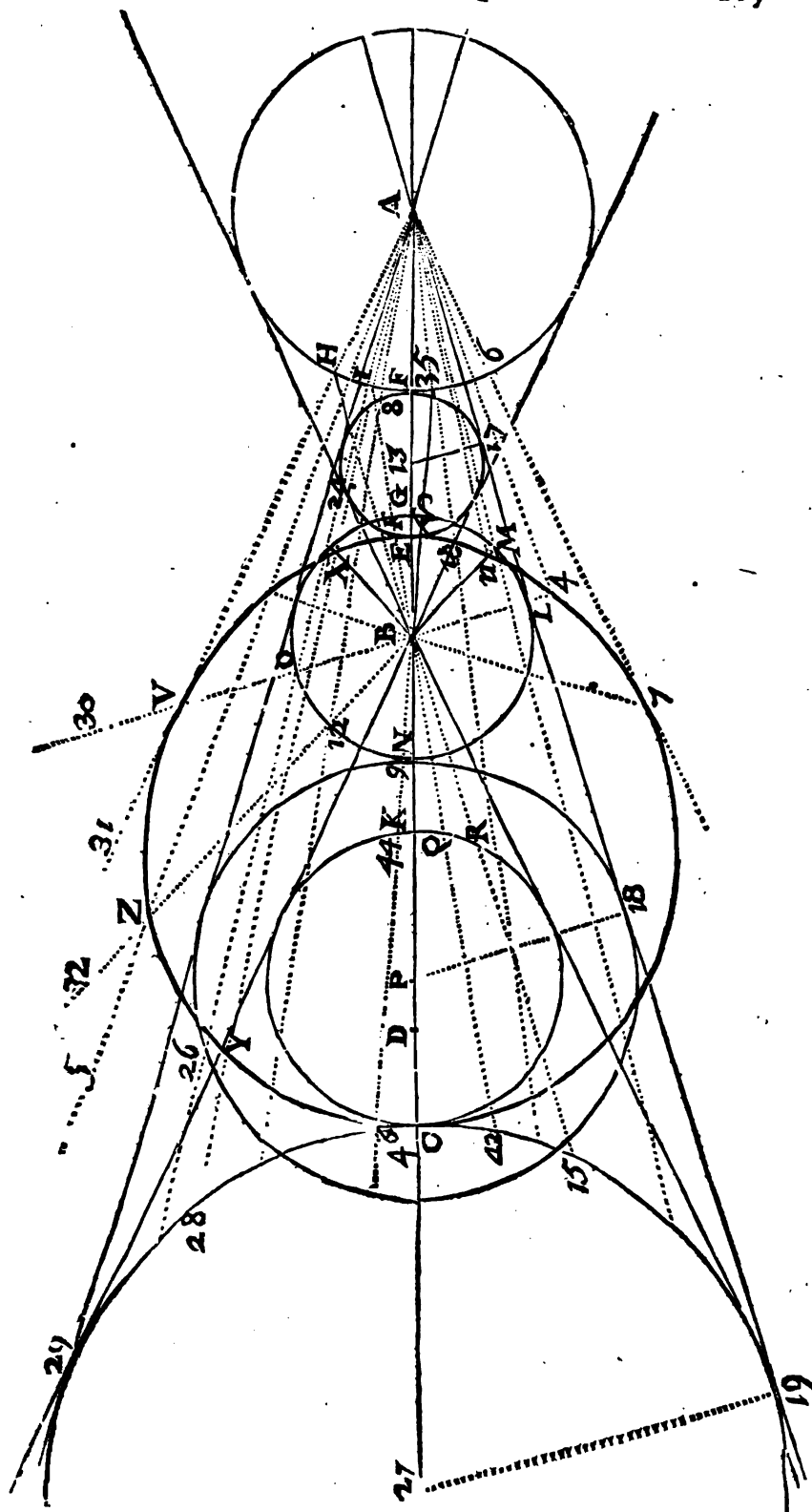
#### 184 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONVM

tum B; hic verò est terius ex iisdem quatuor casibus; Atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes, post refractionem divergunt extra ovalem tanquam si omnes ex puncto A progressi sint: & hic est secundus casus. Sic, si radius incidentiæ in raro sit 28 Y tendens versùs A, radius refractionis in denso erit YB: atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit BY, erit radius refractionis in raro Y 28.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius five aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore seu vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra rarum procedunt à puncto A, inciduntque in superficiem VC7, sic refringuntur, ut intra densum divergant tanquam si à puncto B progressi sint. Atque è contrario, radii omnes in denso ad punctum B convergentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes, sic refringuntur, ut intra rarum ad punctum A convergant. Sic radio incidentiæ existente AZ intra rarum, fiet in denso radius refractionis Z 32 qui à puncto B procedit; & è contrario, existente intra densum radio incidentiæ 32 Z qui ad punctum B tendit, fiet intra rarum radius refractionis ZA. Quo pacto rursùs alio modo satisfactum est secundo ac tertio ex prædictis quatuor casibus particularibus.

Sextò, centra circulorum illorum sex quos suprà assignavimus pro locis centrorum, intervallorum, & basium, multò aliter in hac secunda figura, quàm in prima, disposita sunt. Nam in hac secunda figura centrum P quod ad locos centrorum pertinet, reperitur inter vertices C, E, quod tamen in prima figura erat ultra. Item, in eadem secunda figura, centrum 27. quod ad secundum locum intervallorum pertinet, abit ultra verticem C, quod tamen in prima abibat ultra E.

Septimò,



Septimò, quoniam ambo foci A, B in hac secunda figura reperiuntur extra utrumque circulum intervallorum; fit ut tam ambæ rectæ quæ à puncto A procedentes, tangunt secundum locum basium GLNO, quàm ambæ quæ à puncto B procedentes, tangunt primum locum basium FIH: tam hæ tangentes, inquam, quàm illæ, tangant quoque utrumque circulum intervallorum ET 24 8, & 19 C 29, si scilicet tangentes illæ quantum satis producantur.

Cæteras differentias quivis facillè percipiet: ideò nos ultra progrediemur.

Assignavimus supra differentiam quæ intercedit inter septem illos status in quibus punctum B reperitur inter A & C, diximusque primum in hoc à cæteris distingui, quòd in eo ratio AE exterioris ad BE interiorem (intellige respectu ovalis) major sit ratione refractionis à raro à densum. Huic autem statui omninò accommodata est secunda figura præmissa, in qua ideò primus locus intervallorum ET 24 8 totus extra ovalem existit versùs A & punctum F inter duo A & E constituitur.

Jam secundus status nobilissimus est, in quo scilicet ratio AE ad EB est ipsa ratio refractionis à raro ad densum, unde puncta A & F in unum idemque punctum coalescunt.

In tali autem statu, loco ovalis habemus circulum qui utilis est eodem prorsùs modo quo utilis est præmissa ovalis secundæ figuræ, putà portio illa quæ est circa verticem C usque ad contactus V, 7, quæ portio satisfacit secundo & tertio ex quatuor casibus particularibus refractionum, ut diximus in quinto ex septem capitibus, quibus præmissa secunda figura à prima discrepat. Nec quicquam circa talem explicationem immutandum est, ita ut illa conveniat tam ovali secundæ figuræ, quàm circulo tertiæ sequentis, in qua, etiamsi puncta B, C,

D, E eodem prorsus modo disposita sint quo in 2<sup>a</sup> figura, tamen, propter rationem refractionum à raro ad densum quæ intercedit inter rectas AE, EB, fit ut sex loci de quibus toties suprâ dictum est, singuli amissâ suâ extensione seu magnitudine, in puncta coaluerint; primus scilicet locus basium in punctum A; secundus basium in punctum B; ambo centrorum in punctum K, quod est centrum propositi circuli CVE7; primus intervallorum in punctum E; ac tandem secundus intervallorum in punctum C.

At verò, quòd proprietas adeò insignis circulo CVE7 conveniat; posito scilicet quòd tam ratio AE ad EB, quàm ratio diametri EC ad BD sit ratio refractionis à raro ad densum, ac proinde etiam ratio AC ad CB; (hæc enim tertia ex duabus prioribus sequitur) quòd, inquam, quivis radius 36 33 à raro quod est extra circulum, putà ab aëre incidens in densum quod est intra circulum, putà in vitrum, in punctum 33 quod est in circumferentia, si dirigatur ad punctum A, non tamen ad idem A perveniat, sed frangatur in ingressu 33, ac fractus abeat in B, illud ex sequenti demonstratione manifestò patebit: quæ quidem demonstratio circulo specialis est, nec prolixa; universalis enim, quæ tam ovalibus quàm circulo conveniret, longiori indigeret apparatu, ut jam suprâ monuimus.

Ad hoc autem tria notanda sunt. Primum, quoniam est ut AE ad EB, ita AC ad CB, & quatuor puncta A, B, C, E sunt in eadem recta linea, estque A extra circulum, B intra, at EC est diameter; fit necessariò ut eductâ ex B puncto rectâ perpendiculari ad diametrum EC, atque eâ utrinque productâ usque ad circumferentiam, puncta in quibus ipsa circumferentiæ occurrit, sint ipsa V & 7, in quibus rectæ AV, A7 ipsum circulum tangunt, ita ut ductâ rectâ KV, angulus KVA rectus

188 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

fit, atque ita, ratio rectæ AV ad VB five KV ad KB, rationi rectæ AK ad KV sit similis: atque earum rationum conversæ similes, scilicet BV ad VA, BK ad KV, & VK ad AK. Secundum, propter eandem rationem AE ad EB, & AC ad CB, fit ut duæ quæcunque rectæ A 33, B 33 quæ ad idem punctum 33 in circumferentia ut-  
cunque assumptum ducuntur, in eadem quoque ratione existant, putà ut AE ad EB, five ut AC ad CB: nam circumferentiæ EV 33 C 7 talem locum exhibet, qualem quinto loco explicuimus, atque idè etiam eadem est ratio AV ad VB, & AZ ad ZB, & AY ad YB, &c. unde, quoniam ponitur ratio AE ad EB esse ratio refractionis à raro ad densum, erit quoque AV ad VB, A 33 ad 33 B, &c. ratio refractionis à raro ad densum. Tertium, ductâ rectâ 5 33 34 quæ circum tangat in puncto 33, tum rectâ 33 K ad centrum K, erit angulus K 33 34 rectus; ac eodem modo fient refractiones radiorum in punctum 33 incidentium à circuli circumferentia E 33 C, quo à linea recta tangente 5 33 34; siquidem in universum, linea quæcunque curva, & recta ipsam tangens, easdem efficiunt refractiones radiorum in punctum contactus incidentium. Positâ ergo curvâ C 33 E, vel rectâ 5 33 34 pro dioptrica, five pro superficie refractiva, & existente puncto 33 puncto incidentiæ, erit recta 33 K perpendicularis ad dioptricam.

His præmissis, centro 33 intervallo quocunque, putà 33 B, describatur circulus secans perpendicularem 33 K in puncto 49, rectam 33 A in puncto 38, & rectam 33 34 in puncto 34; eritque arcus 49 34 quadrans; & rectæ 33 49, 33 B, 33 38, & 33 34 erunt æquales. Sed, quod præcipuum est, demissis in rectam 33 49 productam si sit opus, perpendicularibus A 40, B 41, & 38 39: ostendendum est 38 39 ad B 41 esse in ratione refractionis; putà ut AE ad EB; hoc enim demonstrato, manifestum erit



ex lege refractionum quam undecimo exemplo suprà exposuimus, fore ut, si radius incidentiæ sit 36 33 38 A, tunc radius refractionis sit 33 B, & vicissim si radius incidentiæ sit B 33, tunc radius refractionis sit 33 36: hoc autem sic demonstramus.

Ratio perpendicularis 38 39 ad perpendicularem B 41, componitur ex rationibus 38 39 ad A 40, & A 40 ad B 41; est autem 38 39 ad A 40, ut 38 33 ad 33 A, sive ut B 33 ad 33 A; & ut A 40 ad B 41, ita AK ad KB: quare ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus B 33 ad 33 A, & AK ad KB: ut autem B 33 ad 33 A, ita BV ad VA, ut jam secundo loco notavimus, & ita BK ad KV; ideoque ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus AK ad KB, & BK ad KV, quæ ambæ constituunt rationem AK ad KV. Ut ergo 38 39 ad B 41, ita AK ad KV, sive AV ad VB, sive AE ad EB, quæ est ratio refractionis, ut propositum est. Cumque idem accadat omnibus punctis, quæ in arcu VC7 assumi possunt, patet arcum illum esse locum ad propositas refractiones, quarum ratio erit ut AE ad EB; quæ sanè per insignis est circuli proprietas huc usque, ut existimamus ignota.

Hoc pacto iis satisfecimus quæ initio duodecimi exempli ostendere polliciti sumus, nempe casum tertium ex tribus universalibus Dioptricæ casibus de quibus undecimo exemplo dictum est, aliquando ad superficiem sphæricam pertinere, sed multo magis universaliter ad alias superficies (nempe ovals de quibus suprà) quas antiquis notas fuisse nullibi apparet. Patet enim hunc secundum statum qui ad circulum, atque adeo ad sphæram pertinet, esse specialissimum, alios verò qui ad ovals, esse universaliores.

Porro, qui supersunt status quinque, ad alias ovals pertinent, quas figurâ exhibere supervacaneum hoc loco duximus; neque enim ex prædictis difficile fuerit

easdem satis accuratè describere. Quamobrem, postquam ea breviter exposuerimus in quibus illæ à prædictis præcipuè differunt, tunc ulteriùs exemplis parcemus, duodecim præmissis contenti, quæ sanè perillustria sunt; atque ita ad id quod initio propositum est, accedemus.

Tertius ergo status ad ovalem quandam pertinet, in qua sex loci basium, centrorum & intervallorum describuntur. Sed quia punctum A reperitur inter E & F, hinc fit ut quinque ex illis locis, integri intra ovalem constituentur, nempe præter primum basium, reliqui omnes; primus enim basium, vel totus est extra ovalem, vel aliquid tantùm habet intrà; punctum N est versùs E; punctum G est versùs K; punctum 8 est versùs B, atque ita pleraque ex punctis contrario modo disposita sunt quo in secunda figura: est tamen ovalis ipsa tota, ut omnes de quibus hucusque egimus, ad easdem partes cava, quod tribus proximis sequentibus statibus non accidit. Cùmque AE est ad EB in ratione refractionis à raro ad densum, tunc ipsa ovalis ultima est earum quæ ad easdem partes totæ cavæ existunt; ulteriùs enim, puncto A propius accedente ad E, tunc partes ovalis vertici E hinc inde vicinæ, incipiunt esse ad exteriores partes cavæ, ut mox declarabimus.

Quartus status omnia habet tertio similia, nisi quòd circà verticem E, partes aliquæ ipsius ovalis quæ ad talem statum pertinet, nempe partes illæ quæ circa verticem E proximè disponuntur, exteriùs versùs A cavæ sunt. At post aliquàm distantiam hinc inde ab ipso vertice E, eadem ovalis incipit rursùs ad interiores partes versùs centrum K esse cava, nec postea mutatur talis cavitas interior, sed durat per totum ovalis reliquum circa præcipuum verticem C; & quò minor est ratio AE ad EB, eò major est cavitas circa verticem E. Quo pacto ejusmodi ovalis aliquo modo accedit ad formam cor-

dis alicujus animalis, cum hac tamen differentia, ut pars quæ est circa E cava sit exteriùs, non ad formam anguli ut cor, sed ad formam quasi rotundam; ut si singas ovalem aliquam quæ priùs tota interiùs cava erat, ictu quodam alterius ovalis fortioris circa verticem E inflicti, retusam esse ad interiores partes, ut communiter accidit corporibus rotundis debilioribus, dum in firmiora rotunda illidunt. In hac verò ovali, sicuti & in omnibus præmissis, semper reperitur aliqua pars circa verticem E, quæ ad Dioptricam inutilis est, nempe usque ad ea puncta V, 7, in quibus ductæ rectæ AV, A 7, ipsam ovalem tangunt, ut jam suprà sæpiùs dictum est.

Quintus status dum A est in E; quòd ad sex locos basium, centrorum, & intervallorum attinet, non admodùm differt à tertio & quarto statu præmissis. Ejus verò ovalis circa verticem E exteriùs cava est quàm maximè. Cæterùm eadem integra ad Dioptricam utilis esse potest, estque prima earum quæ nullas partes habent inutiles; quæ proprietas duobus reliquis statibus etiam convenit. In hoc etiam statu hoc speciale est circa locos, quòd quatuor ex illis, nempe duo loci intervallorum, secundus centrorum, & secundus basium tangant se invicem, atque etiam ovalem in ipso vertice E; unde quæ ab eodem E vel A excitatur perpendicularis ad axem CE, eosdem quatuor locos tangit in ipso eodem E.

In sexto statu, ovalis adhuc cava est circa verticem E, sed minùs quàm in quinto in quo illa circa idem punctum E maximè cava erat; & quò major est ratio rectæ BE ad EA, eò minùs cava est eadem ovalis. In ea sex loci reperiuntur, sed ita ut quatuor de quibus in quinto statu dictum est, extra ovalem excurrant ultra E; unde evanescit tangens AL, quam tamen refert analogicè ea recta quæ ex puncto A excitatur perpendiculariter ad axem CE;

CE; exhibet enim illa punctum L ubi secatur secundum locum basium; punctum 17, ubi secatur primum intervallorum; punctum 18, ubi secatur secundum centrorum; & punctum 19, ubi secatur secundum intervallorum, quod in septimo casu verum quoque reperitur. Sed & pro diversis rationibus refractionum in diversis mediis, atque etiam pro diversis rationibus BE ad EA, accidere potest ut evanescat tangens B 24, quæ ex puncto Beducta tangebatur quatuor locos, nempe duos intervallorum, primum centrorum, & primum basium, quam tamen analogicè hoc casu referet ea recta quæ ex puncto B ad axem CE perpendiculariter excitabitur, eo modo quo de tangente AL jamjam dictum est, quod quivis Geometra facillè intelliget.

At ubicunque existat hoc punctum B, sive extra quatuor illos locos; sive in vertice eorumdem, dum vertex ille est in B; sive intra ipsos, ut in hoc statu accidere potest: semper punctum B ad prædictos quatuor locos similiter positum est; ita ut duæ quæcunque rectæ ab eodem Beductæ, & vel tangentes vel secantes quatuor illos circulos, auferant ab illis totidem arcus similes, si sumantur ut sibi respondent. Eadem est ratio puncti A respectu suorum quatuor locorum, de quibus hoc & quinto statu dictum est. Unde inferre licet tam punctum A ad duos locos intervallorum similiter positum esse, quàm punctum B ad eosdem, etiamsi positio puncti B positioni puncti A minimè similis existat.

Tandem, in septimo statu sex loci non longè aliter se habent quàm in sexto; sed ovalis circa verticem E non ampliùs cava est ad partes exteriores: verùm illa tota interiùs cava existit, nec quicquam in ea speciale reperitur quod sit alicujus momenti.

De tangentibus & rectis ad prædictas omnes ovals perpendicularibus, multa dici possent elegantissima,

quæque hanc materiam, atque adeo totam Geometriam maximè illustrarent : verùm illa idèd præterimus, quia propriè non sunt hujus loci. Hoc tamen monebimus : In omni statu in quo puncta A & C sunt ad easdem partes respectu puncti B, sive ipsa A, C sint simul, sive illorum alterum propiùs accedat ad B, quodcunque illud sit, vel A, vel C : tunc omnem rectam quæ ad ovalem perpendicularis erit, occurrere axi ejusdem ovalis in puncto aliquo quod erit inter ipsum B & alterum ex prædictis duobus A, C, quod eidem B propinquius erit. At verò in omni statu in quo punctum B existet inter prædicta A, C, tunc omnem rectam ejusmodi quæ ad ovalem perpendicularis existet, vel axi parallelam esse, vel eidem occurrere ultra puncta A, B, nullam autem vel in ipsis punctis, vel inter ipsa. Sed de his satis : nunc ad propositam nobis materiam de locis ad analysim aptis accedamus.

*De locorum divisione in diversos gradus.*

**M**ULTI sunt locorum gradus, immò infiniti ; alii enim simplicissimi sunt ; alii autem magis ac magis compositi, idque in infinitum. Eorum tamen omnium Antiqui duo in universum genera statuerunt.

Primum genus est eorum qui solis constant lineis, sive illæ rectæ sint, sive curvæ. Ac de his sanè intelligi debet omnis sermo in quo de locis simpliciter agitur, nullo addito vocabulo quod contrarium indicet.

Secundum genus est eorum qui superficiebus constant, vocanturque illi communiter loci ad superficiem ; quorum quidam per se subsistunt, nec ab aliis oriuntur ; quidam contrà oriuntur sive generantur à locis simplicibus primi generis, dum illi circa axes aliquos conversi, superficies aliquas producant.

Rursus, primum genus locorum in tres classes communiter distribui solet, nimirum in locos planos, in locos solidos, & in locos lineares.

Loci plani duo sunt tantum, nempe linea recta, & circuli circumferentia.

Loci solidi tres sunt, nempe parabola, hyperbola, & ellipsis; qui ex sectione superficiei conicæ & plani alicujus quod nec per verticem coni transeat, nec basi sit parallelum, nec subcontrariè positum, originem ducunt.

Loci lineares sunt omnes aliæ quæcunque lineæ præter rectam, circuli circumferentiam, & conicas sectiones, putà conchoides omnis generis, spirales, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, & infinitæ aliæ, quæ tales sunt & tam multiplices, ut etiam nomine careant. Neque enim aliter comparari debent loci lineares cum locis planis aut cum solidis, quàm genus polygonorum quæ laterum multitudine triangulum aut quadrangulum excedunt, cum ipso triangulo aut quadrangulo. Nam, quemadmodum sub tali nomine polygoni continentur pentagonum, hexagonum, eptagonum, octogonum, &c. quæ omnes figuræ non minùs inter se differunt & specie & proprietatibus quàm triangulum à quadrangulo & utrumque horum à cæteris: sic sub uno nomine linearium infiniti loci continentur qui non minùs differunt inter se naturâ & proprietatibus, quàm linea recta aut circuli circumferentia à parabola, hyperbola, aut ellipsi; aut quàm hæc quinque lineæ ab iisdem locis linearibus, seu à conchoidibus, spiralibus, cissoïdibus, &c.

At verò non omnes loci lineares ad analysim nostram apti sunt, sed illi tantum quos ad æquationes analyticas revocari posse contingit. Quid sit autem locum aliquem ad æquationem revocare, postea declarabimus, & exemplis illustrabimus. Nunc autem, quoniam à multis quæ-

ri solet an ejusmodi loci tam plani quàm solidi & lineares, omnes in universum geometrici dici debeant, extiterunt non pauci inter Geometras vulgò habiti, qui præter locos planos, nullos alios admittebant, ac cæteros tanquam à Geometria prorsùs alienos respuebant, ita ut problemata quodvis insolutum existimarent, quod beneficio locorum planorum solvi non posset, quantumcumque idem aut per locos solidos aut per lineares solveretur: ideò non abs re fuerit hoc loco disquirere quid geometricum, quid verò minimè geometricum censeri debeat, positis tamen iis omnibus quæ vulgò in elementis omnibus geometricis admitti solent.

Sanè in universum, quæstio est de nomine, ut manifestò patet: tamen, quia multi præ arrogancia, ea omnia damnare consueverunt quæ ignorant, ne scilicet re quadam alicujus pretii privari videantur, ac sic multa respuunt quæ à doctis communiter recipiuntur.

Ut talium sic leviter sub apposis suis modo falsis nominibus res bonas damnantium malitiam quivis veritatis studiosus vitare possit, lubet rem ipsam à fundamentis resumere, quibus intellectis, facile erit cuicunque propositionem aliquam geometricè aut secùs solutam, temerè affirmanti aut neganti respondere, atque ipsius affirmationem aut negationem falsam, levem, aut temerariam esse, ex ipsius scientiæ principiis evidenter demonstrare.

Ac primùm omnium convenit propositiones arithmeticas à geometricis distinguere; siquidem illas arithmetice, hoc est per operationes sive regulas arithmeticas; has verò geometricè, hoc est per locos geometricos, solvi consentaneum est, ut debito seu legitimo modo solutæ dici debeant. Neque tamen negamus utrasque operam sibi mutuam præbere, ac sibi invicem auxiliari, idque multipliciter; quod ideò non impedit ne arith-

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 197

metica arithmetice, geometrica geometricè tractentur.

Arithmetica ergo propositiones solvuntur vel addendo, vel subtrahendo, vel multiplicando, vel dividendo, vel radices extrahendo; atque id tam in numeris rationalibus seu unitati commensurabilibus, quàm in numeris irrationalibus seu surdis, vel unitati incommensurabilibus; & sive in numeris simplicibus, sive in compositis ejusmodi operationes instituantur, juvante ubicunque Geometria si opus fuerit, cujus præcipuæ partes sunt distinguere atque imperare ubi & quando addere, aut subtrahere, ubi & quando multiplicare aut dividere, ubi & quando radices extrahere conveniat.

Quo in opere non multum refert utrum solutio in minimis aut in simplicissimis numeris exhibeatur, vel in majoribus aut magis compositis; sæpè enim accidit ut vel multiplicationes, vel divisiones, vel radicum extractions adeò intricatæ sint, ut ipsas explicare nimis arduum opus sit, nec quodpiam tantæ operæ præmium satisfiduum existat.

Neque tamen diffitendum est ea ingenia longè aliis prælucere, quibus datum est quæstiones quascunque simplicissimo modo solvere: at illa bonis suis gaudeant, modò ne aliorum solutiones minùs simplices tanquam spurias ac minimè recipiendas, nimis arroganter damnare contendat.

In exemplo. Proponatur in numeris hæc æquatio cubica numericè solvenda. B <sup>solidum</sup> — C <sup>plano</sup> in A — A. <sup>cube</sup> ∞ O, & B <sup>f</sup>. sit numerus infrà positus, nempe apotome sicuti & C P. 729.

$$\begin{array}{l} B^f. \int -t \quad 142884 \\ \text{Apotome:} \left\{ \begin{array}{l} \text{---} 79 \quad 17962705800 \end{array} \right. \text{---} 729 A \text{---} A; \infty O. \end{array}$$

Ponamus autem quemdam vel nescire, vel non admodum curare methodum quâ ejusmodi æquatio brevissi-

mo aut simplicissimo modo solvi queat, sed tantum id curare, quo modo illa utcunque solvatur.

Equidem ex constitutione illius, patet ipsam irregularem esse, nec de tribus lateribus explicabilem, verum de unico tantum, eodemque supra: hoc ex nostro opere de æquationum cubicarum recognitione, cap. 3. prop. 6. patebit.

At illius constitutio ex Vieta elegantissime deducitur. Sunt quippe quatuor quidam numeri continue proportionales, quorum qui continetur sub extremis vel mediis est tertia pars numeri radicum, sive tertia pars affectionis sub A; qui numerus in nostro exemplo est C. 729, & ejus tertia pars est 243: differentia autem extremorum est ille numerus qui oritur diviso B<sup>l</sup>. per eandem tertiam partem numeri C. Quia ergo numerus ille solidus est hæc apotome  $142884 - \sqrt{17962705800}$ ; eo per 243 diviso, oritur hæc alia apotome  $588 - \sqrt{304200}$ , quæ ideo est differentia numerorum extremorum. Est autem numerus quæsitus A in eadem serie, differentia numerorum mediorum. Eò itaque res reducitur, ut ex quatuor numeris continue proportionalibus, datâ differentiâ extremorum, nempe  $588 - \sqrt{304200}$ ; dato etiam producto ex mediis vel ex extremis 243, inveniatur differentia mediorum. Et extremi quidem facili viâ habentur ex data differentia ipsorum, & producto eorundem; nam semidifferentia est  $294 - \sqrt{76050}$ , & hujus semidifferentiæ quadratum est hæc apotome  $162486 - \sqrt{26293831200}$ , quod additum ipsi producto 243, dat hanc aliam apotomen  $162729 - \sqrt{26293831200}$ , cujus radix quadrata est dimidia summa extremorum  $788200 - 273$ . Huic apotome si addas semidifferentiam extremorum prædictam, nempe  $294 - \sqrt{76050}$ , fit major extremorum quæsitum, hoc nempe binomium  $7450 - 21$ . Quod si ex eadem apotome  $788200 -$

173, seu ex dimidia summa extremorum, demas eandem semidifferentiam extremorum 294—776050, sit minor extremorum quæsitum, nempe hæc apotome 7328050—567. Hoc pacto, datis extremis, querendi sunt duo medii proportionales, ut habeatur eorum differentia quæ dabit numerum A quæsitum.

At in quatuor numeris continuè proportionalibus, hoc universale theorema est: Productus ex majori extremo in quadratum minoris extremi est cubus minoris medii. Item, productus ex minori extremo in quadratum majoris extremi est cubus majoris medii. Hac igitur regula ex datis extremis, majori quidem 7450+31, minori autem 7328050—567, dabuntur duo cubi mediorum. Nam quadratum majoris extremi est binomium 891+7793800: hoc multiplicatum per minorem extremum dat hoc aliud binomium 726572050+5103, & hic est cubus majoris medii. Simili modo, quadratum minoris extremi est hæc apotome 649539—7421857865800; hoc multiplicatum per majorem extremum dat hanc aliam apotomen 719371024450—137781, & hic est cubus minoris medii.

Inventis ergo duobus cubis numerorum mediorum, superest ut cuborum ipsorum radices extrahantur. At verò, talium cuborum alter, nempe major, est binomium: alter autem, seu minor, est apotome; quicunque ergo artem calluerit quâ ex binomiis & apotomis cubicæ radices extrahuntur, is quæstionem, si non simplicissimo modo, at certè accuratè omninò solverit; siquidem earum radicum differentia erit numerus A quæsitus, nec alio quovis modo, quamquam simpliciori, alius inveniatur numerus. Quòd si reperiatur aliquis qui talem artem ignoraverit, is postquàm cubos prædictos invenerit, ibi subsistet, ac dicet numerum quæsitum A esse differentiam radicum cubicarum talium numerorum.

exhibitorum sic  $\gamma^{\text{cub.}}$  hujus binomii  $| \gamma^9 26572050 - 5103 |$  —  $\gamma^{\text{c.}}$  hujus apotomes  $| \gamma^9 19371024450 - 137781 |$ . Et sanè ea dici poterit aliqua esse solutio, quoniam ipsa ad numeros certos ac determinatos reducta est. Adde quod plerumque accidit ut binomia aut apotomæ non habeant radices cubicas explicabiles, unde ipsarum differentia per ejusmodi radicum extractionem exhiberi non potest, quamvis illa aliquando rationalis existat; quò fit ut eâdem, vel aliâ viâ quærenda sit, vel eâ ratione quâ suprâ, per ipsos cubos irrationales exhibenda.

Verùm in proposito exemplo, radices cubicæ à perito rectè extrahi possunt, quibus exhibitis solutio longè erit elegantior; sunt enim radices illæ binomii quidem, hoc binomium  $\gamma^9 162 - 9$ ; apotomes verò hæc, apotome  $\gamma^9 1458 - 27$ . Sint ergo hi numeri duo medii quæsitæ, quorum differentia est hæc apotome  $36 - \gamma^9 648$  quæ exhibet numerum A quæsitum; quo pacto habemus hoc modo satis longo atque intricato, solutionem quæstionis propositæ: atque etiam si methodus talis solutionis simplicissima non sit, tamen numerus A inventus est simplicissimus.

Verumenimverò sagacior aliquis Analysta, multè compendiosiori viâ eandem inveniet solutionem. Is enim statim propositâ hâc eâdem æquatione cubica,

$$B^3 \left\{ \begin{array}{l} + 142884 \\ - \gamma^9 17962705800 \end{array} \right. - 729 A - A^3,$$

animadvertet illam ad minores numeros reduci posse; quandoquidem datur numerus 3, cujus quadratus 9 dividere potest CP  $\propto 729$ , ita ut ejusdem numeri 3 cubus 27 dividere quoque possit B<sup>3</sup>. 142884 —  $\gamma^9 17962705800$ ; ac divisione per quadratum oritur 81, per cubum autem oritur 5292 —  $\gamma^9 24640200$ ,

Hoc

Hoc pacto dabitur alia æquatio in minoribus numeris, nempe hæc,

$$D \left\{ \begin{array}{l} 5292 \\ - 7924640200 \end{array} \right. - F P 81 E - E^2 \propto 0.$$

Cujus æquationis radix E cùm inventa fuerit, ac per 3 prædictum multiplicata, dabitur prioris æquationis radix A quæsitæ. Est tamen hæc nova æquatio ejusdem constitutionis cum ea quæ initio proposita est; quare concludemus in ea contineri quatuor numeros continuè proportionales, ita ut numerus contentus sub extremis vel mediis sit 27 tertia pars FP, sive numeri 81; differentia verò extremorum sit hæc apotome 196—7933800; quæ oritur diviso solido D per prædictum numerum 27. Datâ autem differentiâ extremorum, & producto ab iisdem, dantur vulgari methodo iidem extremi, major nempe hoc binomium 7950—7, & minor hæc apotome 7936450—189. His datis extremis darentur cubi mediorum methodo superiùs traditâ; verùm, eidem Analystæ, quem ex sagacioribus aliquem supponimus, dabitur locus subtili sanè compendio; datur nempe cubus quidam numerus 27 per quem illorum extremorum alter dividè potest, putà minor sive 7936450—189, quâ divisione reperitur hæc apotome 7950—7; sumatur ergo talis apotome 7950—7 loco minoris extremi, majore eodem semper remanente binomio 7950—7, ut suprâ. Hac tamen lege, ut postquàm inter illos extremos duo medii inventi fuerint, tum alter illorum minori proximus multiplicetur per 9, quadratum scilicet numeri 3, cujus cubus 27 divisor fuerit minoris ipsius extremi, nempe 7936450—189: alter autem eorundem inventorum mediorum ab extremo minore diviso remotior, multiplicetur per 3 radicem ejusdem cubi 27 divisoris; hac enim duplici multiplicatione dabuntur veri duo medii inter duos extre-

## 202 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM:

mos quos ex secunda æquatione præmissa ad minimos numeros reducta deduximus, nempe inter binomium  $7^9 50 + 7$ , & apotomen  $7^9 36450 - 189$ .

Resumamus ergo duos minimos extremos ultimò inventos post divisionem per cubum 27; qui sunt  $7^9 50 + 7$ , &  $7^9 50 - 7$ , inveniamusque inter eosdem, duos medios continuè proportionales.

Rursus autem hic quiddam accidit notandum. Nam si quis per traditam suprà regulam, datis extremis, quarat cubos duorum mediorum, is inveniet tales cubos esse eosdem ipsos extremos: quod idè accidit, quia binomium & apõtome quæ ipsos extremos constituunt, iidem constant nominibus; ac prætereà quadrata ipsorum minime unitate tantum differunt, quod quoties accidit, toties duo extremi sunt cubi duorum mediorum, unusquisque scilicet illius qui sibi proximus est.

Habeantur ergo duorum illorum extremorum radices cubicæ; binomii quidem, five  $7^9 50 + 7$ , hoc binomium  $7^9 2 + 1$ : at apotomes, five  $7^9 50 - 7$ , hæc apõtome  $7^9 2 - 1$ ; atque ita tandem habebimus quatuor continuè proportionales,

$$7^9 50 + 7, | 7^9 2 + 1, | 7^9 2 - 1, | \& 7^9 50 - 7,$$

in numeris multò minoribus quàm antè. Quòd si intacto primo, ut suprà decrevimus, secundum illorum multiplicemus per radicem 3, tertium verò per ejus quadratum 9, at quartum per cubum 27, qui antè divisor extitit, habebimus quatuor illos proportionales qui ad æquationem de E superiùs expositam, pertinent, quorum primus erit in utraque serie idem  $7^9 50 + 7$ ; secundus  $7^9 18 + 3$ ; tertius  $7^9 162 - 9$ ; & tandem quartus,  $7^9 36450 - 189$ . Horum quatuor, differentia mediorum est  $12 - 7^9 72$ ; is autem est numerus E quæsitus in æquatione, qui numerus, si tandem per 3 multipli-

cetur, per eum scilicet numerum cujus beneficio deprefsa est suprâ æquatio de A, & ad æquationem de E redu-cta: dabitur numerus A quem initio quærebamus; & is erit idem qui antea 36 — 79648, sed multò breviori multòque simpliciore methodo inventus, propter quam tamen non est quòd, qui illam calluerit, nimium arroganter superbiat.

Hic quærere posset aliquis, an detur certa aliqua regula quâ dignoscamus num binomia aut apotomæ radices habeant cubicas explicabiles, & quomodo illæ eruantur.

Sciat igitur ille talem dari regulam, quam non abs re fuerit paucis indicare. Ac primùm, ponamus binomium aut apotomen propositam, esse primi vel secundi, quarti vel quinti ordinis, tum sic fiet:

Ex quadrato majoris nominis dematur quadratum minoris, ac tum si differentia reperiatur esse cubus numerus habens radicem minimè surdam, sed unitati commensurabilem, benè est, nec alia præparatione est opus: sin secus, tunc aliqua præparatione utendum est, de qua dicemus postea. Ponamus ergo prædictam differentiam habere radicem cubicam, quæ radix vocetur B planum; at majus nomen binomii aut apotomes, vocetur M solidum; minus autem vocetur N solidum: tum alterutra ex sequentibus duabus æquationibus cubicis solvatur, nempe

$$\frac{1}{4} M^3. + \frac{1}{4} B P. A - A; \propto O,$$

$$\text{vel } \frac{1}{4} N^3. - \frac{1}{4} B P. A - A; \propto O:$$

prior quidem, si binomium vel apotome primi vel quarti ordinis extiterit; posterior autem, si secundi vel quinti. Talis autem æquationis radix reperiri debet esse numerus minimè surdus, atque ideo inventu facillimus. Quòd si illa radix non reperiatur esse rationalis, seu

unitati commensurabilis, tunc certò pronuntiare licebit, binomium aut apotomen non habere radicem cubicam explicabilem. Estò ergo illa cubicæ æquationis radix numerus rationalis integer vel fractus, tunc illa priori quidem æquatione erit majus nomen, à cujus quadrato si dematur B planum, relinquetur quadratum minoris nominis, ex quibus nominibus constituetur binomium vel apotome: atque hæc vel illud erit radix cubica quæ sita. At secunda æquatione radix erit minus nomen, cujus quadrato si addatur B. planum, fiet quadratum minoris nominis; atque ab illis nominibus constitutum binomium vel apotome, erit radix cubica quæ quæritur.

Jam verò existente binomio vel apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, quadrata nominum non differant cubo numero, sed quocunque alio: tunc hac præparatione utemur. Differentia illa quæ cubus non est, vocetur  $C^a$ , ac per eandem differentiam multiplicetur utrumque propositorum nominum binomii vel apotomes cujus radix investigatur, putà  $M^f.$  &  $N^f.$ ; hac enim multiplicatione habebimus binomium aliud vel aliam apotomen ejusdem ordinis, cujus quadrata nominum cubo numero different. Atque omninò non refert quis sit multiplicator per quem multiplicentur nomina  $M^f.$  &  $N^f.$  modò quadrata nominum inde ortorum cubo numero differant; is ergo multiplicator, quicunque ille sit, vocetur  $C^a$ . sive ille sit idem qui supra, sive non; est tamen primus communiter simplicissimus.

Talis ergo binomii vel apotomes tali multiplicatione constitutæ radix cubica inveniatur ea methodo quam jamjam tradidimus mediante æquatione cubica conuenienti: tum radix inventa dividatur per  $C^a$ . hoc est per radicem cubicam  $C^a$  quæcunque sit illa radix, furda, vel rationalis; quotiens enim talis divisionis dabit radicem cubicam initio quæsitam.

Ponamus tandem propositum binomium vel apotomen, esse tertii vel sexti ordinis; atque, ut supra, majus nomen esto  $M^f$ . minus autem  $N^f$ .; &  $C^a$ . esto differentia quadratorum nominum ipsorum. Tum inveniatnr numerus aliquis  $D^a$ . qui multiplicans  $C^a$ . faciat cubum, multiplicans autem vel  $M^a$ . vel  $N^a$ . faciat quadratum: (dantur infiniti tales numeri, & facile inveniuntur) ac per  $D^f$ . hoc est per radicem quadratam numeri  $D^a$ . multiplicetur utrumque nomen  $M^f$ . &  $N^f$ .; tali enim multiplicatione orietur aliud binomium vel alia apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, cujus quadrata nominum different cubo numero; illius ergo radix cubica (si illa explicabilis sit) habebitur per præmissam regulam mediante congruenti æquatione cubica, ut dictum est: hæc ergo radix cubica divisa per  $D$ , hoc est per radicem solido-solidam; seu cubo-cubicam numeri  $D^a$ . dabit radicem cubicam binomii vel apotomes, cujus nomina sunt  $M^f$ . &  $N^f$ . , quam invenire propositum erat.

Plurima super hac re dici poterant; sed nos regulam pulcherrimam indicare duntaxat, non minutatim persequi volumus, & quæ dicta sunt sufficient Analystæ non omnino rudi ad cætera detegenda.

Nec est quòd quis dicat, hoc modo proponi obscurum per obscurius explicandum, dum inventionem radicis-cubicæ alicujus binomii vel apotomes ad resolutionem æquationis cubicæ reducimus. Quandoquidem enim talis æquationis solutio reperiri debet numerus rationalis integer vel fractus (aliàs enim, si surdus existat non erit radix binomii vel apotomes explicabilis) non aliter, nec majori difficultate solvetur æquatio illa, quàm simplex divisio absolvenda esset; quod sanè calere debet quicumque Analysim vel mediocriter coluerit. Legatur Vieta lib. de Æquationum recognitione &

emendatione, ac præcipuè capite illo quo æquatio sic transmutari potest, ut coefficientis sit quæ præscribitur; statuatur enim coefficientis unitas; tum verò solidum comparationis erit cubus aliquis suo latere auctus vel multatus: cætera plana sunt, unde nihil ultrà addemus.

Hoc exemplo satis declaravimus quid requiratur ad hoc ut problema aliquod arithmeticum arithmetice solutum dici possit: qua de re tantis operibus egerunt Vieta, Cardanus, Bombellius, Tartalia, & alii quidam illustres præteriti sæculi viri, inter quos longè excelluit ipse Vieta, dum talium problematum solutionem, non quidem singularem pro singulis problematis, sed universalem pro qualibet specie problematum, per species ad id à se inventas inquisivit.

Neque abs re fuerit Analystam monere, quæstionem omnem in numeris propositam, in qua ex datis quibusdam numeris, alius aliquis numerus quæritur secundum leges quasdam in eadem quæstione præscriptas, semper esse quæstionem singularem; atque etiamsi illa ad æquationem analyticam revocata, ad æquationes cubicas, aut ad altiores pertinere videatur: tamen non temere statim pronuntiandum esse, talem quæstionem solidam esse aut linearem, sæpissimè enim accidit, ut illa vi inductionis logicæ plana sit; dico vi inductionis logicæ, quoties scilicet solutio illius datur in numeris qui logicâ inductione initâ, necessariò reperiuntur. Ut si experiar num æquatio aliqua de unitate sit explicabilis, num de binario, num de ternario, de quaternario, quinario, senario, &c. neque enim in infinitum abit tale experimentum, quandoquidem, ex hypotesi, numeri in ipsa æquatione expressi sunt, qui radicem quæsitam intra certos ac præfinitos terminos coercent. Aut si certâ aliquâ conjecturâ deprehenderim illam, non de integro numero, sed de fracto explicabilem esse, cujus numeri

facti denominator ex recognitione ipsius æquationis innotescat: tum inductione factâ, quarum numeratorem binarium, ternarium, quaternarium, quinarium, senarium, septenarium, &c. donec illum invenero, qui experiundo satisfaciât propositæ quæstioni; neque enim rursus in infinitum abit tale experimentum. Eodem modo, si ex recognitione talis æquationisprehendero ipsam nec de integro numero nec de fracto explicari posse, sed de surdo aliquo, cujus tales ex ipsa recognitione innotescant conditiones, ut ille, quamquam surdus, inductione factâ detegi possit: tales omnes æquationes planæ censeri debent, non autem solidæ aut lineares, sub quarum specie aliquâ contineri primo intuitu apparuerunt. Ac planè talis existit præmissa æquatio cubica numerica, in qua satis jamjam immorati sumus, quæ tamen prima fronte alicui minùs perito Analystæ, solida quædam quæstio ex iis quæ insolubiles vulgò censentur, potuit apparere.

Nunc ergo ad geometriam redeamus, & quid geometricum sit, aut censeri debeat explicemus. Geometricum in universum vocamus quodcunque intelligibile est in materia geometrica, nullâ habitâ ratione sensuum externorum, putà visus, auditus, tactus, gustus, vel olfactus, nisi quatenùs illi intellectum movere possunt ad suas operationes exercendas. Verbi gratiâ, dum species visibilis circuli alicujus materialis in oculum incidens visum movet, illa ex occasione causa esse poterit, cur intellectus ab illo sensu excitatus talem figuram considerandam fuscipiat, ac multas easque insignes proprietates detegat, atque evidenter ex certis atque indubitatis principiis demonstrat. Ejusmodi igitur cognitio ab intellectu elicita, atque in ipso intellectu residens tanquam species aliqua intellectiva circa materiam geometricam, est id quod geometricum appellamus.

Quòd etiam ex iisdem lineis aut superficiebus, quædam simpliciores, quædam verò magis compositæ intellectui videantur; id etiam non impedit quin hæ & illæ æquè geometricæ dici debeant; quippe illud non ex natura talium magnitudinum, sed ex debilitate intellectus humani procedere manifestum est: ex nostra autem imperfectione rerum natura non immutatur.

Demus itaque hoc humanæ imbecillitati, quòd quæ simpliciore modo, saltem nostro respectu, solvi poterunt, eo solvi debeant; & contra talem regulam peccasse censeatur quisquis, cum simpliciore loco uti posset, ad magis compositum recurrerit. Dicemus autem paulò post de distinctione locorum in magis aut minus simplices ex constitutione Geometrarum qui nos hac in re præcesserunt, ut sic quis cuique quæstioni locus proprius sit innotescat.

Sed ut magis elucescat in hac materia locorum, nec facilitatem descriptionis, nec maiorem aut minorem simplicitatem intellectiōis alio modo attendendam esse quàm respectu imbecillitatis intellectus humani: videamus quis sit Geometriæ finis in locis ipsis constituendis. Constat autem nullum alium finem apud Geometras reperiri, nisi ut talium locorum beneficio ea detegant quæ intellectui latebant, ut quod verum est, verum esse; quod falsum est, falsum esse; quod fieri potest, fieri posse; & quo modo, & quot modis, manifestum fiat, idque semper in materia geometrica; quod tamen non impedit ne talis cognitio postea materiæ sensibili applicetur. Ac planè ejusmodi loci primò & per se quædam sunt cognoscendi instrumenta; secundariò verò, & per applicationem mechanicam, illi sunt instrumenta faciendi. Et quidem, quòd ad cognitionem, scientiam, vel intelligentiam attinet, sive illa faciliùs, sive difficiliùs acquiratur, & sive per media simplicia, sive per compo-

sita, modò talia media sint clarè ac distinctè nota, qualia sunt quæ principiis purè geometricis innituntur, ita ut ab ejusmodi principiis incipiendo, & per media ipsa progrediendo, tandem ad intelligentiam illam deveniamus: certum est eandem fore perfectam, nec in genere intelligentiarum aut scientiarum, perfectiorem fore aliam, quamquam facilioribus aut simplicioribus mediis acquisitam. Atque omninò una eademque intelligentia seu scientia est, sed diversis mediis acquisita; quæ media, si faciliora aut simpliciora sint, vel secùs, hoc ex debilitate intellectus humani repetendum est; aliàs enim, si perfecta esset humana intelligendi potentia, tunc vel mediis non egeremus, vel certè & principia cognitionis, & media omnia, sed & ipsam cognitionem uno intuitu, nullo prorsùs labore nullaque difficultate haberemus, nec simplicis aut compositi ulla esset ratio.

Jam verò, si ad materiam sensibilem, seu ad praxim mechanicam applicetur cognitio aliqua geometrica, ita ut inde oriatur opus aliquod externum ex tali materia constans, multò minùs media aut operandi rationem accusabimus in ipso opere jam confecto, si illud his aut illis mediis æque benè absolutum sit; nec ullo jure tali respectu quis dixerit hæc aut illa media esse respuenda tanquam erronea ac minimè legitima, sed tantùm alia aliis esse præferenda; quippe faciliora difficilioribus, & simpliciora magis compositis: quod sanè ex nostra agendi debilitate rursùs repetendum est; secus enim, positâ perfectâ agendi potentiâ, tunc agens & media & opus ipsum nullo labore consequeretur, ac proinde nec facilitatis nec difficultatis, sicuti nec simplicioris nec magis compositi ratio haberetur.

*Propositum locum geometricum ad æquationem analyticam revocare, & qui simpliciores sint loci, aut secus, explicare.*

**D**ICITUR locus aliquis geometricus ad æquationem analyticam revocari, cum ex una aliqua, vel ex pluribus ex illius proprietatibus specificis, quædam deducitur æquatio analytica, in qua una vel duæ vel tres ad summum sint magnitudines incognitæ.

Ac duplici quidem modo talis locus ad talem æquationem revocari potest. Primus modus absolutus est, alter respectivus.

Modus absolutus dicitur ille in quo unicus proponitur locus per se absolute ac nullo aliorum respectu considerandus, ita ut æquatio ex eo deducta ad ipsum præcisè pertineat, non verò ad ullum alium.

Modus respectivus ille est in quo duo communiter, aliquando etiam, sed rarò, tres vel plures loci proponuntur inter se comparandi, ut ex eorum sectione, vel tactione, vel datâ aliquâ distantia, vel omninò ex præscripta aliqua conditione, vel inter ipsos habitudine deducatur æquatio aliqua analytica quæ ad omnes istos locos simul tali respectu pertineat; ita tamen ut nihil referat si æquatio illa ad alios etiam locos pertinere possit.

Et hi quidem modi ambo admodum universales sunt, continentque sub se singuli infinitos particulares modos, non solum habita ratione multitudinis locorum geometricorum qui & genere, & specie, & numero infiniti sunt, sed etiam in unico ex talibus locis dantur plerumque innumeri tales modi, ex quorum singulis innumeræ æquationes deduci possunt; siquidem tot dabuntur modi particulares, quot dabuntur diversæ loci illius proprietates specificæ: unde numerus talium modorum

# DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 213

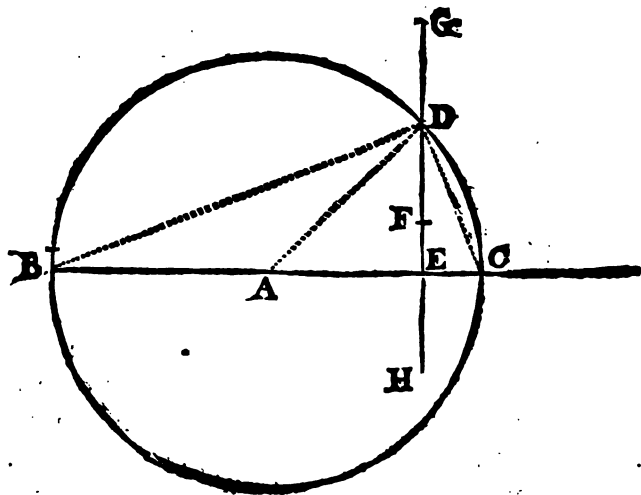
non magis finitus est, quàm artificis in indagandis proprietatibus vis & industria; sed & ex infinita locorum ipsorum complicatione, id est, sectione, tactione, &c. in numeri etiam oriuntur modi respectivi, siquidem duorum tantum diversimodè complicatorum modi nullo certo aliquo numero comprehendi possunt.

At verò, etiamsi nullus ex talibus modis ad nostrum institutum inutilis dici possit, si scilicet ad abundantiam doctrinæ respiciamus: tamen si necessitatis tantum ratio habeatur, paucissimi sufficiunt, iique non admodum intricati aut difficiles existunt.

Dicamus ergo pauca, primùm de modo absoluto, tum de respectivo, atque utrumque, selectis aliquibus exemplis ex locis nobilioribus desumptis, illustremus.

## DE CIRCULO.

**P**ROPONATUR ergo primùm circulus cujus centrum sit A, circumferentia BDC, & sit una dia-



# 114 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

metrorum BC, ad quam referre oporteat omnia circumferentiæ puncta, mediante aliqua æquatione analytica; ac fundamentum hujus relationis esto proprietas illa, quòd omnis recta, putà DE, cadens à circumferentia in diametrum ad rectos angulos, sit media proportionalis inter portiones diametri BE, EC; hæc ergo proprietas specifica dabit unum aliquem ex modis particularibus circa circumferentiam. Ex illo modo innumeræ deducuntur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

## *Prima Æquatio.*

AB esto	$b,$	Item AB esto	$b,$
DE	$a,$	DE	$a,$
DE quadratum	$a^2,$	DE quadratum	$a^2,$
BE	$e,$	CE	$e,$
EC	$2b - e,$	BE	$2b - e,$
BEC rectang.	$2be - e^2.$	BEC rectang.	$2be - e^2,$
Ergo æquatio,		Unde æquatio erit ut supra,	
$+ 2be - e^2 \propto a^2,$		$+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0,$	
vel			
$+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0.$			

Itaque propositâ lineâ curvâ BDC, atque ab eadem in aliquam rectam utrinque terminatâ BC, demissâ perpendiculari DE; si talis reperiatur æquatio qualem jam invenimus: tum pronuntiare licebit ejusmodi curvam esse circuli circumferentiam; est enim reciproca proprietas, & simpliciter converti potest quæ de illa concipitur propositio, ut satis facillè consideranti apparebit. Omnis autem recta data referre poterit  $2b$ .

Quòd si loco circumferentiæ circuli assumpta esset ellipsis; tum sub iisdem speciebus,  $2be - e^2$  fuisset ad  $a^2$

in data ratione majoris aut minoris inæqualitatis, nempe ut transversum latus ad rectum, quam rationem supponimus esse datam. Converſa etiam vera eſt.

Rurſus, ſi DE in BC incidiffet ad angulos obliquos, reliquis ut ſuprà poſitis, in omni ratione haberetur ellipſis. Sed hæc ex conicis clara ſunt.

*Secunda Æquatio.*

Iiſdem poſitis: ex DE detrahatur data EF quæ vocetur  $c$ , & DF vocetur  $i$ , atque ideò DE quadratum erit  $+c^2 + 2ci + i^2$ . Unde iiſdem veſtigiis inſiſtendo, talis erit æquatio,  $+ 2be - e^2 \propto c^2 + 2ci + i^2$ ,  
vel  $-c^2 + 2be - e^2 \propto 0$   
 $- 2ci - i^2$

Itaque ex tali vel ſimili æquatione concludemus circuli circumferentiam: immò, ſi  $+c^2 + 2ci + i^2$  vocetur una ſpecie  $a^2$ ; (ſpecies enim illa de  $i$  quadrata eſt) tunc in primam æquationem omninò incidemus, ut manifeſtum eſt. Viciffim, facile erit ex prima in hanc ſecundam devenire.

De ellipſi eadem quæ ſuprà enuntiabimus.

Hæc æquatio non eſt reciproca, unde eam in ordinem non reduximus; ſiquidem ex illa non minùs ellipſim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet: quod etiam infrà ſatis patebit.

At verò ad tales æquationes reducetur alia quæ ſequitur  $+ 2be - u^2 \propto 0$ , intelligatur enim  $u^2$  majus eſſe quàm  $e^2$  & differentia eorum vocetur  $a^2$ . Fiet ergo manifeſtò hæc æquatio  $+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0$ , & hæc eſt prima præcedentium, ex qua ad ſecundam facilè deducemur. Hic autem longitudo  $u$  æqualis erit rectæ BD, vel CD, cujus quadratum æquale eſt, vel duobus quadratis BE, DE ſimul, vel duobus CE, DE ſimul, quandoquidem ipſum  $u^2$  æquale ponitur eſſe duobus ſimul  $a^2 + e^2$ .

*Tertia Æquatio.*

Iisdem positis, eidem DE addatur in directum quævis DG; & tota EG data sit sub specie  $c$ , & DG ignota vocetur  $i$ ; atque idè DE quadratum erit  $c^2 - 2ci + i^2$ . Unde iisdem vestigiis,  $+ 2bc - c^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$ , vel per antithesim,  $-c^2 + 2bc - c^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$ , vel per antithesim,  $-c^2 + 2bc - c^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$ .

Ex tali ergo vel simili æquatione concludemus circulum.

Quòd si recta DG sit data sub specie  $c$ , & EG ignota vocetur  $i$ : tunc iisdem vestigiis in eandem prorsus æquationem incidemus. Idem accidet, si DE producatursus E in H, & vel tota DH sit  $c$ , EH autem sit  $i$ , vel è contrario, EH sit  $c$ , DH autem sit  $i$ .

Jam, vel  $c - i$ , vel  $i - c$  esto  $a$ ; quo pacto dabitur prima æquatio, ut manifestum est.

Sicut autem secta est DE in F, vel producta in G vel H: sic potuit secari vel produci CE, & vel ipsâ solâ manente DE insectâ & sine productione, vel etiam utraque tam CE quàm DE; quod satis per se atque ex præmissis clarum est. Idem de BE quàm de CE dictum esto.

*Quarta Æquatio: ex eo quòd omnes rectæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ, sint æquales.*

Iisdem positis, esto AE ignota sub specie  $y$ ; & quoniam AD seu AB est  $b$ , & DE est  $a$ , idè talis erit æquatio,  $b^2 \propto a^2 + y^2$ , sive  $b^2 - a^2 - y^2 \propto 0$ . Itaque, ex ejusmodi æquatione concludemus circulum, quia illa reciproca est.

Jam verò, ut suprâ, esto  $a$  æqualis, vel  $c + i$ , vel  $c - i$ , vel

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 217

vel  $i = c$ , prout scilicet vel EF erit  $c$ , & DF erit  $i$ ; vel EG erit  $c$ , & DG erit  $i$ ; vel DG erit  $c$ ; & EG erit  $i$ : tumque habebimus alterutram ex duabus sequentibus æquationibus  $\frac{+b^2}{-c^2} - \frac{2ci - i^2}{y^2} \propto 0$ , vel  $\frac{+b^2}{-c^2} + \frac{2ci - i^2}{y^2} \propto 0$ : ex quibus circulum quoque concludere licet, modò sub similibus speciebus proponantur; sic enim illæ sunt reciprocæ, seu specificæ.

Eodem modo hîc AE secari vel produci poterit quò suprà dictum est de ED, BE, vel CE.

Quòd si proponatur aliqua ex his tribus  $\frac{+d^2}{fi - u^2} \propto 0$ , vel  $\frac{+d^2}{+fi - u^2} \propto 0$ , vel  $\frac{-d^2}{+fi - u^2} \propto 0$ : tunc licebit illas ad alterutram ex duabus præmissis postremis reducere. Nam  $\frac{+d^2}{-c^2}$  intelligetur æquale esse  $\frac{+b^2}{-c^2}$ , vel  $\frac{-d^2}{-c^2}$  æquabimus  $\frac{+b^2}{-c^2}$ , at  $\frac{+u^2}{+y^2}$  ponemus æquale esse  $\frac{+i^2}{+y^2}$ : unde sequetur id quod propositum est.

Non sunt tamen illæ tres reciprocæ; siquidem ex illis non minùs ellipsim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet. Licebit autem quartam hanc æquationem ad primam aut ad duas sequentes reducere, posito quòd  $b = y$  sit  $e$ , ut satis patebit ei qui attendere voluerit. Et reciprocè, tres priores poterunt ad quartam reduci, posito quòd  $b = e$  sit  $y$ .

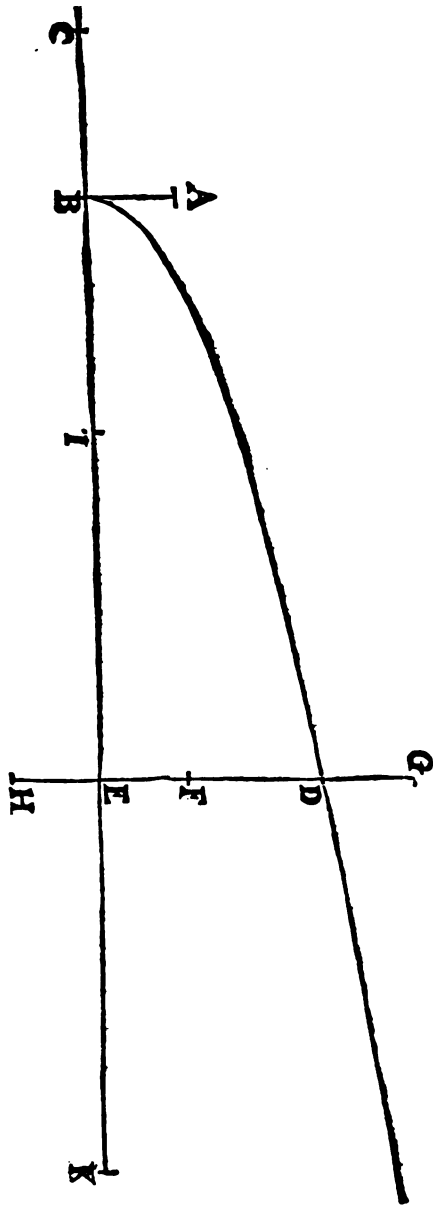
Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, sed ea præcipua sufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

DE PARABOLA.

**E**ST parabola BD, cujus latus rectum sit AB, diameter BE, sive illa sit axis, sive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata sit DE. Oporteat

*Rec. de l'Acad. Tome VI.*

E e



autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum BE, mediante aliquâ æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis esto proprietas illa, quod quadratum applicatæ cujuscvis, putâ DE, æquale sit rectangulo contento sub latere recto AB & sub BE portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam DE; quæ proprietas parabolæ specifica est, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducuntur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

*Prima Æquatio.*

AB esto  $b$ ,  
DE  $a$ ,  
DE quadratum  $a^2$ ,  
BE  $e$ ,  
ABE rectangulum  $be$ .

Æquatio,

$$be \propto a^2,$$

vel

$$be - a^2 \propto 0.$$

Itaque, propositâ curvâ aliquâ BD, atque in ea sumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ BE quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes sit indefinita: si ducta recta DE datæ cuiuspiam rectæ terminatæ AB parallela, media proportionalis sit

inter AB, BE: pronuntiabimus curvam illam esse parabolam. Est enim reciproca proprietas, ex vi hypothese, quod DE sit semper datæ parallela; aliàs enim posset æquatio præmissa circulum exhibere, ut notatum est ad secundam circuli æquationem, dum proposita est æquatio  $2be - u^2 \propto 0$ . Hoc autem planè manifestum est.

*Secunda & tertia Æquatio.*

Nec aliter habebuntur secunda & tertia æquatio; quàm in circulo dictum est, divisâ scilicet DE in F, aut Ee ij

eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit secunda æquatio  $be \propto c^2 + 2ci + i^2$ , vel  $-c^2 + be - 2ci - i^2 \propto 0$ , atque id ex divisâ DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit  $be \propto +c^2 - 2ci + i^2$ , vel  $-c^2 + be + 2ci - i^2 \propto 0$ .

Et hæc quidem omnes æquationes sub speciebus exhibitæ sunt reciprocarum, existente rectâ DE datâ alicui rectæ semper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere semper licebit, speciebus tamen immutatis.

Quòd si recta BE dividatur in I, vel eadem producat, sive versùs B in C, sive versùs E in K, reliquis eodem modo quo suprà positæ, multæ inde orientur æquationes, quædam scilicet manente DE indivisâ ac sine productione, reliquæ autem ipsâ DE divisâ vel productâ. In exemplo enim esto BE divisâ, ac BI esto data sub specie  $d$ , IE autem esto  $y$ ; unde rectangulum sub AB, BE, quia æquale est duobus simul, ei scilicet quod continetur sub AB, BI, & ei quod continetur sub AB, IE, ralem induet speciem  $bd + by$ : itaque positâ DE indivisâ sub specie  $a$ , talis erit æquatio  $bd + by \propto a^2$ , vel  $bd + by - a^2 \propto 0$ . At positâ DE divisâ sub specie  $c + i$ , æquatio erit ejusmodi  $bd + by \propto c^2 + 2ci + i^2$ , vel  $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \propto 0$ . Quod si CB sit data sub specie  $d$ , CE autem sit  $y$ , erit ipsius BE species  $y - d$ : contrâ autem, si CE sit  $d$ , & CB sit  $y$ , erit ipsius BE species  $d - y$ ; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex singulis, sub iisdem speciebus, parabolam concludere.

Ad prædictas autem æquationes reduci poterunt quæcunque ad circulum suprà, tam directè quàm indirectè pertinebant; si species debitè atque ex arte permutentur: at propter talem permutationem, æquationes illæ erunt

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 223  
reciproca. Sed hoc indicasse sufficiat; nunc ad hyperbolam progrediamur.

### DE HYPERBOLA.

**E**X infinitis modis quibus hyperbola aliqua ad rectam quandam referri potest, duo videntur præcipui: alter quidem, cum illa ad aliquam ex suis diametris refertur; alter autem, cum illa refertur ad unam ex suis asymptotis.

Esto hyperbola BD, cujus vertex sit B, rectum latus AB, transversum BC, centrum L in medio ipsius BC, ceteris ut supra in parabola positis. ( Vide figuram parabolæ, & finge esse hyperbolam ), nisi quod distinctionis gratiâ, species transversæ lateris hîc erit  $f$ , unde CEB rectanguli species erit  $fe + e^2$ . Est autem in omni hyperbola tale rectangulum ad quadratum cujusvis ordinatæ DE ut transversum latus ad rectum: in speciebus ergo, ut  $f$  ad  $b$ , ita  $fe + e^2$  ad  $a^2$ . Ductis itaque extremis inter se, tum etiam mediis inter se, fiet æquatio universalis ad omnem hyperbolam pertinens.

#### Prima Æquatio.

$$bfe + be^2 \propto fa^2, \text{ sive } bfe + be^2 - fa^2 \propto 0.$$

Ex tali igitur æquatione concludemus hyperbolam cujus latus rectum erit  $b$ , & transversum  $f$ , existente  $a$  ordinatâ ad diametrum,  $e$  verò intercepta inter ordinatam & verticem, sive diameter sit axis, sive non, prout angulus ad E rectus erit vel obliquus.

#### Secunda Æquatio.

Secunda æquatio ex divisa DE in F, ita ut species  
Ee iij.

rectæ DE sit  $c + i$ , talis erit,  $bfe + be^2 \propto fc^2 + 2cfi + fi^2$ , sive  $fc^2 + bfe + be^2 - 2cfi - fi^2 \propto 0$ .

### *Tertia Æquatio.*

Tertia æquatio ex DE productâ in G vel H, ita ut species ipsius DE sit  $c - i$ , vel  $i - c$ , talis erit  $bfe + be^2 \propto fc^2 - 2cfi + fi^2$ , sive  $fc^2 + bfe + be^2 - 2cfi - fi^2 \propto 0$ .

Poterit autem non tantum recta BE, sed etiam recta DE, vel utraque dividi, vel produci; unde multæ nascentur æquationes magis intricatæ, quas, quia vix utiles esse possunt, curioso Analystæ relinquimus.

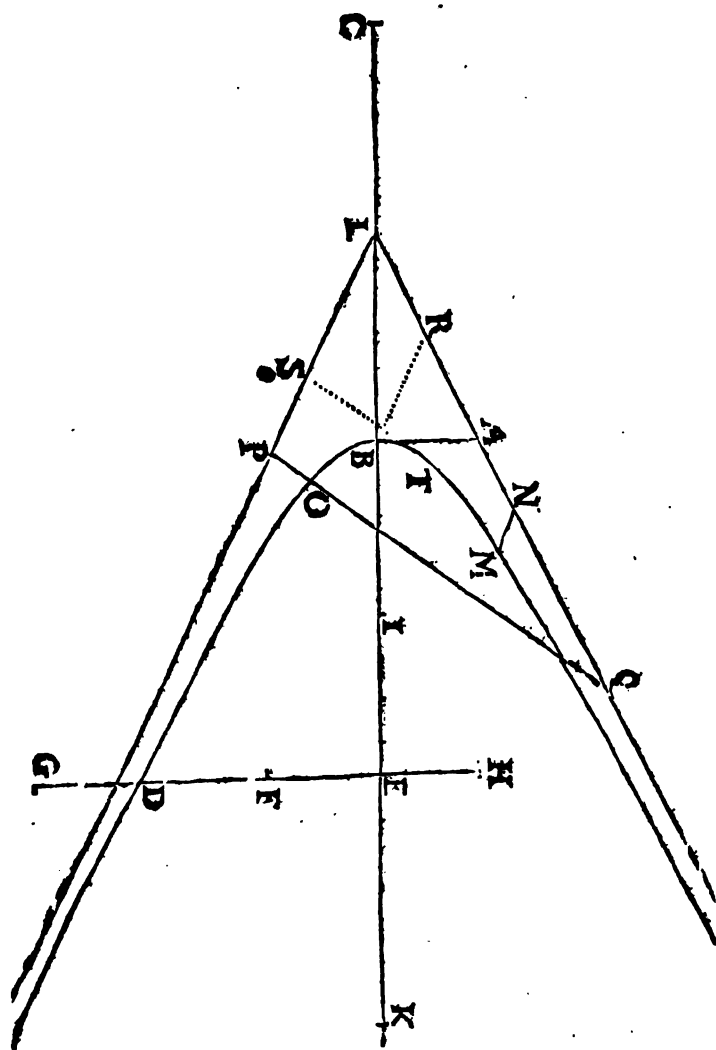
### *Quarta Æquatio.*

Speciatim verò resumamus primam hyperbolæ æquationem, putâ  $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$ , & ponamus transversum latus  $f$  æquale esse lateri recto  $b$ , quod accidit in quacunque hyperbola cujus asymptoti sunt ad angulos rectos. Itaque divisâ æquatione per  $f$  vel  $b$ , fiet hæc æquatio simplicior,  $be + e^2 - a^2 \propto 0$ , vel  $fe + e^2 - a^2 \propto 0$ .

Ex tali ergo æquatione concludere licebit hyperbolam rectangulam, cujus latus rectum erit  $b$ , ordinata  $e$ , sive ad axem, sive ad aliam quamcunque diametrum, & latus transversum erit  $f$  æquale ipsi  $b$ ,  $e$  autem erit quævis intercepta inter applicatam seu ordinatam & verticem.

At ex hac speciali ac simplici æquatione multæ aliæ deduci possunt, si scilicet dividatur DE in F, vel ipsa DE producat in G vel H, vel si BE dividatur in I, aut ipsa eadem BE producat in K vel in L; vel rur-

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM, 223  
 sis, si utraque tam DE quàm BE dividatur aut produ-  
 catur, vel denique multis aliis modis, pro majori &  
 majori Analystæ sagacitate.



*Quinta Æquatio.*

Resumamus adhuc primam hyperbolæ æquationem, nempe  $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$ , oporteatque talem æquationem reddere simplicem, ita tamen ut illa ad quamcunque hyperbolam pertineat.

Intelligatur esse ut  $b$  ad  $f$ , ita  $a^2$  ad  $u^2$ , unde  $fa^2$  æquale erit ipsi  $bu^2$ . Itaque in æquatione, loco ipsius  $fa^2$  succedat ipsum  $bu^2$ , & omnia applicentur ad  $b$ , ac tum  $fe + e^2 - u^2 \propto 0$ .

Ex tali ergo æquatione licebit non solum hyperbolam rectangulam, ut supra, directè concludere, sed etiam per fictionem poterimus eandem æquationem ad quamcunque hyperbolam extendere, cuius latus transversum sit  $f$ , latus autem rectum sit recta quævis, &  $e$  sit quæcunque intercepta inter ordinatam & verticem; at ordinata non erit  $u$  (nisi si latus rectum æquale ponatur esse lateri transverso  $f$ , ut fiat hyperbola rectangula.) Verùm ut ipsa ordinata habeatur, fiet ut transversum latus  $f$ , ad rectum quod vocabimus  $b$ , ita  $u^2$  ad aliud quod vocabitur  $a^2$ , ac tum  $a$  erit ipsa ordinata: hoc autem ex præmissis manifestum est. Ex tali enim analogia fiet  $fa^2 \propto bu^2$ : at in æquatione simplici proposita habemus  $fe + e^2 - u^2 \propto 0$ ; quibus per  $b$  multiplicatis invenitur  $bfe + be^2 - bu^2 \propto 0$ . Jam loco ipsius  $bu^2$  succedat  $fa^2$ , & sic tandem fiet prima hyperbolæ æquatio nempe  $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$ .

Porro ad prædictas æquationes reduci poterunt quæcunque supra ad circulum & ad parabolam directè aut indirectè pertinebant, si species debite atque ex arte permutentur, ut convenientem sortiantur interpretationem: at propter talem mutationem non erunt reciprocarum æquationes illæ; omnino enim nulla æquatio re-

ciproca

ciproca est, nisi sub iisdem omninò speciebus sub quibus illa ad locum aliquem directè pertinet.

In analysi speciosa communiter liberum est ex infinitis hyperbolarum speciebus eam eligere quam libuerit: quo sanè casu præstabit rectangulam assumere, propter illius majorem simplicitatem. Aliquando etiam sectio ipsa ex hypothese data est, sed rarò, putà cum beneficio analyseos quæritur aliqua ejusdem sectionis proprietas, ut si quis ex dato puncto extra axem datæ sectionis, minimam rectam quæ ad ipsam sectionem duci possit inquirat, incidet ille in æquationem solidam quæ solvi poterit beneficio circuli & hyperbolæ, ita ut vel circulus quivis, vel quæcunque hyperbola ad arbitrium eligi possit. Eligitur ergo ipsa hyperbola data, cui circulus conveniens ex arte accommodabitur: aliàs enim peccatum multi existimarent, si neglectâ ipsâ hyperbolâ datâ, assumeretur vel alia hyperbola vel parabola vel ellipsis, ut liberum est in omni æquatione solida; at hunc rigorem, ut elegantior, concedimus, sic non omninò necessarium existimamus, propter rationes suprâ allatas, cùm quid geometricum censerì debeat examinaremus.

### *Sexta Æquatio.*

Iisdem positis, sunt hyperbolæ asymptoti LN, LP *Vide Figuram sequentem.* ad angulum quemcunque; atque ex vertice B ducatur recta BR parallela uni asymptoto LD, quæ BR occurrat alteri asymptoto LN in puncto R. Itaque, ex hypothese quòd data sit hyperbola, data quoque erit utraq; LR, RB, unde & rectangulum sub ipsis datum est, sit species illius  $b^2$ . Tum sumpto in hyperbola quocunque puncto M, ducatur recta MN parallela cuivis asymptoto, putà LP, occurrensque alteri LN in puncto N; atque species rectæ LN esto  $a$ , species autem rectæ

## 226 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

NM esto  $e$ . Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum sub LR, RB æquale est rectangulo sub LN, NM : dabitur hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica  $b^2 \propto ac$ , seu  $b^2 - ac \propto 0$ .

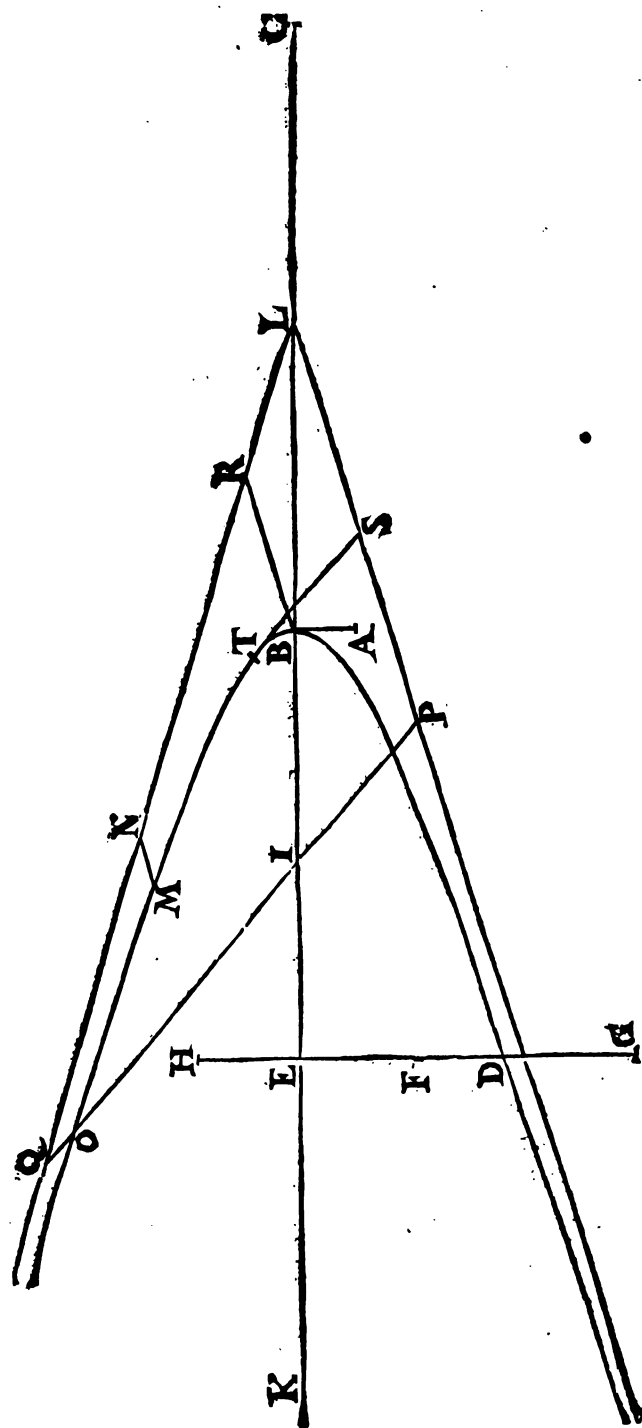
Ex tali ergo æquatione semper hyperbolam concludere licebit, cujus  $b^2$  erit rectangulum sub LR, RB, at  $a$  erit quævis portio unius asymptotæ, putà LN ad centrum terminata,  $c$  verò recta intercepta inter hyperbolam & alterum ipsius speciei  $a$  extremum, quæ tamen recta  $c$  alteri asymptoto parallela existeret, putà asymptoto LP existente  $e$  ipsâ rectâ MN.

Quòd si recta LN dividatur vel producat, ut species illius sit vel  $c + i$ , vel  $c - i$ , vel  $i - c$ , manente NM indivisâ; aut si hæc NM dividatur vel producat, ut species illius sit  $d + u$ , vel  $d - u$ , vel  $u - d$  manente LN indivisâ, aut si utraque LN, NM dividatur, aut utraque producat, aut denique altera earum dividatur, altera producat: habebuntur inde multæ æquationes inventu faciles, atque omni hyperbolæ specificæ; unde ex qualibet illarum hyperbolam concludere licebit.

Apparet quoque tales æquationes ad quamcunque hyperbolam posse pertinere, nisi aut angulus asymptotæ datus sit, aut rectum latus, aut transversum, aut alia quædam proprietas, quæ cum dato  $b^2$ , hyperbolæ ipsius specie determinare possit.

### Septima Æquatio

Iisdem adhuc positis, ducatur quæcunque recta POQ secans hyperbolam in O, asymptotos autem in P & Q; atque illi PQ parallela existat TS tangens hyperbolam in T, occurrensque alteri asymptoto, putà LP in S; & data sit positio & magnitudine ipsa TS, cujus species



Ff ij

# 228 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

fit  $b$ , ex hypothefi quòd hyperbola fit quoque data; fit etiam rectæ OP species  $a$ , rectæ verò OQ species esto  $e$ . Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum POQ æquale est quadrato tangentis TS, fiet hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica  $b^2 \propto ae$ , seu  $b^2 - ae \propto 0$ .

Ex tali ergo æquatione, eadem quæ suprâ in sexta concludere licebit, atque id tam divisus ipſus PO, OQ, quàm iisdem productis.

## DE ELLIPSI.

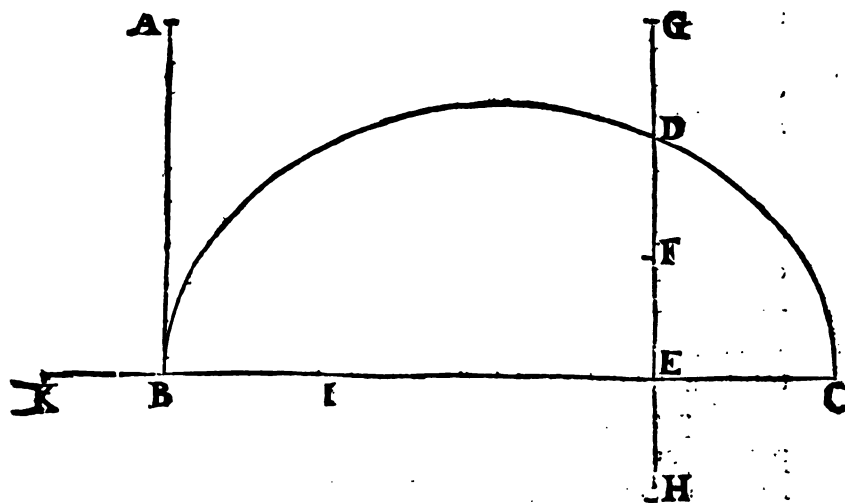
**I**N ellipſi præcipuæ æquationes non multum differunt à tribus circuli prioribus æquationibus, ut ibi monuimus. Omnino autem, non alio modo se habet circulus ad ellipſes, quo hyperbola rectangula ad alias hyperbolas minimè rectangulas. Sicuti ergo in tali hyperbola rectangula æquatio simplex fuit, quæ respectu totius generis hyperbolarum composita extitit, sic in circulo, prædictæ priores tres æquationes simplices fuere, quæ in genere ellipſium fient compositæ. At illud hîc breviter exponamus.

### Prima Æquatio.

Esto ellipſis BD, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BC, sive illa sit axis sive non, DE ordinata ad illam diametrum, cui parallela sit AB; species autem ipsius AB esto  $b$ ; ipsius BC,  $f$ ; ipsius DE,  $a$ ; ac tandem ipsius BE,  $e$ : unde rectanguli CEB species erit  $fe - e^2$ . At in omni ellipſi, ut diameter BC ad latus rectum AB, ita rectangulum CEB ad quadratum DE; itaque in speciebus, ut  $f$  ad  $b$ , ita  $fe - e^2$  ad  $a^2$ : hinc æquatio  $bfe - be^2 \propto fa^2$ , sive  $bfe - be^2 - fa^2 \propto 0$ .

# DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 229

Poterit autem vel recta BE, vel recta DE, vel utraque dividi vel produci; unde multæ nascentur æquationes inventu non admodum difficiles; sed id indicasse sufficiat.



Ex ejusmodi ergo æquationibus semper ellipsim concludere licebit, cujus latus rectum erit  $b$ , diameter  $f$ , ordinata ad diametrum  $a$ , vel quæcunque ipsam  $a$  in æquatione referet, ac tandem intercepta inter ordinatam & verticem erit  $e$ , vel quæcunque ipsam  $e$  in æquatione referet. Immo, dabitur quoque ipsius ellipsis species, ex hypothesi quòd angulus ABC vel DEC datus sit; si tamen angulus ille rectus esset, & rectæ  $b$  &  $f$  æquales, loco ellipsis haberemus circulum: quod demonstrare non erit difficile.

## Secunda Æquatio.

Potest præmissa prima æquatio reddi simplicior, si fiat ut  $b$  ad  $f$ , ita  $a^2$  ad  $u^2$ ; unde  $fa^2 \propto bu^2$ . Itaque  
Ff iij.

# 430 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM

in æquatione illa, loco ipsius  $fa^2$  succedat illi æquale  $b u^2$ , ac tum  $b f e - b e^2 - b u^2 \propto 0$ : omnia applicentur ad  $b$ , fietque æquatio simplex  $f e - e^2 - u^2 \propto 0$ .

Et hæc quidem æquatio directè pertinet ad circulum, at indirectè & per fictionem pertinere poterit ad quamcunque ellipsum, cujus diameter erit  $f$ , latus autem rectum erit recta quæcunque; at verò ordinata non erit  $u$ , (nisi latus rectum æquale sit ipsi  $f$  diametro, & angulus DEC obliquus) sed ut ipsa habeatur ordinata, fiet ut  $f$  ad latus rectum quod vocabimus  $h$ , ita  $u^2$  ad aliud quod vocetur  $a^2$ , ac tum  $a$  erit ipsa ordinata; ex tali enim analogia fiet  $fa^2 \propto b u^2$ : at æquatio simplex erat  $f e - e^2 - u^2 \propto 0$ , quâ in  $b$  ductâ, fit  $b f e - b e^2 - b u^2 \propto 0$ . Jam loco ipsius  $b u^2$  succedat ipsi æquale  $fa^2$ , & sic tandem fiet prima ellipsis æquatio  $b f e - b e^2 - fa^2 \propto 0$ .

Ad prædictas æquationes reducuntur quæcunque supra ad circulum, ad parabolam & ad hyperbolam directè pertinebant, si species debite atque ex arte permulentur, at iis conditionibus de quibus sæpius supra dictum est.

## Corollarium.

**I**N omnibus præmissis æquationibus liquidò constat; quatuor curvas ex quibus illæ deductæ sunt, nempe circuli circumferentiam, parabolam, hyperbolam, & ellipsum ad suas diametros relatas eo modo quò supra, non transcendere secundum gradum, hoc est quadratum incognitarum magnitudinum  $a, e, i, u$ , &c. Quòd si quis easdem ad alias rectas quàm ad ipsas diametros referat, ille rursùs in similes, sive ejusdem gradus æquationes incidet; unde in universum, ex talibus æquationibus aliquam ex ipsis quatuor curvis semper concludere licebit: & hoc sufficit ad omnia loca plana & solida Anti-

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 257  
 quorum inveniendæ & componendæ ; si tamen his æqua-  
 tionibus paucæ addantur quæ pertinent ad lineas rectas ,  
 dum illæ ad alias rectas referuntur , quæ sanè æquationes  
 ipsum eundem secundum gradum non excedunt ; at verò  
 ad hanc inventionem & compositionem requiritur Ana-  
 lysta non vulgaris. Sed hoc etiam indicasse sufficiat :  
 nunc pauca de locis linearibus ad æquationes geome-  
 tricas absoluto modo revocatis supersunt dicenda , quod  
 nos in conchoïde Nicomedis tantùm exequemur , siqui-  
 dem illa etiam in sequentibus ad nostrum institutum sa-  
 tis erit , videturque eadem esse locorum omnium linea-  
 rium simplicissimus.

#### DE CONCHOÏDE NICOMEDIS.

ET si multa sint linearum curvarum genera quæ in-  
 finitas species multiplicentur , tamen hac in par-  
 te, conchoïdum genus omnia alia genera longissimè ,  
 immò infinities infinitè superat. Siquidem nulla datur  
 curva ex quâ infinitæ conchoïdes deduci non possint ,  
 atque omnes specie , immò etiam genere differentes ; ac  
 præterea , cujusvis conchoïdis infinitæ rursùs dantur con-  
 choïdes specie ac genere inter se distinctæ , ita ut pro-  
 positâ quâcunque curvâ putà circuli circumferentiâ , sta-  
 tim ex ea innumeræ conchoïdes deducantur , quæ quam-  
 quam genere inter se distinctæ , tamen omnes sint pri-  
 mi cujusdam ordinis ; tum ex unaquaque illarum innu-  
 meræ rursùs aliæ nascantur genere diversæ , quæ omnes  
 secundi cujusdam ordinis existant , ex quibus singulis  
 eodem modo innumeræ tertii cujusdam ordinis oriun-  
 tur ; atque ita in infinitum infinities abit talis multipli-  
 catio.

Nos verò ex omnibus illis generibus duos tantùm se-  
 ligere decrevimus , quæ quamquam simplicissima exis-

tant, tamen illa per se singula ad æquationes analyticas quinti ac sexti gradus, hoc est quadrato-cubicas ac cubo-cubicas solvendas sufficiunt; ita ut beneficio cuiusvis illorum generum possit angulus quicunque rectilineus in quinque partes æquales dividi. Horum generum prius erit illud cuius conchoïdes vulgò vocantur à Nicomede earum inventore, suntque conchoïdes circulares primi ordinis, de quibus Eutocius in Archimede, necnon alii permulti authores scripsere; quandoquidem per medium talis conchoïdis Nicomedes ipse famosissimum problema de cubo duplicando solvere aggressus est, quamquam sanè modo non usque adèd legitimo, cum tale problema ad lineas simpliciores, putà conicas, pertineat; solidum enim illud est tantum, at conchoïdes omnes sunt loci lineares. Alterum duorum generum conchoïdum nostrarum erit parabolicarum, de quibus primus egisse putatur Renatus *des Cartes* in sua Geometria, qui etiam modo prorsus legitimo iisdem usus est ad problemata analytica sexti gradus solvenda, ad quem gradum illa quoque ascendere cogit quæ sunt quinti gradus; quod sanè ei liberum, at non omninò necesse fuit, sed modum quo aliter ab iis se expediret, aut non advertit, aut aliqua de causa neglexit.

In his duobus conchoïdum generibus hoc notatū dignum accidit, quòd quamquam simplicius sit circulare quàm parabolicum, si linearum genitricium ratio habeatur, (simplicior enim est circuli circumferentia quàm parabola) tamen, cum ad æquationes ventum fuerit, reperiuntur illæ in conchoïde parabolica simpliciores quàm in circulari; non quidem ratione gradus ad quem illæ ascenderunt, qui in utraque suà naturà sextus est existente æquatione universali, sed ratione multiplici-tatis affectionum, seu homogeneorum per signa  $+$  &  $-$  distinctorum; at illud magis in sequentibus patebit.

Cum

Cùm autem dicimus ejusmodi conchoïdes ad sextum gradum pertinere, hoc intelligendum est dum illæ ad æquationes analyticas revocantur modo respectivo, non autem simplici seu absoluto; quod etiam rursùs infrà clariùs innotescet.

Antequàm ad æquationes accedamus, pauca præmittenda sunt de natura conchoïdum in universum; tum etiam pauca de conchoïde circulari in specie.

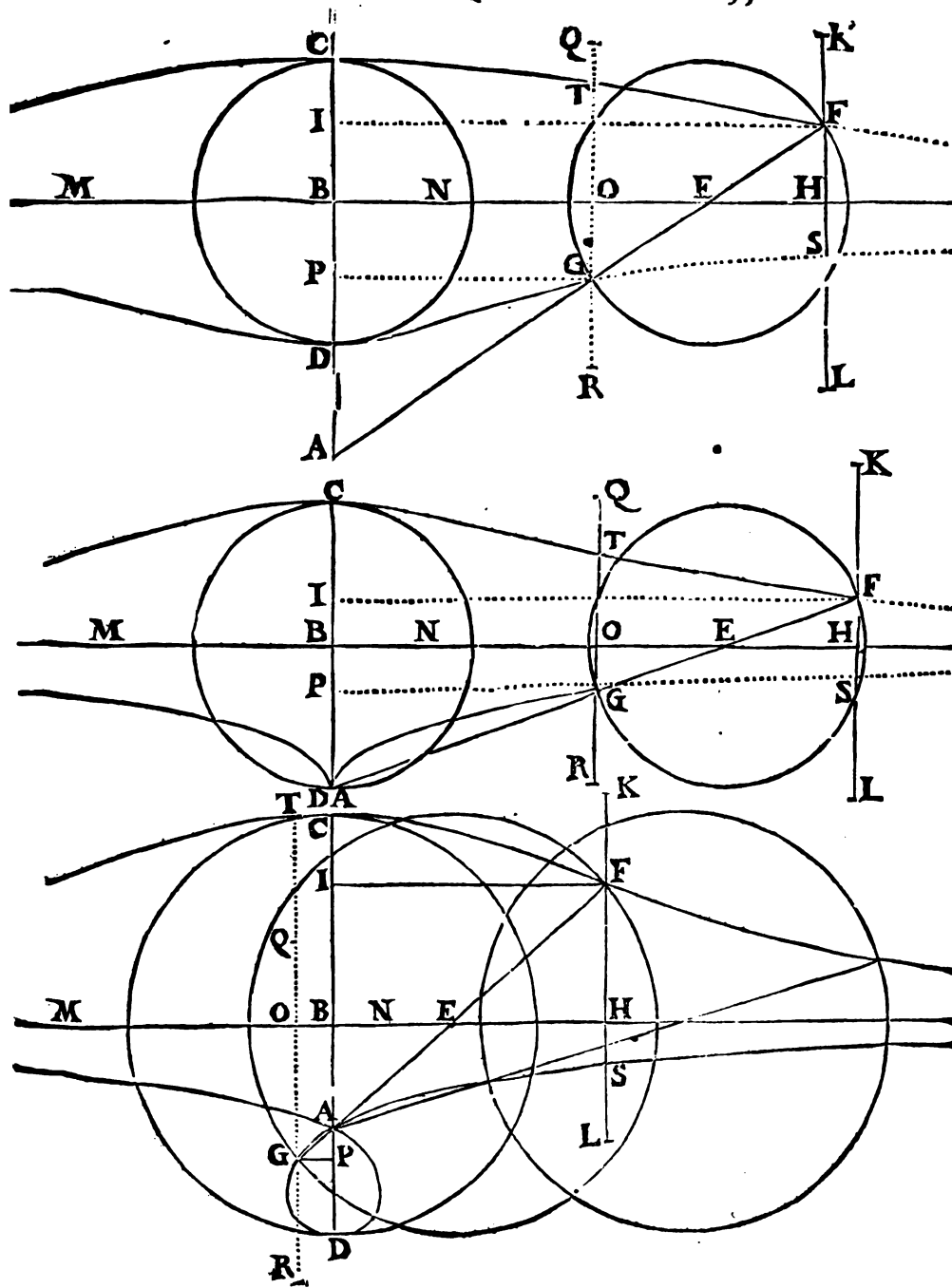
In universum ergo concipiatur quævis linea curva in plano jacens, quod planum moveri possit unà cum eadem curva motu quolibet tam lationis quàm circumvolutionis: hæc linea vocetur genitrix, à qua conchoïdes describenda denominabitur, planum verò postea vocabitur planum mobile: in hoc plano mobili notetur punctum quodcunque intra vel extra genitricem, quod vocetur polus mobilis: per hunc polum transeat quædam linea recta quæ circa talem polum liberè moveri possit, & tamen in ipso plano semper jaceat, ut recta illa sit instar regulæ mobilis quam communiter nomine Arabico vocare solent *alhidadam* in permultis instrumentis; hanc postea vocabimus regulam. Concipiatur deinde quæcunque linea, recta vel curva, in aliqua superficie jacens, (nos hanc superficiem planam assumimus, quam tamen curvam etiam assumere licebit) quæ superficies, quia immobilis statui debet saltem ad faciliorem intelligentiam, dicatur superficies immobilis; & linea in ea concepta dicatur semita, quandoquidem per illam ac secundùm eandem moveri debet polus plani mobilis, dum planum illud postea motu lationis secundùm præscriptas leges aliquas deferetur. Præterea, in superficie immobili extrà semitam, ultrà citràve, notetur punctum quodcunque quod vocetur polus immobilis, circa quem movebitur regula de qua jam dictum est, ita ut eadem per duos polos, mobilem scilicet & immobilem, perpetuò

transeat, jaceatque interim semper in plano mobili.

His positis, si statuamus planum mobile cum immobili, ita ut polus mobilis existat in semita, & regula per utrumque polum transeat, tum moveatur planum mobile secundum certam quandam ac constitutam legem, quæ tamen lex ad arbitrium Geometræ initio pendet, modò postea illa inviolatam servet, polo mobili secundum semitam delato, neque ab ea usquam evagante, notenturque interim puncta in quibus regula genitricem secat, ac per omnia illa sectionum puncta, linea duci intelligatur: hæc erit conchoïs de qua nunc agimus.

Fieri autem potest, ac reverà fit sæpissimè, ut in una eademque plani mobilis atque ideò lineæ genitricis positione, regula ipsam genitricem in duobus vel pluribus punctis secet; unde etiam accidit non rarò, ut conchoïs inde orta non sit unica linea continua, sed duplex, triplex, aut multis modis multiplex, ita ut partes illius aliquando, etiam in infinitum productæ; nunquam sibi invicem occurrant; aliquando, è contrario, illæ partes se fecent, & aliquando eædem se tangant tantùm: sed & illud fieri potest, ut aliqua positione, regula lineæ genitrici nullo modo occurrat, quo pacto conchoïs non erit ad utramque partem infinitè extensa, vel certè ipsa erit interrupta; non verò continua. Sed hæc indicasse sufficiat in tam vaga atque multiplici linearum infinitis modis infinitarum descriptione.

In specie. Ponamus in aliqua ex tribus his figuris, planum mobile esse illud in quo est circulus cujus diameter est CD vel GF; atque in eo plano lineam genitricem esse ejusdem circuli circumferentiam; polum mobilem esse ipsius centrum B vel E, & regulam esse rectam AB, vel AE. Ponamus deinde planum immobile esse id in quo est recta BE in infinitum utrinque producta, quæ recta eadem sit semita per quam feratur



polus mobilis B vel E, atque unà cum ipso planum mobile deferens circulum CD vel GF, polus verò immobilis in hoc plano immobili esto A, per quem transeat regula AB vel AE.

Manifestum est ergo, quòd dum centrum circuli, sive polus mobilis feretur secundum semitam BE, regula per hunc polum mobilem ac per immobilem A semper transiens, positionem suam continuò mutabit. Jam lex motus esto, ut planum mobile semper inter movendum jaceat secundum suam planitiem in plano immobili; hæc enim lex sola sufficit ad certam atque indubitatam descriptionem. Hoc pacto, quia in quacunque circumferentiæ genitricis positione, regula ipsam circumferentiam in duobus punctis, nec pluribus, semper secatur, quorum punctorum unum est ad unas partes semitæ versùs polum immobilem A, quale est punctum D vel G, alterum ad alteras partes ejusdem semitæ, quale est C vel F: fit necessariò ut conchoïdis circularis inde orta componatur ex duabus lineis ad utrasque partes semitæ BE existentibus, quarum linearum unaquæque ex utraque parte in infinitum extenditur sic ut semita utriusque asymptotos existat. Illæ lineæ in figuris præmissis sunt CTF, DGS, quarum exterior CTF (exteriorem voco eam quæ respectu poli immobilis A jacet ad alteras partes semitæ BE) circa verticem C, ad aliquam distantiam ex utraque parte ipsius verticis, interiùs cava est versùs semitam BE: est autem vertex C punctum id in quo recta AB ad semitam BE perpendiculariter producta occurrit ipsi conchoïdi; at ultra talem distantiam mutatur cavitatis ipsa, fitque ad partes exteriores, convexitas verò respicit semitam usque in infinitum. At conchoïdis interior DGS, præter id quòd de exteriori jam diximus, quibusdam accidentibus obnoxia est, prout recta AB vel

semidiametro DB major est, vel eidem æqualis, vel ipsâ major; existente enim AB majore quàm DB, idem accidit quod de exteriori jamjam attulimus, quodque in prima trium figurarum satis apparet; existentibus verò rectis AB, DB æqualibus, ut in secunda figura, tunc conchois interior ad punctum A vel D qui vertex est, angulum constituit quolibet acuto rectilineo minorem, ut sic conchois ex duabus lineis ad verticem AD sese tangentibus componi videatur, quarum utraque ad partes semitæ BE semper convexa est usque in infinitum. Verum, existente rectâ AB minore quàm DB, ut in tertia figura, tunc conchois inter puncta A, D ita involvitur, ut spatium comprehendat laquei instar, cujus funiculi postquàm ad punctum A decussatim sese secuerunt, abeunt ex utraque parte in infinitum, ita tamen ut convexitas eorum ad partes semitæ BE semper respiciat.

Sic ergo se habet conchois circularis Nicomedis. Quod si polus mobilis non sit centrum circumferentiæ genitricis, sed quodvis aliud punctum in plano mobili assumptum: fient aliæ conchoïdes circulares à prædicta & à se invicem diversæ in infinitum; quod tamen indicasse sufficiat. Sed & semita poterit esse non recta linea ut BE, verum alia circuli circumferentia in plano immobili jacens; quo etiam pacto aliæ atque aliæ conchoïdes circulares gignentur, quales habentur apud Vietam in supplemento Geometriæ, quamquam sanè idem, sicuti de Nicomede diximus, modo non usque adeo legitimo quàm par fuerat usus est, in solvendis scilicet problematis suâ naturâ solidis, cum conchoïdes illæ sint loci lineares. Sed hoc rursus indicasse sufficiat, ut inde possit quivis colligere quàm immensa sit conchoïdum, etiam circularium, omnium inter se specie differentium multitudo: nunc ad æquationes analyticas mo-

238 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

do absoluto, ipsam Nicomedeam revocemus, ut profi-  
nùs ad conchoïdem parabolicam deveniamus. Itaque  
in conchoïde exteriori CTF cujusvis ex tribus figuris  
præmissis sunt species;

$$\begin{array}{ll} AB & b, \\ BC, EF & c, \\ FH, BI & a, \\ FI, BH & c, \end{array}$$

Et quoniam ut recta AI ad IF,  
ita est FH ad EH: erit in specie-  
bus,

$$\text{ut } b + a \text{ ad } c, \text{ ita } a \text{ ad } \frac{ac}{b+a}$$

$$\text{EH} \quad \frac{ac}{b+a}$$

$$\text{EH quadratum} \quad \frac{a^2 c^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

Ponitur autem triangulum EFH  
esse rectangulum. Hinc æqualitas  
in quadratis laterum,

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

& omnibus in communem divisorem ductis,

$$b^2 c^2 + 2bc^2 a + c^2 a^2 \propto b^2 a^2 + 2ba^3 + a^4 + a^2 c^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 + 2bc^2 a + \frac{c^2 a^2}{b^2 a^2} - 2ba^3 - a^4 - a^2 c^2 \propto 0;$$

unde ex tali æquatione sub iisdem speciebus licebit præ-  
nuntiare ipsam æquationem ad conchoïdem circula-  
rem Nicomedis exteriorem pertinere.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 239

Nèque verò in conchoïde interiori DGS magna erit differentia; omnibus enim ritè ordinatis differet æquatio, non quidem speciebus, sed specierum affectionibus secundùm signa + & —, idque in quibusdam affectionibus tantùm, ut ex formula sequenti apparet. Sunt ergo species:

AB esto	$b,$
BC, EF, EG	$c,$
GO, BP	$a;$
GP, BO	$e,$

Ut  $b - a$  ad  $e$ , ita  $a$  ad  $\frac{a e}{b - a}$

OE  $\frac{a e}{b - a}$

OE quadratum  $\frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$

Ponitur autem triangulum EOG esse rectangulum. Unde fiet æqualitas in quadratis laterum, nempe

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$$

& omnibus ductis in communem divisorem,

$$b^2 c^2 - 2bc^2 a + c^2 a^2 \propto b^2 a^2 - 2ba^3 + a^4 + a^2 c^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 - 2bc^2 a - \frac{c^2 a^2}{b^2 a^2} + 2ba^3 - a^4 - a^2 c^2 \propto 0.$$

Itaque ex ejusmodi æquatione sub iisdem speciebus concludemus conchoïdem circularem Nicomedeam interiorem, ex qua æquatio illa ortum duxerit.

Porro multis modis, immò innumeris, variari possunt magnitudines ignotæ  $a$  &  $e$ ; quippe si altera earum vel ambæ datâ magnitudine augeantur vel minuantur, ut factum est suprâ in circulo, parabola, hyperbola, & ellipsi. Finge enim productam esse HF in K, ita ut FK data sub specie  $d$ , HK autem in specie sit  $i$ : tum verò HF erit in speciebus  $i - d$  quæ prius erat  $a$ ; unde loco speciei  $a$  & graduum ejus in æquatione, substitui poterunt  $i - d$  & gradus ipsius; quo pacto fiet alia quæpiam æquatio à præmissis diversa, ac multò pluribus nominibus constans, quæ sub suis speciebus ad conchoïdem Nicomedis pertinebit. Idem etiam concludemus si FH producatur in L, & ipsius HL species sit  $d$ , ipsius autem FL species sit  $i$ , sic enim rursus HF erit in specie  $i - d$ , &c. Quòd si iisdem productis, HK vel FL data sit sub specie  $d$ , & ipsius FK vel HL species sit  $i$ , erit ipsius FH species  $d + i$  quæ prius erat  $a$ ; unde, &c. ut suprâ.

*Supple punctum V. in figura.*

Potuit etiam dividi FH in V, ita ut ex duabus portionibus FV, VH, altera, putà VH, data esset sub specie  $d$ , altera FV ignota sub specie  $i$ ; atque ita ipsius HF species fuisset  $d + i$  quæ prius erat  $a$ ; unde, &c. ut suprâ.

Nec minùs produci potuit recta FI vel HB in M, vel eadem dividi in N. Sed hoc indicasse sufficiat.

Eodem modo ratiocinabimur de rectis GO & GP vel OB, quo de rectis FH & FI vel HB, ut manifestum est.

Infinitos modos relinquimus, quia prædictos sufficere putavimus, ad hoc ut quivis suoapte ingenio quotvis alios ut libuerit, inquirat, & analyticè prosequatur.

*Appendix ad Isagogen topicam continens solutionem  
Problematum solidorum per locos.*

**P**ATUIT methodus quâ lineæ locales deteguntur: inquirendum restat quâ ratione Problematum solidorum solutio possit ex supradictis elegantissimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia. Infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis: commodissimè igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur, secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, & punctum sectionis positione datum quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit. Exemplis breviter & dilucidè res explicatur.

Proponatur  $a$  cubus  $+ b$  in  $a$  quadratum æquari  $z$  plano in  $b$ .

Commodè utraque æqualitatis pars potest æquari solido  $b$  in  $a$  in  $e$ , ut per divisionem istius solidi, illine per  $a$ , hinc per  $b$  res deducatur ad locos. Cùm igitur  $a$  cubus  $+ b$  in  $a$  quadratum æquetur  $b$  in  $a$  in  $e$ ; ergo  $a^3 + b$  in  $a$  æquabitur  $b$  in  $e$ :

Et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius  $e$  ad parabolam positione datam.

Deinde cùm  $z$  in  $b$  æquetur  $b$  in  $a$  in  $e$ , ergo  $z$  æquabitur  $a$  in  $e$ .

Et erit ex nostra methodo extremitas ipsius  $e$  ad hyperbolam positione datam. Sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam. Ergo datur positione, & est facilis ab analysi ad synthesis regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis. Constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab  $a$  adfectis, ex altera solido omninò dato, vel etiam

242 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

cum solidis ab  $a$  vel  $a^q$  affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadrato-quadratorum.

$a^q q + b^f \text{ in } a + z^p \text{ in } a^q \propto d^p p$  : ergo  $a^q q \propto d^p p$   
 $- b^f \text{ in } a - z^q \text{ in } a^q$  æquantur hæc duo homogenea  
 $z^q \text{ in } e^q$ .

Cùm igitur  $a^q q$  æquetur  $z^q \text{ in } e^q$  : ergo per subdivisionem quadraticam,  $a^q$  æquabitur  $z \text{ in } e$ , & erit extremitas E ad parabolam positione datam.

Deinde cùm  $d^p p - b^f \text{ in } a - z^q \text{ in } a^q \propto z^q \text{ in } e^q$ , omnibus per  $z^q$  divis, .

$$\frac{d^p p - b^f \text{ in } a}{z^q} - a^q \propto e^q.$$

Et erit ex nostra methodo extremitas E ad circulum positione datum; sed est & ad parabolam positione datam : ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato-quadraticæ. Expurgabuntur enim methodo Vieræ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo & quadrato-quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolam, circulum vel hyperbolam solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione,

Sint duæ rectæ B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ, fiet  $a$  cubus  $\propto b^q \text{ in } d$ , posito nempe quòd major mediarum ponatur  $a$ .

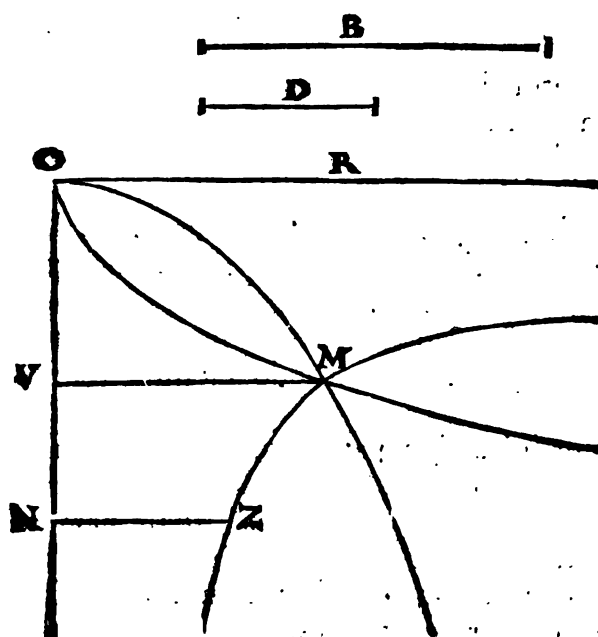
Æquantur singula homogenea  $b \text{ in } a \text{ in } e$ .

Illinc fiet  $a^q \propto b \text{ in } e$ .

Istinc  $a \text{ in } e \propto b \text{ in } d$ .

Ideoquæ quæstio per hyperbolæ & parabolæ intersectionem perficietur.

Exponatur enim recta quævis positione data  $OVN$  in qua detur punctum  $O$ . Sint rectæ datæ  $B$  &  $D$  inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta  $OV$  æquari  $a$ , & recta  $VM$  ipsi  $OV$  ad rectos angulos æquari  $e$ . Ex priori æqualitate, quæ  $a$  æquatur  $b$  in  $e$ , constat per punctum  $O$  tanquam verticem, describendam parabolam cujus rectum latus sit  $b$ , diameter ipsi  $VM$  parallela & applicatæ ipsi  $OV$ : transibit igitur hæc parabola per punctum  $M$ .



Ex secunda æqualitate quæ  $b$  in  $d$  æquatur  $a$  in  $e$ , sumatur punctum ubilibet in recta  $OV$ , ut  $N$ , à quo excitetur perpendicularis  $NZ$ ; & fiat rectangulum  $ONZ$  æquale rectangulo  $b$  in  $d$ . Excitetur perpendicularis  $OR$ . Circa asymptotos  $RO$ ,  $OV$  describenda hyperbola per-  
H h ij

244 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.

punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M. Sed parabola etiam quam supra descripsimus datur positione, & per idem punctum M transit: datur igitur punctum M positione, à quo si demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, & recta OV major duarum continuè proportionalium, quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem parabolæ & hyperbolæ.

Si ad quadrato-quadrata lubeat quæstionem extendere, omnia ducantur in  $a$ , tunc  $a^2 q$  æquabitur  $b^2 q$  in  $d$  in  $a$ .

Æquentur singula homogenea juxta superiorem methodum  $b^2 q$  in  $c^2 q$ .

Fient duæ æqualitates, nempe  $a^2 q$  &  $b^2$  in  $c$ .

Et  $d$  in  $a$  &  $c^2 q$ .

Quæ singulæ dabunt parabolam positione datam. Fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimede, & huic methodo facilimè redduntur obnoxia.

Abeant igitur illæ paraplerosès Vietæ quibus æquationes quadrato-quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana; pari enim elegantia, facilitate & brevitate solvuntur, ut jam patuit: perinde quadrato-quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor, elegantius.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en constructionem omnium problematum cubicorum & quadrato-quadraticorum per parabolam & circulum.

Ponatur  $a^2 q + z^2$  in  $a \propto dpp$ : ergo  $a^2 q \propto -z^2$  in  $a + dpp$ . Fingatur quadratum abs  $a^2 - b^2$ , aut alio quovis quadrato dato, fiet quadratum  $a^2 q + b^2$ .

—  $bq$  in  $aq$  bis. Addantur ad supplementum singulis æqualitatis partibus  $bqq$  —  $bq$  in  $aq$  bis : fiet  $aqq + bqq$  —  $bq$  in  $aq$  bis  $\propto bqq$  —  $bq$  in  $aq$  bis —  $z^f$  in  $a + dpp$ ; sit  $bq$  bis  $\propto nq$ , & singulis homogeneis si-  
ve partibus æqualitatis æquetur  $nq$  in  $eq$  : fiet illinc per  
subdivisionem quadraticam  $aq$  —  $bq$   $\propto n$  in  $e$ ; ideóque  
punctum extremum  $e$  erit ad parabolam ex nostra me-  
thodo : isthinc fiet,

$$\frac{bqq}{nq} - aq - \frac{z^f \text{ in } a + dpp}{nq} \propto eq.$$

Ideóque ex nostra methodo, punctum extremum  $e$   
erit ad circulum. Descriptione igitur parabolæ & cir-  
culi solvitur quæstio.

Hæc methodus facilinè ad omnes casus tam cubicos  
quàm quadrato-quadraticos extenditur. Curandum est  
tantum ut ex una parte sit  $aqq$ ; ex altera quælibet ho-  
mogenea, modò non afficiantur ab  $a$  cubo. At per ex-  
purgationem Vietzæ omnes æquationes quadrato-qu-  
adraticæ ab affectione sub cubo liberantur : ergo eadem  
in omnibus methodus. Cùm autem æquationes cubicæ  
liberentur ab adfectione sub quadrato per methodum  
Vietzæ, homogeneis omnibus in  $a$  ductis, fiet æquatio  
quadrato-quadratica, cujus nullum ex homogeneis affi-  
cietur sub cubo; ideóque solvetur per superiorem me-  
thodum.

Id solùm in secundâ æqualitate curandum est, ut  $aq$   
ex una parte, ex altera  $eq$  sub contraria affectionis no-  
ta reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus,  $aqq$   
 $\propto zp$  in  $aq$  —  $z^f$  in  $d$ . Fingatur quodvis quadratum  
abs  $aq$  — quovis quadrato dato ut  $bq$ , fiet  $aqq +$   
 $bqq$  —  $bq$  in  $aq$  bis. Adjiciatur utrique æqualitatis  
parti ad supplementum  $bqq$  —  $bq$  in  $aq$  bis, fiet  $aqq$ .

Hh. iij.

$+ b^2 - b^2$  in  $a^2$  bis  $\propto b^2 - b^2$  in  $a^2$  bis  $+ z^2$  in  $a^2 - z^2$  in  $d$ .

Ut igitur commoda fiat divisio in secunda æqualitate, sumenda differentia inter  $b^2$  bis &  $z^2$  quæ sit verbi gratiâ  $n^2$ , & utraque æqualitatis pars æquanda  $n^2$  in  $e^2$ .

Ut illinc fiat  $a^2 - b^2 \propto n^2$  in  $e$ .

Isthinc  $\frac{b^2}{n^2} - a^2 - \frac{z^2}{n^2}$  in  $d \propto e^2$ .

Advertendum deinde  $b^2$  bis debere præstare  $z^2$ , alioquin  $a^2$  non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolam, cui primum remedium;  $b^2$  enim ad libitum sumimus, ideòque ipsius duplum majus  $z^2$  nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali, circulum creari semper ex æqualitate in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo  $+$ ; in altera aliud quadratum ignotum signo  $-$ .

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit  $a^2 \propto b^2$  in  $d$ .

Et  $a^2 \propto b^2$  in  $d$  in  $a$ .

Adjiciatur utrinque  $b^2 - b^2$  in  $a^2$ .

$a^2 + b^2 - b^2$  in  $a^2$  æquabitur  $b^2 + b^2$  in  $d$  in  $a - b^2$  in  $a^2$ .

Sit  $b^2 \propto n^2$ .

Et singulæ æqualitatis partes æquentur  $n^2$  in  $e^2$ .

Fiet illinc  $a^2 - b^2 \propto n^2$  in  $e$ .

Ideòque extremum  $e$  erit ad parabolam.

Isthinc fiet  $b^2 + d^2$  in  $a - a^2 \propto e^2$ ; ideòque extremum  $e$  erit ad circulum.

Qui hæc adverterit, frustra quæstionem mesolabii, trisectionis angularis, & similes tentabit deducere ex planis, hoc est per rectas & circulos expedire.

# T R A I T E

## D E S I N D I V I S I B L E S .

**P** O U R tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes, on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour côté la plus grande

de ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendrait le quarré qui auroit 4 de côté comme le triangle; & encore qu'il ne fallût pas 10 points pour achever le quarré, parce que le côté AB seroit commun à l'autre moitié du quarré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable, parce que le triangle n'excede jamais la moitié du quarré que

de la moitié de son côté : or y ayant une infinité de côtez audit quarré pris dans les indivisibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en considération ; ainsi ce triangle-cy qui a 4 de côté n'excede la moitié du quarré collateral, ( c'est-à-dire qui a pareil côté ) que de 2 qui est  $\frac{1}{4}$  de ladite moitié, ou la moitié du côté. Si le triangle avoit 5 de côté, il n'excederoit que de  $\frac{1}{5}$  de la moitié du quarré collateral : s'il en a 6, il n'excedera que de  $\frac{1}{6}$ , & ainsi de suite ; & puisqu'on voit que l'excès diminue toujours, il s'anéantira enfin dans la division indéfinie.

De même si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, seroit à la dernière prise autant de fois, comme la somme des quarez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3 ; car quoique prenant un nombre fini de quarez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collateral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne seroit que le tiers ; car ladite somme ne passe jamais le  $\frac{1}{3}$  du cube que de la moitié du plus grand quarré  $+\frac{1}{2}$  du côté. Or dans le cube il y a une infinité de quarez, & partant la moitié d'un d'iceux n'est pas considérable, & encore moins  $\frac{1}{2}$  de la ligne ou côté du même cube.

Ainsi le cube étant 64, pour avoir la somme des quarez dont le plus grand soit collateral audit cube, on prendra le tiers d'icelui, sçavoir  $21\frac{1}{3}$ , auquel joignant la moitié du plus grand quarré, sçavoir 8, on aura  $29\frac{1}{3}$ , à quoi joignant encore  $\frac{1}{2}$  de 4 qui est le côté, sçavoir  $\frac{2}{3}$ , on aura 30 pour la somme des quatre premiers quarez. Et ainsi par les propriétés des puissances suivantes, on montrera que la somme des cubes est  $\frac{1}{4}$  du quarré-quarré collateral au plus grand cube ; que la somme des quarez-quarez est  $\frac{1}{5}$  de la cinquième puissance, que la  
somme

ſomme des cinquièmes puiffances eſt  $\frac{1}{5}$  de la ſixième puiffance, & ainſi des autres. Mais il faut remarquer que les puiffances ont ainſi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point ſi on en omet une entre deux. Ainſi la ligne ou côté n'a point de rapport au cube, ni le quarré au quarré-quarré, ni le cube à la cinquième puiffance, &c. car les lignes priſes à l'infini ne faiſant qu'un quarré, & y ayant une infinité de quarrés dans le cube, ſi l'on ajoute ou ſi l'on ôte un ſeul quarré cela n'operera rien. La même choſe ſe montrera du quarré eû égard au quarré-quarré, & du cube eû égard à la cinquième puiffance, &c.

La ſuperficie ſe diviſe auſſi en une infinité de petites ſuperficies; leſquelles ou ſont égales, ou ont une égale différence, ou gardent entr'elles quelque'autre progrefſion, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, &c. Et d'autant que les ſuperficies ſont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les ſuperficies, on comparera les lignes à une autre choſe, & la ſomme de toutes les petites ſurfaces ou des lignes qui les repréſentent, ſont à la grande ſurface priſe autant de fois comme 1 à 3, comme il a été dit.

De même les ſolides ſe diviſent en une infinité de petits ſolides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a été dit des ſurfaces: & d'autant que les ſolides ſont terminez par des ſurfaces, au lieu de dire que ces petits ſolides ſont au grand ſolide pris autant de fois, je dis, l'infinité des ſurfaces ſont à la plus grande priſe autant de fois, comme le cube au quarré-quarré de ſon côté, ou comme 1 à 4.

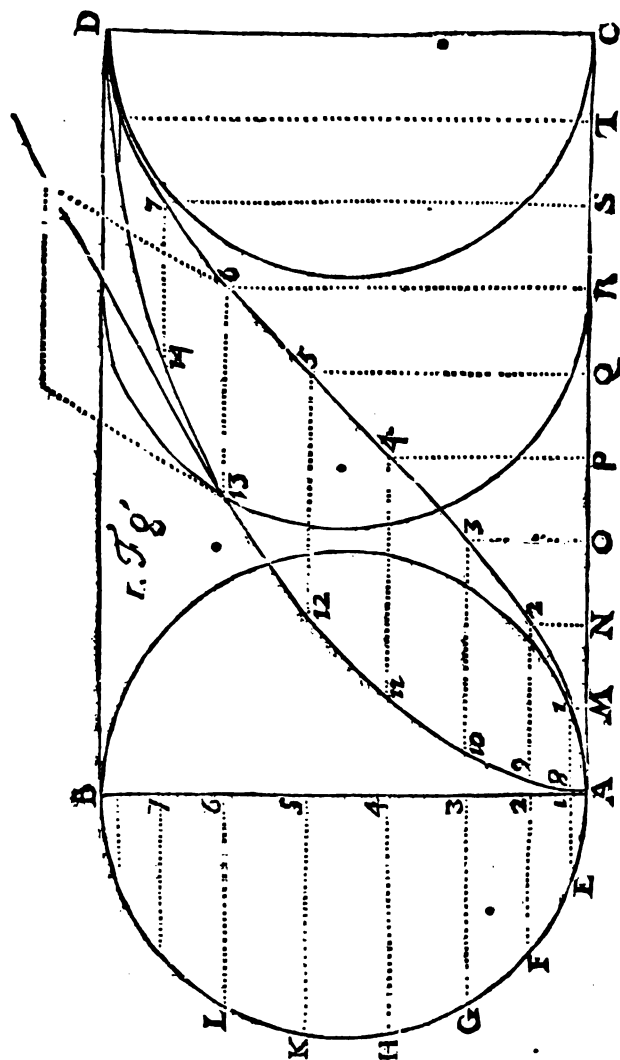
Par tout ce diſcours on peut comprendre que la multitude infinie de points ſe prend pour une infinité de petites lignes, & compoſe la ligne entière. L'infinité de

lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total.

### EXPLICATION DE LA ROULETTE.

**N**OUS posons que le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallèlement à soy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamètre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamètre, en sorte que quand le diamètre est en CD, le point A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamètre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamètre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens; l'un diamètre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti; cette hauteur se marque tirant du point E au diamètre AB un sinus E<sub>1</sub>, & le sinus Versé A<sub>1</sub> est la hauteur dudit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F<sub>2</sub>, & A<sub>2</sub> sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le sinus G<sub>3</sub>, le sinus Versé A<sub>3</sub> sera la hauteur de A quand il est parvenu en G; & faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que

parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & éleemens  
par dessus l'extrémité du diamètre A, qui sont  $A_1, A_2,$



$A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ ; donc, afin d'avoir les lieux par  
ou passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-  
I i ij

dant ses deux mouvemens, je porte toutes les hauteurs sur chacun des diamètres  $M, N, O, P, Q, R, S, T$ , & je trouve que  $M_1, N_2, O_3, P_4, Q_5, R_6, S_7$  sont les mêmes que celles qui sont prises sur  $AB$ . Puis je prends les mêmes sinus  $E_1, F_2, G_3$ , &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamètre, & je les tire vers le cercle, & des extremitéz de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est  $A_8 9 10 11 12 13 14 D$ , & l'autre  $A_1 2 3 4 5 6 7 D$ . Je sçai comme s'est fait la ligne  $A_8 9 D$ ; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que  $AB$  a parcouru la ligne  $AC$ , le point  $A$  est monté par la ligne  $AB$ , & a marqué tous les points  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , le premier espace pendant que  $AB$  est venu en  $M$ , le second pendant que  $AB$  est venu en  $N$ , & ainsi toujours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamètre soit arrivé en  $CD$ ; alors le point  $A$  est monté en  $B$ . Voilà comment s'est formée la ligne  $A_1 2 3 D$ . Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extremitéz  $AD$ . Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle  $AEB$  contenuë dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur  $A_1, A_2$ , &c. & des sinus  $E_1, F_2$ , &c. qui sont les mêmes que ceux des diamètres  $M, N, O$ , &c. ainsi la figure  $A_4 D_{12}$  est égale au demi-cercle  $AHB$ . Or la ligne  $A_1 2 3 D$  divise le parallelograme  $ABCD$  en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne  $AC$  à la ligne  $BD$ ; & partant selon Archimède, la moitié est égale au cercle, auquel ajoutant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace  $A_8 9 DC$ ; &

faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

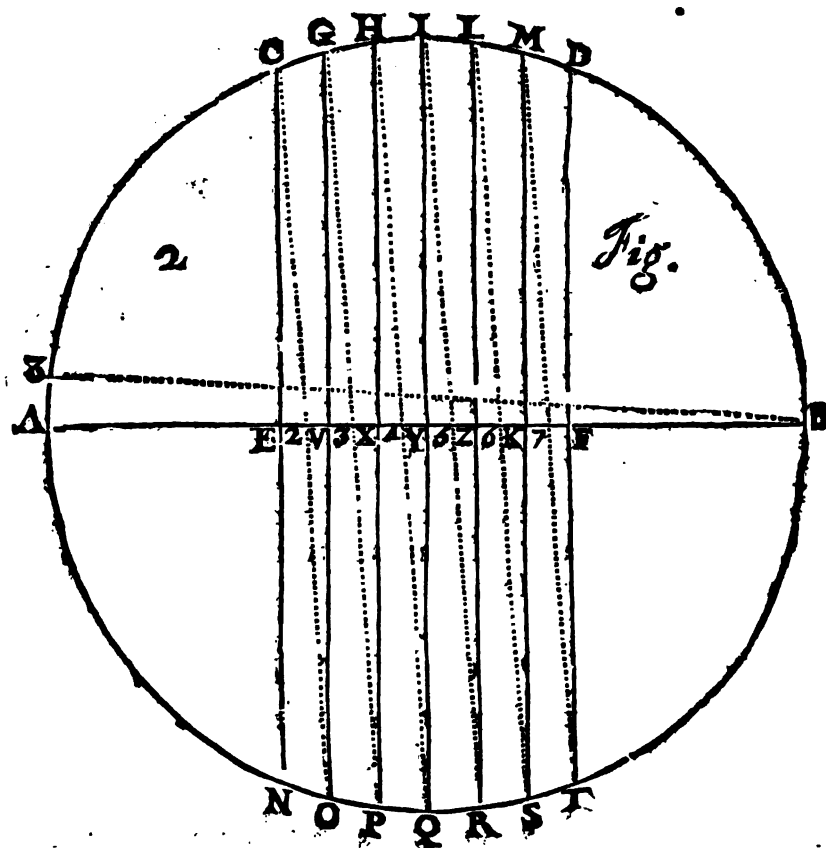
Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considère ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamètre marchant parallèlement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallélogramme (qui doit toujours avoir les quatre côtes égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamètre AB par la ligne AC) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procède en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posés en quelqu'autre raison, comme si lorsque l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcourroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

## P R O P O R T I O N

*de la circonférence du cercle à son  
diamètre.*

**S**OIT le cercle AIBQ, son diamètre AB, & soient tirez les sinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Que les arcs CG, GH, HI, IL, LM, MD soient égaux: je dis. que la ligne EF est à la circonférence CD, comme tous les sinus ensemble, sçavoir CE, GV & tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demi-diamé-

tres. Je le montre ainsi. Je continuë CE jusques en N,  
GV jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la  
diagonale de C en O qui coupe la ligne EV en passant.  
Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je



fais des triangles semblables, auxquels triangles sembla-  
bles les lignes DF & NE ne sont point employées, mais  
cela n'importe à cause de la division infinie dans la-  
quelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par après la

ligne B 8 faisant l'arc 8 A égal à CG; & du point 8 j'abaisse la perpendiculaire 8 A pour avoir un triangle semblable aux triangles C 2, E, G 3 V, & aux autres suivans. Nous feignons que la circonférence CD est divisée par infinis sinus, & que la ligne à 8 A étant si proche de la circonférence 8 A, devient elle-même circonférence & égale à 8 A, ou à CG, & à chacune des autres qu'ont été divisées en infini. De plus, nous disons que la ligne B 8 peut être tant approchée par une division infinie de la ligne AB diamètre, qu'elle devient elle-même diamètre.

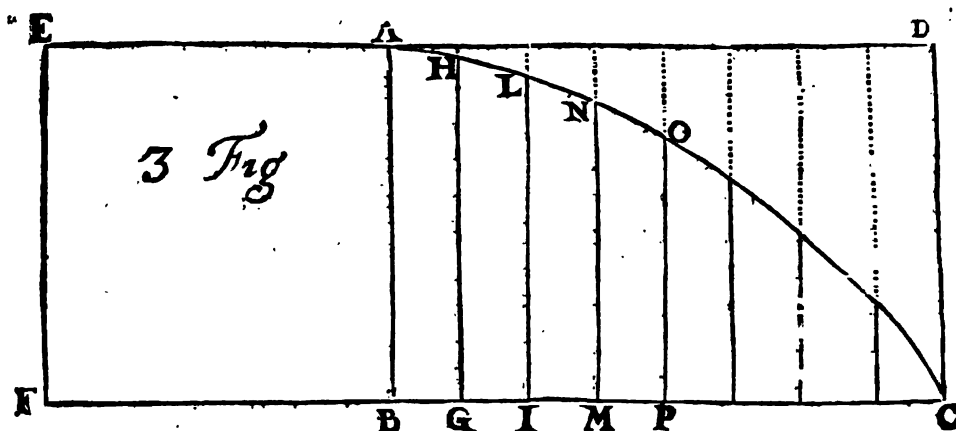
Puis on dira : Comme CE est à E 2, ainsi OV est à V 2, & ainsi de tous les triangles qui suivent la même règle. En après, le triangle CE 2 est semblable au triangle GV 3, parce qu'ils ont les angles C & G égaux, soutenant circonférences égales NO, OP, car toutes sont égales depuis N jusques en T, & partant comme tous les doubles sinus CN & autres sont à la ligne EF, ainsi CE à E 2 : or comme CE à E 2, ainsi B 8, qui est devenu diamètre, à 8 A devenu circonférence, qui sera égal à CG & aux autres. Ainsi, comme tous les sinus à la ligne EF, ainsi le diamètre B 8 devenu diamètre, à 8 A devenu circonférence; & au lieu de dire 8 A, je dis CG; & coupant les antécédens en deux, je dis, comme les sinus d'enhaut à la ligne EF, ainsi le demi-diamètre ou sinus total à CG; & multipliant CG autant de fois que la ligne CD contient de divisions, tous les sinus d'enhaut seront à EF, comme autant de demi-diamètres ou sinus totaux qu'il y a de parties égales à CG depuis C jusques en D, sont à la circonférence CD : & changeant, comme tous les sinus d'enhaut sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres, ainsi la ligne EF est à la circonférence CD.

Que si la ligne EF avoit été le demi-diamètre, & que

les sinus eussent été abaissés du quart de la circonférence, le demi-diamètre eût été au quart de la circonférence comme tous les sinus divisans la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres.

**FIGURE COURBE**  
*égale au Quarré.*

**S**UPPOSANT que le demi-diamètre du cercle est quart de cercle comme tous les petits sinus infinis à tous les sinus totaux, c'est-à-dire, autant de petits sinus à autant de sinus totaux : je trouve que le quarré du demi-diamètre est égal à la figure qui est faite par tous les sinus posés à angles droits sur la circonférence; car en la figure ABC, les lignes GH, IL, MN, PO, qui sont les



sinus de toute la circonférence BC, font par l'extrémité de leur sommet la ligne AC; & continuant de faire & prolonger lesdits sinus en sorte qu'ils soient égaux au sinus total ou demi-diamètre, ils forment la figure ABCD. Je fais aussi sur AB son quarré ABEF.

Puis

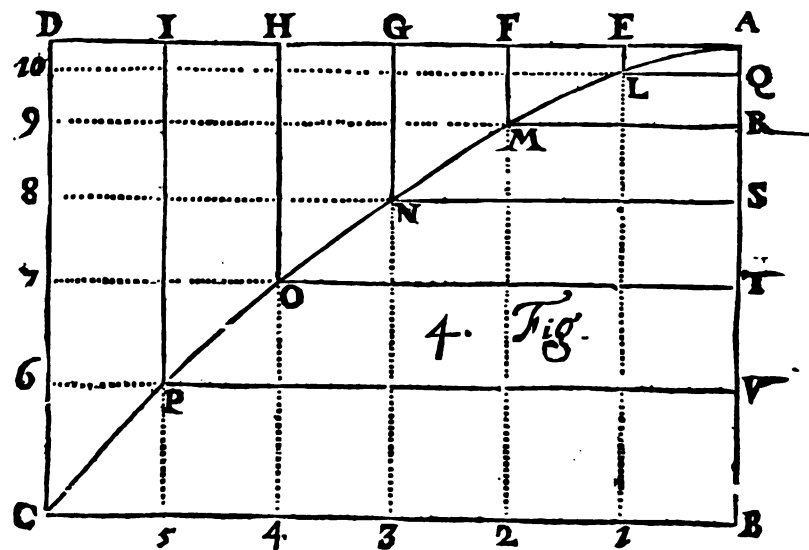
Puis je dis : Comme le demi-diamètre AB est à la circonférence BC, c'est-à-dire au quart de la circonférence, ainsi tous les sinus sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres; & par les infinis, comme la figure ABC fera à la figure ABCD composée des infinis sinus totaux & du quart de la circonférence BC; donc, comme le demi-diamètre est à la circonférence, ainsi la figure ABC est à la figure ABCD. Mais comme la ligne AB est à la ligne BC, ainsi le quarré d'icelle est au rectangle fait de AB & BC; donc la figure ABC est à la grande ABCD comme le quarré ABEF est au rectangle ABCD; ainsi le quarré de AB a même raison au rectangle AC que la figure ABC; & partant le quarré de AB qui est ABEF est égale à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

### DE LA PARABOLE.

**S**OIT la Parabole BALMNOPC, le sommet A, le diamètre AB, la ligne touchante AD, laquelle soit divisée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points soient tirées les lignes parallèles au diamètre AB jusques à la ligne CB, sçavoir E<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, G<sub>3</sub>, &c. & des points où lesdites lignes coupent la Parabole, soient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR sont entr'elles comme le quarré de la ligne LQ au quarré de la ligne MR; & la ligne AR est à AS comme le quarré de MR au quarré de NS, & ainsi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD étant divisée en parties égales, & les parties dicelles étant égales aux lignes ordonnées, sçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'ensuit que chaque quarré d'icelles lignes surpassera le précédent selon la progression des nombres impairs, que les quarez seront faits des côtez differens

258 TRAITÉ DES INDIVISIBLES.

toûjours de l'unité, & que le côté du premier étant 1, les autres côtéz seront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamètre comprises & coupées par les ordonnées sont les mêmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC; & par ainsi ces lignes sont entr'elles comme les quarréz 1, 4, 9, 16, 25, 36 sont entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prises ensemble seront à la ligne DC prise autant de fois qu'icelles lignes, comme la somme des quarréz (suivant l'ordre que j'ai dit, c'est-à-dire, à commen-



cer à l'unité, & suivre toûjours en augmentant de l'unité) est au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne AD, c'est-à-dire, en la présente division, six fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut son côté, c'est-à-dire, par son côté, c'est faire un cube : il est donc vrai que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, con-

me la somme des quarez susdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarez, partant le triligne CPONMLAD sera le tiers du rectangle CDAB, & par ainsi la Parabole ABCPONMLA sera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB; ce qui a été démontré par Archimède d'une autre maniere.

Que si nous voulons considerer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faisant que les portions du diamètre soient l'une à l'autre comme le cube au cube, il se trouvera que la même Parabole que dessus, ou plutôt le dehors d'icelle COAD, sera au rectangle ABCD comme la somme des cubes à un quarré-quarré, c'est-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamètre, c'est-à-dire, les petites lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC sont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il se trouvera que la somme de toutes ces lignes seront à la ligne CD prise autant de fois, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'est-à-dire, comme 1 à 5, & par ainsi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5; & de cette sorte on pourra continuer & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela se peut faire de toutes les puissances jusques où on voudra.

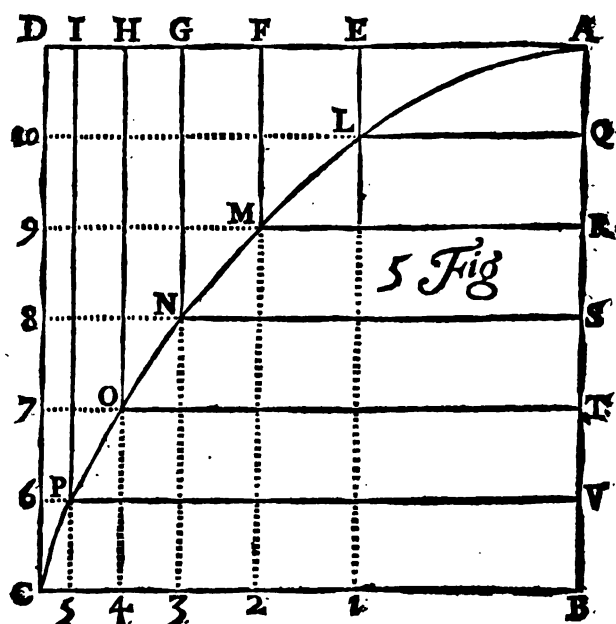
Quant au solide de notre Parabole, il se fait en feignant que tout le rectangle tourne sur son axe, & qu'il se fait un grand cylindre par la révolution de ABCD. La révolution de la première partie EAB<sub>1</sub> se peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres se nomme Rouleau, parce que nous les devons considérer chacune à part, & ceci est pour les grands cylindres; mais en considérant les petits, comme la révolution que fait EAQL, FARM, & tous les autres, nous rejettons ce qui est au dedans de la Parabole, & ne considérons que ce

qui est dehors ; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui sont dans la Parabole ne peuvent faire une partie aussi grande que fait le rouleau  $DI$  ;  $C$  ; & par ainsi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'est de nulle considération dans les indivisibles.

Et par les petites lignes, c'est-à-dire par les portions du diamètre, nous considérons l'espace qui est hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme leurs cercles ; mais les cercles sont entr'eux comme le carré du demi-diamètre de l'un au carré du demi-diamètre de l'autre : comme en notre figure le carré de la ligne  $AE$  est au carré de  $AF$  comme le premier carré au second carré, & le carré de  $AF$  est à celui de  $AG$  comme le second carré au troisième, &c. Mais un carré surpasse son prochain de deux fois son côté, sçavoir le côté du moindre carré, plus l'unité : il arrive donc que toutes les lignes, sçavoir  $AE$ ,  $EF$ ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $ID$  sont toutes différentes des quarrés, c'est-à-dire, chacune prise deux fois plus l'unité ; or toutes ces unités ne se considèrent point dans les indivisibles comme chose finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un côté chacune, puis après nous disons que les petites lignes  $EL$ ,  $FM$ ,  $GN$ , & les autres sont entr'elles comme des quarrés ; nous les considérons comme des quarrés, & disons que l'espace  $ELQ$  vaut deux côtes d'un carré par son carré  $EL$ , & le carré de  $FM$  par le double de son côté  $FA$  fait l'espace  $FMR$ , & pareillement le carré de  $GN$  par deux  $GA$  fait l'espace  $GNS$ , &c. Or un carré par deux fois son côté vaut deux fois le cube ; donc toutes ces petites lignes ensemble, ou l'espace qu'elles contiennent hors la parabole sont comme deux fois la somme des cubes au carré de  $CD$  pris au-

tant de fois qu'il y a de divisions en la ligne DA, c'est-à-dire, au quarré de CD par le quarré du même CD, c'est-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant considerer ABCD, ou la Parabole CPOMAB se tournant sur son axe comme la précédente, mais avec cette difference, que la ligne AB est divisée en parties égales entr'elles. Nous considerons le solide ou cylindre que fait DC qui a pour base le cercle duquel le demi-diamètre est la ligne DA, les petits cy-



lindres ont pour demi-diamètre de leurs cercles les lignes EA ou LQ son égale, MR, NS, OT, PV, &c. or tous ces petits cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, leurs cercles, & les cercles sont entre eux comme les quarez de leurs demi-diamètres : or les

quarrez de ces petites lignes sont entr'eux comme les lignes AQ, QR, RS, ST, TV, sçavoir en égale différence de l'unité, c'est-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes sont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainsi le quarré de LQ étant 1, celui de MR vaudra 2, celui de NS 3, celui de OT vaudra 4, & celui de RV vaudra 5. Or les cylindres étant entr'eux comme les quarrez des demi-diamètres de leurs bases ou cercles, il s'ensuit que tous les quarrez de ces petites lignes sont au quarré de la grande BC pris autant de fois, comme la somme de la suite des nombres naturels, à commencer à l'unité, sont au quarré du dernier.

Mais le conoïde parabolique, c'est-à-dire, le solide fait par la révolution de CNLAB, est au cylindre total, sçavoir à celui qui est fait par la révolution de ABCD, comme toutes les petites lignes à la grande prise autant de fois; partant le conoïde parabolique est au cylindre, comme la somme des nombres, c'est-à-dire le triangle, est au quarré, ou bien comme la moitié à son tout; car la somme des nombres est au quarré (en terme d'indivisible) comme la moitié au tout; comme si la somme est 10 triangle de 4, le quarré est 16, dont la moitié 8 est excédée de 2 par ledit triangle. Or cela passe pour être la moitié de l'autre; car si on continuoît dans la suite des nombres on verroit que le triangle excéderoit toujours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

Maintenant il faut considérer la figure ABCD comme faisant son tour sur AD, lors la ligne CD sera le demi-diamètre de la base ou cercle du cylindre total: les lignes PI, OH, NG, MF, LE sont les demi-diamètres du cercle ou base de chacun de leurs cylindres. Or par la propriété de la Parabole, la ligne EL est à FM comme le quarré au quarré, & ainsi toutes les autres petites

lignes de suite ; partant le quarré de EL sera au quarré de FM comme un quarré-quarré à un quarré-quarré , & ainsi toutes les autres petites ; donc toutes ensemble elles seront entr'elles comme le quarré-quarré de DC pris autant de fois qu'il y a de petites lignes , c'est-à-dire , comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube ; & telle est la raison du solide fait par la révolution de CDA au cylindre total fait par la révolution de CB, c'est-à-dire , qu'ils sont entr'eux comme 1 à 5.

Maintenant nous considérons que la figure tourne sur la ligne CD parallèle à l'axe. Par cette révolution la ligne AD est le demi-diamètre de la base ou cercle du grand cylindre ; les lignes 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P sont chacune le demi-diamètre du cercle ou base de leur cylindre qui sont l'une à l'autre comme leursdites bases ou cercles , & les cercles sont entr'eux comme les quarréz desdites lignes : donc tous les quarréz de ces petites lignes seront au quarré de la grande ligne prise autant de fois , comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raison des petits quarréz aux grands quarréz , laquelle je cherche par une grandeur qui leur soit égale , & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de QL moins le rectangle de Q 10 QL pris deux fois ; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9 , & celui de MR moins le rectangle de 9 RM pris deux fois , & ainsi des autres jusques à l'infini. Or faisant la comparaison , nous disons que les quarréz de Q 10 & QL comparez au seul quarré Q 10 sont égalité de raison entre les deux grands qui sont égaux : le même soit entendu de tous les autres quarréz. Les grands étant égaux , il ne reste qu'à connoître la valeur des petits LQ, MR, &c. Mais nous avons vû ci-devant qu'ils sont au grand quarré comme la moitié au tout : si donc nous joignons un tout avec sa moitié , & le comparons

#### 264 TRAITE' DES INDIVISIBLES.

à un autre tout, nous ferons une raison de 3 à 2. Posons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui est composé du grand & de sa moitié vaudra 3; partant la raison sera de ce dernier au premier de  $\frac{2}{3}$  ou de 3 à 2; & poursuivant, on ôtera ce qui étoit de trop dans les deux quarrés mis ci-dessus pour trouver la valeur du quarré  $L_{10}$ , & nous avons dit que deux fois le rectangle  $Q_{10} QL$  étoit de trop par-dessus le quarré  $L_{10}$ , & ainsi des autres; il faut donc ôter les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour même hauteur  $Q_{10}$ , donc ils seront entr'eux comme leurs bases ou petites lignes, & les solides entr'eux comme leurs bases. Mais nous avons vû que ce solide fait par le tour de la parabole étoit le tiers du cylindre total: or il faut ôter deux fois le rectangle, partant il faudra diminuer de deux tiers la raison que nous avons trouvée de 3 à 2, & mettant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de  $\frac{2}{3}$  on en ôtera  $\frac{2}{3}$  ou  $\frac{4}{6}$ , & restera  $\frac{2}{6}$  pour la valeur de  $CAB$  tourné sur  $DC$ , & le reste au cylindre entier, sçavoir  $CAD$ , vaudra  $\frac{1}{3}$  du grand cylindre  $ABCD$ .

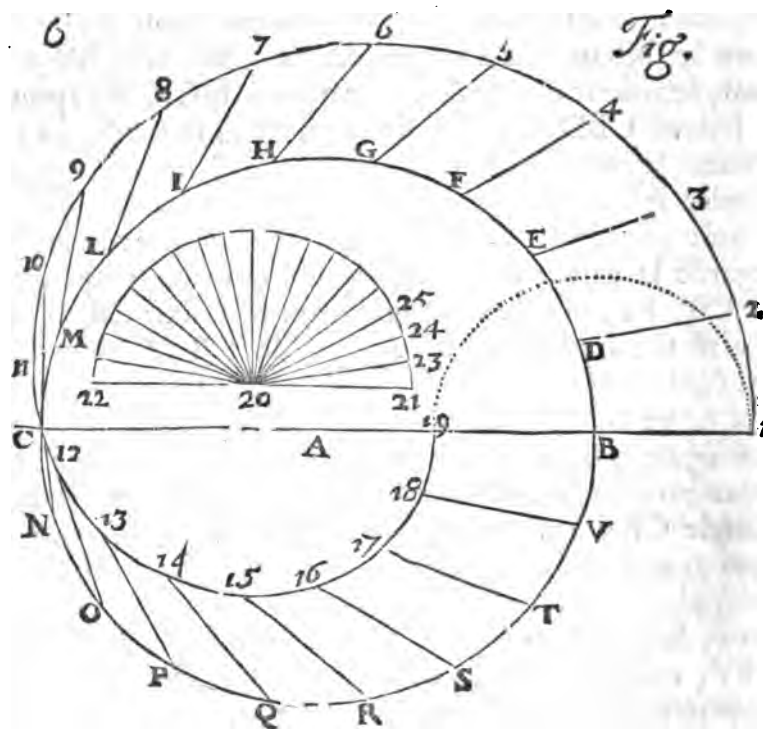
#### DE LA CONCHOÏDE.

**L**A Conchoïde se fait, quand d'un point on tire plusieurs lignes qui coupent une même ligne soit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne sont toutes égales, telles que sont  $B_1, D_2, E_3, F_4, G_5$ , &c. tirées par le moyen du cercle  $CGBR$ , divisé (selon la règle des indivisibles) en parties infinies égales, & par icelui a été composée la Conchoïde  $19C1$ ; en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle jusques à ladite Conchoïde sont toutes égales. Or toutes ces lignes qui divisent la circonférence du cercle commençant au point  $C$  & finissant

finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divise tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré ( quoique dans le fini il y ait quelque chose à dire ; ) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur CBD ou CBV son égal, comme le quarré de C 1 au quarré de CB. En après, le secteur CBD ou CBV son égal est au secteur C 19 18 comme le quarré de CB au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarez de CB, B 1, plus le rectangle deux fois sous CB B 1 ; le quarré C 19 est égal aux quarez de CB, B 19 ou B 1 son égal ( car B 19 commence à la circonference du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit être égale à B 1 qui part de la même circonference, & va au point 1 de la Conchoïde ) moins deux fois le rectangle CB B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré CB deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois ; par ainsi le secteur C 1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs CBD, CBV, comme deux fois les quarez CB, B 1 à deux fois le quarré CB, & prenant la moitié, le quarré CB — le quarré B 1 sera au quarré CB comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV ; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarez CB, B 1 au quarré CB, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV.

Je fais un demi cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier ; & au lieu de compter le quarré B 1, je dis le quarré 20 21 ; donc comme le quarré CB — le quarré 20 21 sont au quarré CB ; ainsi l'espace du cer.

cle & demi-cercle ensemble sont à l'espace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde est au cercle comme le quarré CB  $\div$  le quarré BI ou leurs

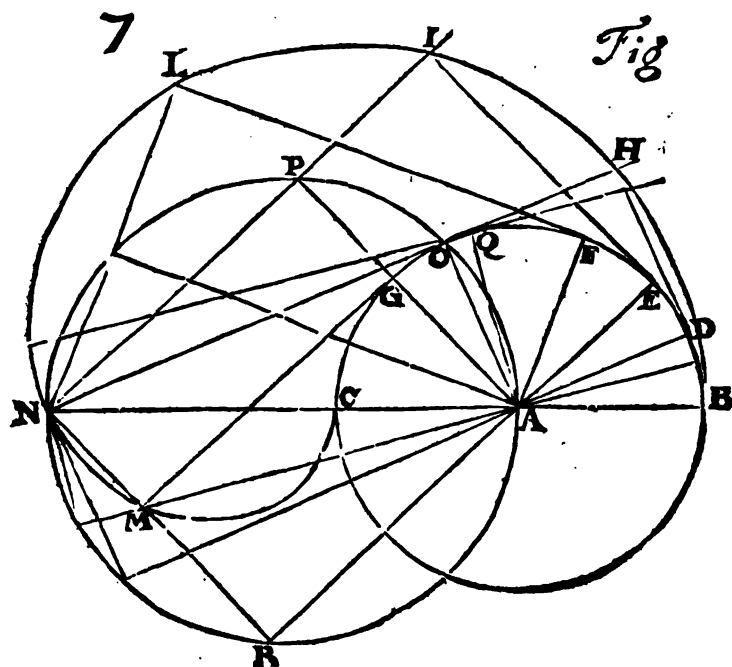


secteurs, est au quarré CB; par ainsi, toute la Conchoïde est au cercle en même raison que le cercle & demi-cercle est au même cercle; & partant la Conchoïde est égale au cercle & demi-cercle pris ensemble.

### Conchoïde.

**S**OIT la base d'un cône oblique le cercle BFC duquel le centre est A; le sommet du cône est en l'air, avec telle obliquité, que de ce sommet la perpendicu-

laire tombe sur le point N. Nous supposons par les indivisibles, que par tous les points du cercle soient tirées des touchantes, comme DH, EI, FL, GM, &c. Nous disons que si du sommet du cône on tire une perpendiculaire sur chacune de ces touchantes, & que si du point N sur lequel tombe la perpendiculaire tirée du sommet, on tire une ligne à ce même point de la tou-



chante, l'angle sera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante; & la ligne qui passe par l'extrémité de chacune desdites touchantes & où se fait le susdit angle droit, sçavoir la ligne BHILNMC, se trouve être une Conchoïde.

Pour le prouver, il faut construire un cercle qui ait  
L l ij

pour diametre NA, lequel cercle soit NPOAR, & faire voir que toutes les lignes comprises entre la circonférence APNR & la ligne BHILNMC, sont toutes égales entr'elles; nous prouvons que AOHD est un parallelogramme; car l'angle D est droit, puisque DH est touchante & AD demi-diametre; l'angle H est aussi droit pour avoir été tiré tel du point N sur lequel tombe la perpendiculaire tirée du sommet du cône; l'angle O est droit pour être fait dans le demi-cercle NPOA, & partant le quatrième OAD le sera aussi; & partant c'est un parallelogramme, & les côtez opposez sont égaux; & par ainsi AD sera égale à OH comprise entre l'autre cercle & la ligne courbe, & AD est égale à AB pour être toutes deux le rayon d'un même cercle. Passons outre, & considerons PI EA. L'angle E est droit, étant fait par la touchante; l'angle I est droit, ayant été fait tel par la ligne NI; l'angle P est droit, comme étant fait dans le demi-cercle, & partant le quatrième l'est aussi, & les côtez opposez du parallelogramme, sçavoir PI & AE ou son égale OH, sont égaux; & partant AB, OH, PI sont égales, & ce sont les lignes comprises entre les deux circonferences, sçavoir entre le cercle NPAR, & la ligne courbe BHILNMC, & on prouvera le même de toutes les autres lignes; & partant cette ligne courbe est une Conchoïde.

### DES ANNEAUX.

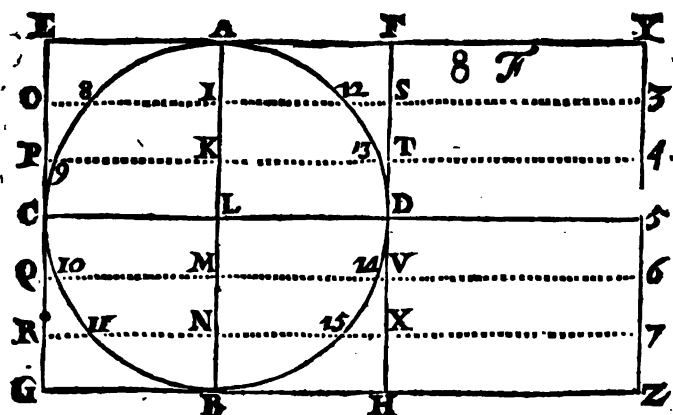
**S**I on décrit alentour d'une figure un parallelogramme ( nous avons pris un cercle en cet exemple ) & qu'on fasse tourner le tout sur un des côtez du parallelogramme, le solide fait par ce parallelogramme est au solide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme est au plan de la figure.

Nous expliquerons ceci par un cercle autour duquel est écrit le parallelogramme EFHG : au milieu du cercle on a tiré la ligne AB parallele au côté FH du parallelogramme ; la nature de cette ligne doit être telle , que toutes les lignes tirées dans le cercle soient coupées en deux également par cette ligne. Supposant donc que le tout a tourné sur la ligne FH , dans ce tour le parallelogramme a fait pour solide un cylindre , & le cercle a fait pour solide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus strictus* , c'est-à-dire , qu'il se diminue peu à peu en sorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux solides sont égaux entr'eux , excepté les vuides , qui étant remplis au grand solide sont de plus en icelui qu'au petit ; il faut donc tirer lesdits vuide du grand pour sçavoir ce qu'il reste pour le petit , & tout se mesure par les quarez des lignes qui sont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme , & je considère que cette moitié fait un cylindre dans sa révolution , & que le demi-cercle fait une figure différente de ce cylindre , de ces petits espaces qu'il faut ôter du cylindre. Considérant les quarez du cylindre , je dis que le quarré de IS est égal aux quarez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12 ; le quarré TK est égal aux deux quarez T 13 , K 13 ; plus deux fois le rectangle K 13 T ; le même se doit entendre des autres quarez appartenant au cylindre AFHB. Mais si nous ôtons chaque quarré qui compose le vuide , & qui sont hors le cercle de chacun des quarez du solide , il nous restera tout le dedans du cercle , c'est-à-dire , du petit solide. Si donc du quarré SI on ôte le quarré S 12 , il restera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I : ceci est tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du second quarré du cylindre le quarré T 13 , il me reste le quarré K 13 plus deux fois le rectangle

K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ai de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle, S 12 I je joins le quarré avec une fois le rectangle, & par-là j'ai le rectangle SI 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considere ce qu'elle fait quand le tout tourne sur la même ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils surpassent les petits quarez I 8, K 9, & les autres qui sont dans le demi-cercle, & je dis ainsi: Le quarré S 8 est égal aux deux quarez SI, I 8 plus deux fois le rectangle SI 8; le quarré T 9 est égal aux quarez TK, K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres. Or il faut ôter de tous ces quarez les quarez du cylindre, sçavoir de SI, TK, & autres, & nous aurons de reste le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle SI 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres, & ceci se doit joindre à l'autre espace du demi-cercle.

Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reste à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle SI 12 que j'avois déjà une fois, & partant je l'ai deux fois. Au second demi-cercle, les quarez 8 I, 9 K étant ôtez il m'est resté deux fois le rectangle SI 8 qui est le même que le précédent, & par ainsi j'aurai quatre fois le rectangle SI 8; donc quatre fois ce rectangle sera au quarré de SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou côtes du rectangle, & je dis que le rectangle tout seul SO par 8 12 est au quarré SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini sont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total; ils seront donc entre-

eux comme leurs bases ou lignes , c'est-à-dire , comme l'espace de ces lignes comprises dans le cercle est à l'espace des grandes lignes qui composent le parallelogramme : donc comme le solide au cylindre , ainsi le plan du solide est au parallelogramme ; ce qu'il falloit prouver.

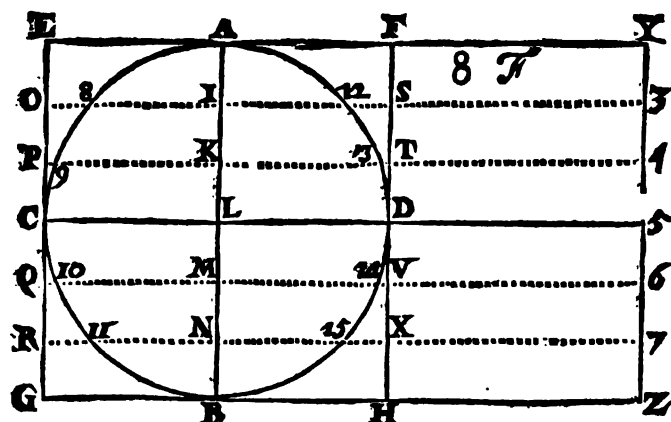


Nous trouverons la même chose en faisant tourner toute la figure sur la ligne YZ. Il faut premièrement examiner ce que fait ABZY par sa révolution , & ce qu'il diffère d'avec ABHF. Le carré ZB vaut les quarrés de ZH & HB plus deux fois le rectangle ZHB ; le carré 7N est égal aux quarrés 7X, XN plus deux fois le rectangle 7XN, & ainsi de chacun des autres grands quarrés. Il en faut ôter tous les quarrés qui composent l'espace HY, sçavoir le carré FY, S3, T4, & les autres, lesquels étant ôtez, resteront le carré SI plus deux fois le rectangle 3SI, & le carré de TK plus deux fois le rectangle 4TK ; prenant le carré SI, & le joignant à l'un des rectangles, je ferai le rectangle 3IS, & le rectangle 3SI ; puis à 4T, si on joint le carré de KT à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4KT, & le rectangle 4TK. Il faut retenir tout ceci, & passer

à la considération du solide qui se fait par la révolution de AB GE tournant sur même YZ. Nous disons que le quarré de 3 O est égal aux deux quarréz de 3 I & IO plus deux fois le rectangle 3 IO ; que le quarré 4 P vaut les quarréz de 4 K ; KP plus deux fois le rectangle 4 KP, & ainsi des autres. De la valeur de ces quarréz il en faut ôter tous les quarréz qui remplissent l'espace ABZY, sçavoir les quarréz 3 I, 4 K, 5 L, & les autres ; & partant il reste le quarré OI plus deux fois le rectangle 3 IO ; & ajoutant au rectangle 3 SI qui étoit resté au calcul de l'autre cylindre le quarré OI, je ferai le rectangle 3 IO ; & par ainsi dans le précédent cylindre j'aurai deux fois le rectangle 3 IS ; & dans ce dernier, le quarré OI étant ôté, il reste deux fois le rectangle 3 IO qui est le même que 3 IS ; partant le tout ensemble sera quatre fois le rectangle 3 IO ; partant le quadruple du rectangle 3 IO sera au quarré de EY, comme le cylindre, ou plutôt le rouleau GEFH est au cylindre total EGZY.

Il faut maintenant considérer ce que fait le cercle par sa révolution, tournant sur la même ligne YZ, & le comparant au cylindre total ; ce qui se doit faire en considérant une portion, sçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premièrement la moitié A 12 15 B', & dirons : Le quarré de 3 I vaut les quarréz 3 12, & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I ; le quarré de 4 K vaut les quarréz 4 13, & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K, & ainsi des autres. De cette équation il faut ôter les quarréz 3 12, 4 13, & tous les autres qui sont hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajoute le quarré I 12, & je fais le rectangle 3 I 12, & le rectangle 3 12 I. J'ajoute pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K, & je fais le rectangle 4 K 13, & le rectangle 4 13 K ; ce qu'il faut retenir afin de l'ajouter

à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 38 vaut les quarréz de 31 & 18 plus deux fois le rectangle 318; le quarré 49 vaut les quarréz 4K & K9 plus deux fois le rectangle 4K9. Or il faut ajouter tout ceci à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3112 & 3121; & ajoutant au rectangle 3121 le quarré 81, je fais le rectangle 318, tellement que j'ai le rectangle 3112 deux fois, & j'ai trouvé en la discussion de la seconde



moitié (les vuides étant ôtez, c'est-à-dire, les quarréz de 13, K4 &c.) le quarré 81 (que j'ai ajouté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 318 qui est le même que 3112; tellement que j'ai quatre fois le rectangle 318, qui est au quarré de EY comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur YZ, au cylindre total. Le rectangle 4K13 pris quatre fois est au même quarré EY comme le solide du cercle est au cylindre total fait par EGZY.

Il faut considérer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme EGHF au grand cylindre. La proportion est comme quatre fois le rectangle 310 au grand quarré EY, ainsi le rouleau

EGHF au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle  $310$  trouvé dans le rouleau GF, est au grand quarré EY, comme le même rouleau GF au grand cylindre GY. Ensuite j'ai quatre fois le rectangle  $318$  qui est au grand quarré EY, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand quarré est consequent en l'une & en l'autre des comparaisons; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux; mais les rectangles sont tous d'égale hauteur; rejettant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau: or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent l'espace de chaque figure; donc comme le solide ou anneau est au rouleau GF, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan GF; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans: maintenant nous considerons si les solides sont égaux ou non. Je parlerai premierement du cylindre que fait le parallelogramme EFHG quand il roule sur la ligne FH: sa base est un cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH; sa hauteur est la ligne HF: au lieu du cercle je prens ce qui lui est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diametre pour un côté, & la moitié de la circonference pour l'autre; & par ainsi j'ai trois côtez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je pretens être égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme EFHG, pour hauteur la circonference d'un cercle duquel le demi-diametre est LD. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur; il faut donc considerer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la

demi-circonférence du cercle qui a pour demi-diamètre la ligne GH : dans l'autre solide j'ai les lignes GH, HF, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diamètre la ligne LD. Mais dans l'une & dans l'autre j'ai deux lignes communes, sçavoir GH & HF, entre lesquelles il ne peut avoir autre raison que d'égalité, puisqu'elles sont égales, & partant on les peut ôter, & la composition des raisons demeurera entre la circonférence d'un cercle & la demi-circonférence de l'autre. Mais les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres : or le diamètre total du cercle entier qui est DC est égal au demi-diamètre GH; partant la circonférence entière appartenant à DC sera égale à la demi-circonférence appartenant au demi-diamètre GH; & par ainsi le cylindre sera égal au solide; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considérer toute la figure, lorsque le parallélogramme EYZG se tournant sur la ligne YZ fait le grand cylindre. Je dis que le rouleau GF est égal au solide qui a pour base le parallélogramme GF, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui aura pour demi-diamètre la ligne L 5. Je dis encore que l'anneau (c'est-à-dire le solide qui se fait par la révolution du cercle quand le tout roule sur YZ) est égal au solide qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui a pour demi-diamètre la ligne L 5.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre solides suivans sont proportionnaux, sçavoir le rouleau qui se fait quand le parallélogramme EFHG roule sur la ligne YZ. Le second est l'anneau qui se fait par le cercle quand le grand parallélogramme GY tourne sur la ligne YZ. Le troisième est celui qui a pour base le parallélogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamètre est la ligne ZB.

Et le quatrième est celui qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne L 5, & par ainsi, faisant voir comme le premier desdits solides est égal au troisième, le second par consequent doit être égal au quatrième. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle ZBH est au quarré de GZ, ainsi le rouleau GF est au grand cylindre GY. Maintenant il nous faut examiner comment la figure qui a pour base le parallelogramme EF HG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne L 5, est égale au même grand cylindre GY.

Nous sçavons que les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur : je considere quelles sont les parties de l'un & de l'autre des solides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, sçavoir la ligne GZ qui est le demi diametre de sa base qui est un cercle, l'autre ligne est HF. Mais d'autant que nous avons besoin de trois côtez en ce solide ou grand cylindre, pour le comparer au solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle duquel la ligne L 5 est demi-diametre, lequel solide a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre. Pour avoir trois côtez au grand cylindre, au lieu de prendre son demi-diametre qui représente son cercle, je prens ce qui est égal au cercle, sçavoir le demi-diametre GZ, & la demi-circonference du même cercle (le rectangle fait de ces lignes est égal au cercle selon Archimède.)

J'aurai donc trois côtez ou lignes au grand cylindre, sçavoir GZ, HF, & la demi-circonference du cercle dont GZ est le demi-diametre. Il y a donc dans ces deux solides deux côtez qui sont semblables, sçavoir HF en chacun d'iceux ; & partant ils ne servent de rien pour la

composition des raisons qui demeurera entre les lignes GH, GZ antécédent & conséquent, & la circonférence entière du cercle qui a L  $\zeta$  pour demi-diamètre, à la demi-circonférence du cercle qui a GZ pour demi-diamètre. Mais d'autant que les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres, au lieu des circonférences je prens le diamètre entier qui est deux fois L  $\zeta$ , & pour la demi-circonférence je pose son demi-diamètre GZ; partant la raison sera composée des raisons de la ligne CH à GZ, & de la ligne L  $\zeta$  doublée à la ligne GZ.

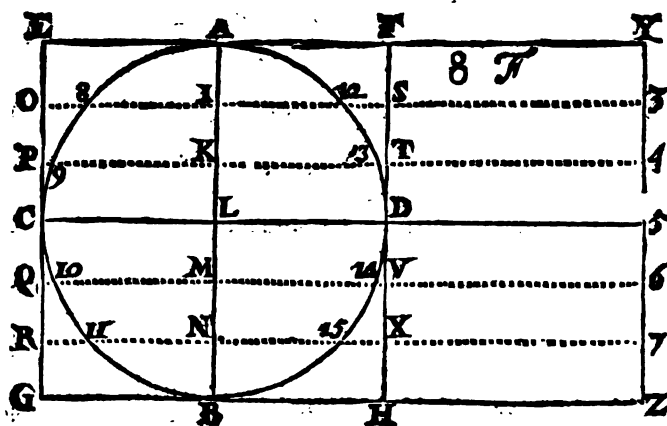
Or si on multiplie les antécédens l'un par l'autre, & pareillement les conséquens, on aura ladite raison composée; donc GZ par GZ, c'est-à-dire le quarré de GZ est au rectangle de GH par le double de L  $\zeta$  ou ZB en ladite raison composée; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de ZB deux fois par GH au quarré de GZ. Au lieu de ZB deux fois par GH, on prendra GH deux fois par ZB: or ZB par GH deux fois, est quatre fois le rectangle ZBG; partant le solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a L  $\zeta$  pour demi-diamètre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle ZBG est au quarré GZ; donc le rouleau & le solide auront même raison au cylindre total; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ est égal au solide qui a pour base le même parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a pour demi-diamètre la ligne ZB.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisième dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatrième seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tour-

ne sur la ligne YZ : l'autre solide est celui qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence du cercle duquel le demi-diamètre est la ligne Ls.

Il faut maintenant voir ce qui se fait quand le roulement se fait sur la ligne AB. Nous avons ici représenté la figure comme un cercle ; le même se doit entendre d'une ellipse : & partant il faut voir ce que fait la sphère qui se forme par la révolution du demi-cercle ABC sur le diamètre AB, ou le sphéroïde qui se forme par la révolution de la demi-ellipse sur la même ligne AB.

Il faut entendre que le quarré I 12 est au quarré de K 13, comme le rectangle BIA est au rectangle BKA,



& le quarré K 13 est au quarré LD, comme le rectangle BKA au rectangle BLA, & ainsi des autres, tant au cercle qu'en l'ellipse. Or, tant la sphère que le sphéroïde qui sont formez par le roulement, sont au cylindre qui se fait en même temps, comme tous les quarrés I 12, K 13 & autres petits au grand quarré BH pris autant de fois. Mais pour la raison des petits quarrés, j'ai pris la raison des petits rectangles qui est la même : il faut donc avoir un grand rectangle pour le comparer aux petits

rectangles, afin de laisser les grands quarez. Je prendrai le rectangle BLA qui vaut le carré de LD ou MV, sçavoir les grands quarez; & pour faire la comparaison, je dis que le rectangle BIA avec le carré de LI est égal au carré de LA ou LD son égal, ou quelque'autre des grands quarez; le rectangle BKA plus le carré de LK est égal au même grand carré LD, & ainsi de tous les petits rectangles qui se pourront faire; partant les grands quarez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarez LI, LK qui vont toujours en diminuant; & par ainsi font une pyramide que nous sçavons être la troisième partie de son parallépipède ou cube. Si donc nous ôtons le tiers, il restera les deux tiers pour la valeur de la sphère ou sphéroïde, qui seront par cette raison les deux tiers de leur cylindre; ce qu'il falloit prouver.

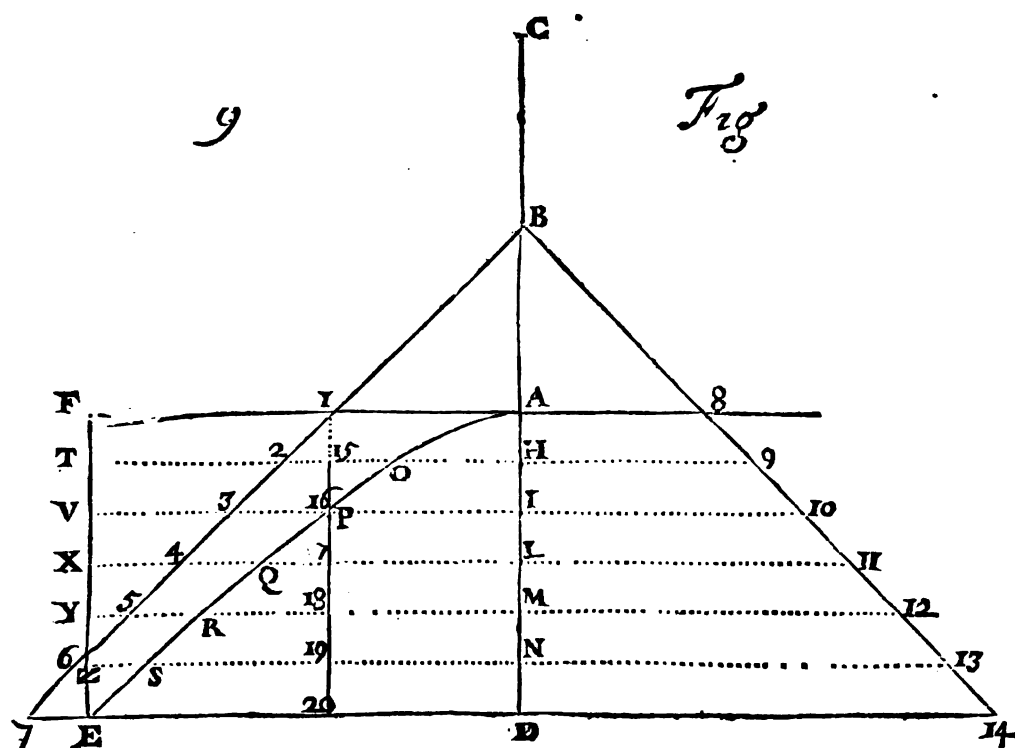
## DE L'HYPERBOLE.

**D**ANS l'Hyperbole AEDBC le sommet est C, c'est-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole opposée; AC est le diamètre transversal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'hyperbole. Il faut voir quand l'hyperbole tourne sur la ligne AD, qui est l'axe, quelle raison le solide ou conoïde hyperbolique qui se fait, peut avoir avec son cylindre, c'est-à-dire, le solide qui se fait quand le parallélogramme FD tourne aussi sur l'axe AD.

Nous sçavons que le conoïde est au cylindre, comme tous les quarez ensemble compris dans l'espace AED, sçavoir le carré de HO, de IP, LQ, & les autres, sont au carré de ED pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reste à chercher la raison des quarez entr'eux avec le grand.

La propriété de l'hyperbole est que le carré  $HO$  est au carré  $IP$ , comme le rectangle  $CHA$  est au rectangle  $CIA$ ; le carré  $IP$  est au carré  $LQ$ , comme le rectangle  $CIA$  au rectangle  $CLA$ , & ainsi des autres; & par ainsi tous les petits rectangles sont au grand rectangle  $CDA$  pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits carrés sont au grand carré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour sçavoir quelle est cette raison, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle  $CHA$  je pose le rectangle  $CAH$  plus le carré  $HA$ ; au lieu du rectangle  $CIA$ , je pose le rectangle  $CAI$  plus le carré  $IA$ , & ainsi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera ensuite la comparaison, premièrement des rectangles  $CAH$ ,  $CAI$ , & des autres petits entr'eux & au grand  $CDA$  pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles sont de même hauteur, sçavoir  $CA$ , & par ainsi, ils seront entr'eux comme leurs bases. Nous avons donc pour les petits rectangles un solide qui a pour hauteur la ligne  $CA$ , & pour base tous les nombres naturels qui composent un triangle. Si au lieu de la ligne  $CA$  je prens sa moitié  $AB$ , j'aurai un solide qui aura pour base le carré de  $AD$ , & pour hauteur la ligne  $BC$ ; ceci est pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, son solide a pour hauteur  $DC$ , & pour base  $DA$  pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'est-à-dire le carré  $DA$ ; partant les deux solides ont tous deux le même carré  $DA$  pour base; & partant nous n'avons à considérer que leur hauteur  $DC$  pour le grand, &  $BC$  pour le petit; partant tous les petits rectangles sont au grand rectangle pris autant de fois, comme  $DC$  est à  $BC$ .

Il reste maintenant à considérer comment tous les petits carrés sont au même grand rectangle. Or tous  
les



petits quarez , ſçavoir ceux de AH , AI , AL , AM , AN ,  
 font une pyramide qui a pour baſe le quarré de AD ,  
 & pour hauteur la même AD. ( car les quarez dimi-  
 nuez à l'infini font une pyramide ) Mais la pyramide  
 eſt le tiers de ſon parallelipede ; c'eſt-à-dire du ſolide  
 qui a pour baſe le même quarré que la pyramide , & qui  
 ſe hauſſe autant que la pyramide , ſçavoir de la ligne  
 DA ; donc au lieu de la hauteur DA , j'en prens le tiers ,  
 & j'ai le ſolide qui a pour baſe le quarré DA , & pour  
 hauteur le tiers de DA ; joignant donc ce tiers de DA

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

N n

avec BC que j'avois trouvé devant, j'ai le tiers de DA plus BC ou AB son égale, à la toute DC.

Pour le faire plus élégamment, je dirai : Comme le tiers de AG ( car j'ai ajouté à AC la ligne CG égale à BC ) avec le tiers de DA qui est comme le tiers de DG à la ligne DC ; ainsi le conoïde hyperbolique ou petit solide est au cylindre fait par AFED. Que si nous voulons avoir la raison du cône qui se feroit , si le triangle AED se tournoit sur la ligne DA ( pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite AE. ) Euclide dit que le cône est le tiers de son cylindre : prenant donc le tiers de la ligne DC, elle sera au tiers de la ligne DG, ou toute la ligne DC à toute la ligne DG, comme le cône au conoïde hyperbolique ; ce qu'il falloit montrer.

*Autre spéculation sur l'Hyperbole.*

**D**U centre de l'Hyperbole B j'ai tiré les asymptotes B 7, B 14. Si par le point A je tire la touchante 8 A 1, & que je tire d'un asymptote à l'autre infinies parallèles, comme les lignes 9 H 2, 10 I 3, & les autres, le rectangle 8 A 1 est égal au rectangle 9 O 2, 10 P 3; & ainsi tous ces rectangles sont égaux entr'eux. Quand le triangle B 7 D tourne sur DA, il se fait un cône qui est égal à tous les quarez qui sont dans le plan, savoir au quarré de A 1, H 2, I 3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarez j'en ôte premièrement le vuide 1 B A, & tout ce qui est au dehors du plan EDA, il me restera le conoïde hyperbolique qui se fait par EDA tournant sur DA. Or le quarré H 2 vaut le rectangle 9 O 2 plus le quarré de HO; le quarré I 3 vaut le rectangle 10 P 3 plus le quarré de IP; le quarré de L 4 vaut le rectangle 11 Q 4 plus le quarré de LQ, & ainsi des autres. Mais chacun des re-

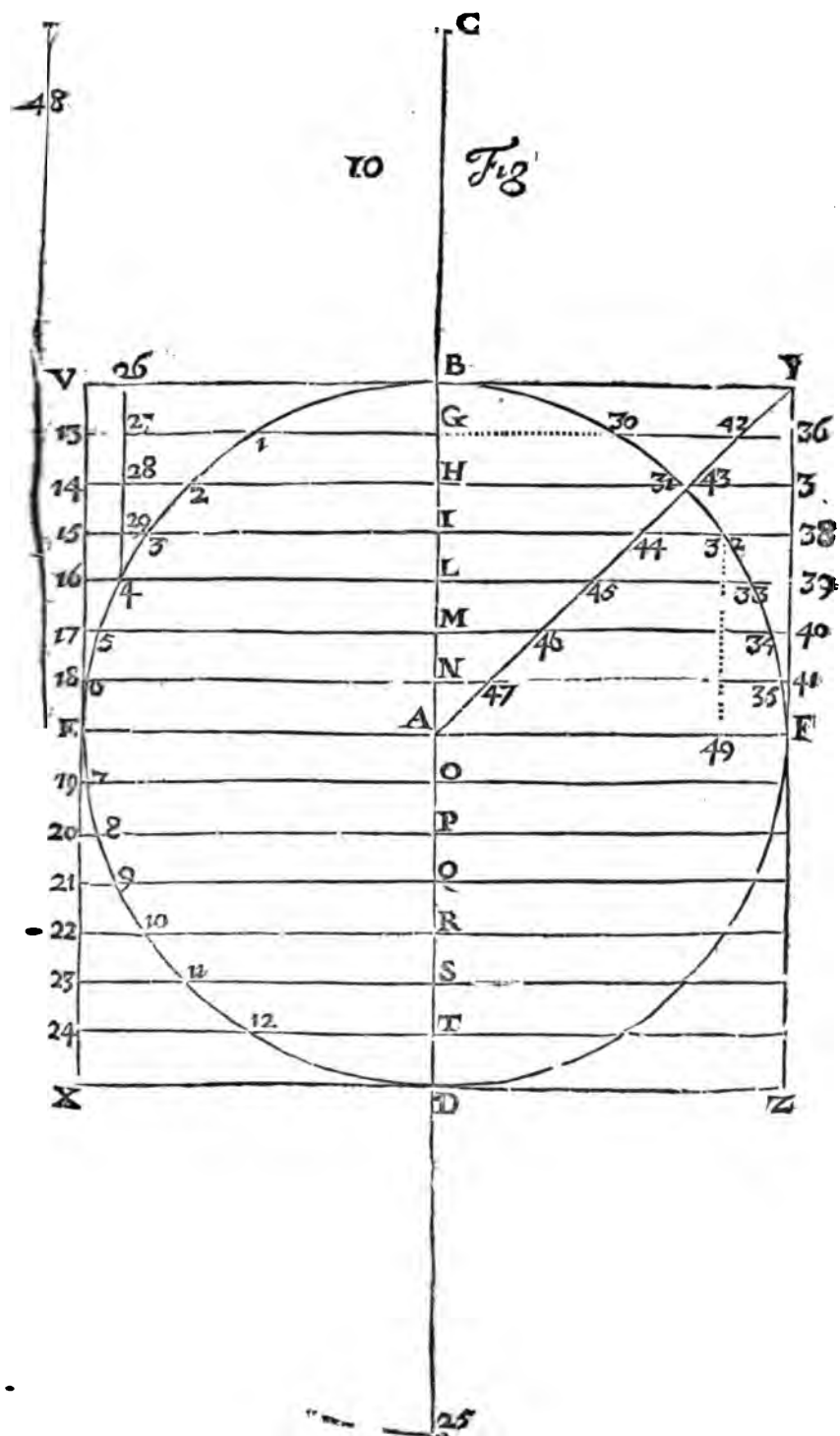
ctangles est égal au quarré de  $AI$ , lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, fera le cylindre  $120 DA$ ; partant ôtant ce cylindre, il restera les quarrés de  $HO$ ,  $IP$ ,  $LQ$ , qui sont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

**PROPORTION DE LA SPHERE**  
*ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre*  
*circonscrit, & au Cône inscrit.*

**O**N considerera ici ce que fait la figure qui est en la page suivante tournant sur  $BD$ , & ne prenant que la portion  $26 BL4$  que fait le cylindre & la portion de la Sphère ou Sphéroïde qui se fait par la révolution de la figure  $41 BL$ . Le quarré de  $G1$  & les autres petits sont au grand quarré  $4L$  pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la sphère ou sphéroïde (car c'est la même raison en l'une & en l'autre) est au cylindre  $26 BL4$ . Il est donc question de chercher la raison de ces petits quarrés au grand quarré. Or tous les petits quarrés sont au grand, comme les rectangles  $DLB$ ,  $DIB$ ,  $DHB$ ,  $DGB$  sont au grand rectangle  $DLB$ ; partant tous lesdits petits rectangles sont au grand rectangle  $DLB$  pris autant de fois, comme tous les petits quarrés sont au grand quarré pris autant de fois. Pour trouver la raison des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui valent autant, & je dis ainsi : Le rectangle  $DBL$  moins le quarré  $BL$  vaut le rectangle  $DLB$ ; le rectangle  $DBG$  moins le quarré  $BG$  vaut le rectangle  $DGB$ ; le rectangle  $DBH$  moins le quarré  $BH$  vaut le rectangle  $DHB$ ; le rectangle  $DBI$  moins le quarré  $BI$  vaut le rectangle  $DIB$ ; partant dans les petits rectangles je trouve un solide qui a pour hauteur

DB, & pour base les petites lignes LB, LG, LH, LI qui font la somme de nombres naturels qui est un triangle lequel est toujours la moitié de son quarré; partant je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainsi j'aurai un solide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ai ôté la moitié de DB) & pour base le quarré de LB comme l'autre solide. Pour le grand rectangle, sçavoir DLB pris autant de fois, il compose un solide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour base le même quarré LB. Les bases étant égales, il n'y a que les hauteurs à considérer, sçavoir DB & BL. Mais il faut ôter des petits rectangles les quarrés qui étoient de moins: or ces petits quarrés composent une pyramide qui a pour base le quarré de LB, & pour hauteur LB. Au lieu de la pyramide je prens un parallepipede qui lui soit égal: je retiens le même quarré LB, & pour hauteur le tiers de LB, qui est la hauteur du parallepipede égal à la pyramide (car toute pyramide est le tiers de son parallepipede.) Il faut ôter ce solide de l'autre qui a même base, & partant il suffit d'ôter la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le solide fait par les petits rectangles. Il reste maintenant à chercher le solide du grand rectangle. Or ce solide n'est autre que celui qui a le quarré LB pour base, & DL pour hauteur. Celui-ci n'a point d'autre base que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur DL en celui-ci, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car DA moins le tiers de LB vaut le tiers de la ligne 25 L) est à la ligne DL, ainsi le solide fait par la figure 42 BL est à son cylindre fait par le parallelogramme 264 LB.

Que si nous voulons avoir le cône qui se feroit par la même révolution, si on tiroit une ligne B4. Nous sçavons que le cône est le tiers de son cylindre; je pren-



drai donc le tiers de DL (laquelle représente le cylindre) & je dirai que comme le tiers de la ligne 25 L est au tiers de la ligne DL, ainsi notre solide est au cône: or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entière à la ligne entière; partant le solide sera au cône, comme la ligne 25 L est à la ligne DL; ce qu'il falloit trouver. Dans la même figure il faut considérer que, lorsqu'elle tourne sur la ligne AB quand le cylindre VEFY se fait, il se fait aussi un solide par la révolution du plan ABF, qui s'appelle un creux. Il se fait encore un autre solide par le plan B 30 FY. Nous en avons encore un autre qui se fait sur le triangle AYB qui est un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous lesdits solides.

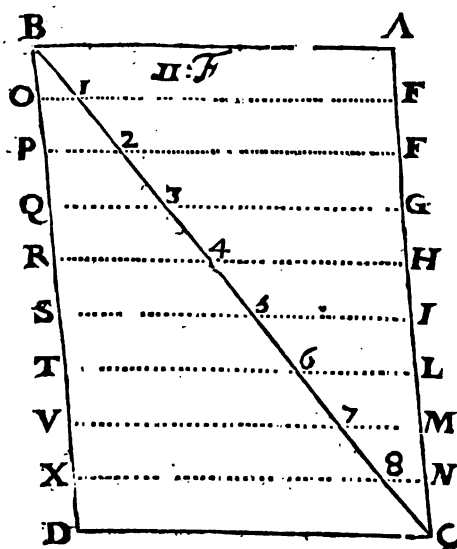
Les divisions étant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures sont entr'elles comme les quarrés de ces lignes sont entr'eux. Or pour ce qui est du cône que nous voulons égalier au solide fait par B 30 FY, il faut dire que la grande ligne du cylindre total est coupée en deux également au point I, sçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'ôte le quarré I 32, il me reste le rectangle 15 32 38 qui appartient au solide B 30 FY.

Puis après nous entrons dans les propriétés de l'ellipse; (car ce que je conclurai s'entendra du cercle comme de l'ellipse.) Le diamètre EF, le diamètre BD & le côté droit du diamètre EF, sçavoir la ligne 48, sont trois proportionnelles; & la première EF est à la troisième 48, comme le quarré de la première EF est au quarré de la seconde DB. De plus, le rectangle E 49 F est au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne EF est à la ligne 48 côté droit d'icelle; partant le rectangle E 49 F est au

quarré 49 32, comme le quarré EF est au quarré DB, ou le quarré de AF au quarré de AB. Au lieu de AF je pose son égale BY; donc le quarré BY est au quarré BA, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré IA égal au quarré 49 32. Mais le quarré BY est au quarré BA, comme le quarré I 44 est au quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera au quarré IA, comme le quarré I 44 est au même quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera égal au quarré I 44; & par ainsi le cône sera égal au solide de B 30 FY. Mais le cône est le tiers de son cylindre; si donc j'ôte le tiers du cylindre total, il restera les deux tiers pour le solide ou le creux qui se fait par le plan AFB, qui est ce qu'on cherchoit.

Or, non-seulement le cône est égal au solide extérieur, mais chaque partie est égale à chaque partie; c'est-à-dire que le solide fait par N 47 46 M, est égal au solide fait par 35 41 40 34; le solide 45 L M 46 est égal au solide 33 39 40 34, & ainsi des autres. Par tout ceci nous venons à la connoissance du centre de gravité de tous ces solides; car le centre de gravité du cylindre AY est au milieu de la ligne AB: or le centre de gravité du cône est aux  $\frac{3}{4}$  de la ligne AB; le centre de gravité du solide qui lui est égal, se trouve au même lieu dans la ligne BA aux  $\frac{1}{4}$  d'icelle; partant, selon Archimède, le centre de gravité de la sphère ou sphéroïde restant du cylindre sera connu, parce qu'il est en la raison réciproque des deux solides, sçavoir de la sphère ou sphéroïde, au solide de dehors, c'est-à-dire à B 30 FY, aux lignes qui sont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit solide, & à la ligne qui part du centre de gravité du même grand cylindre au centre de gravité de la figure restante que je cherche, qui est de la sphère ou sphéroïde.

**PROPORTION DU COSNE**  
*au Cylindre.*



**E**N cette figure le triangle est au parallelogramme, comme tous les nombres naturels sont au quarre du plus grand; c'est-à-dire, comme 1 à 2. Que si vous le faites tourner sur la ligne BD, le cône qui se fera de BDC sera au cylindre qui se fera sur ABDC comme 1 à 3; selon Archimède.

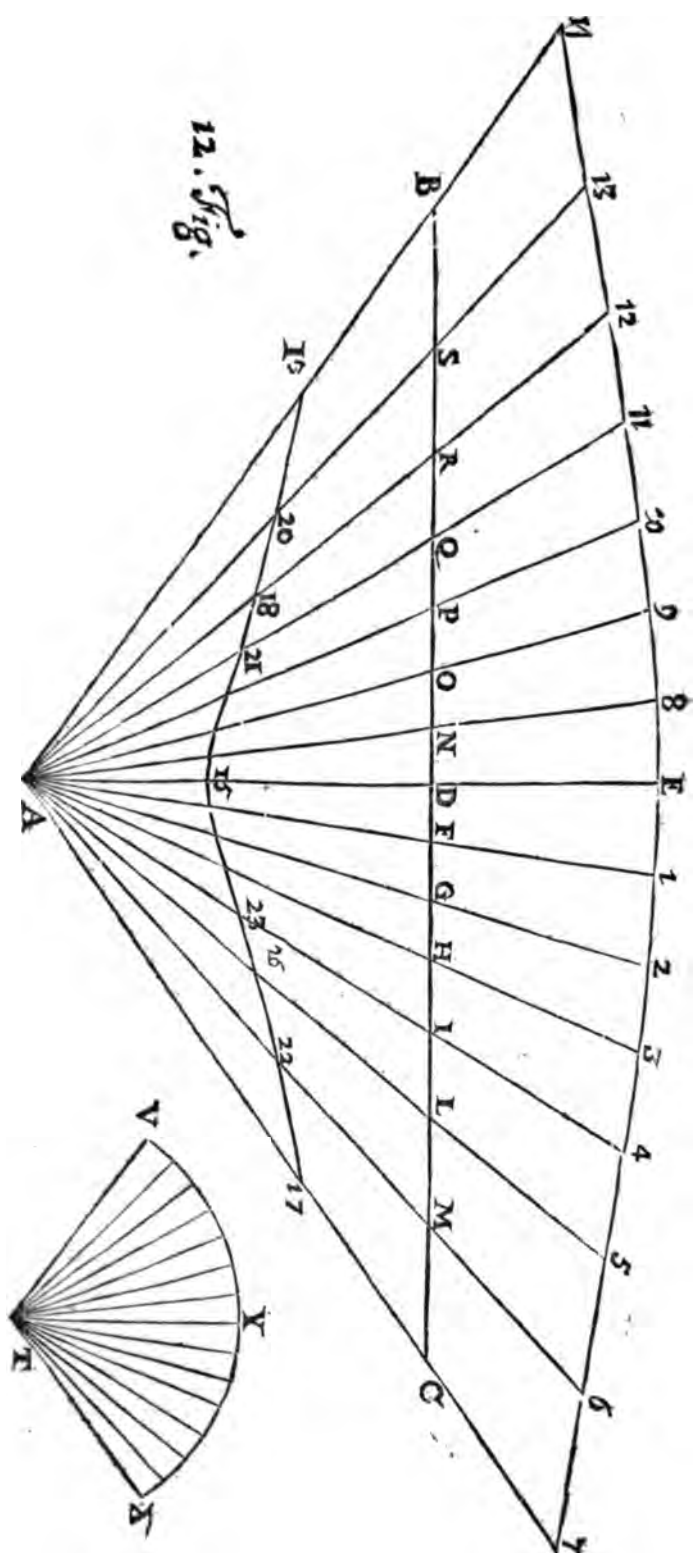
**DE LA CONCHOÏDE.**

**N**OUS considérons premièrement le grand triligne A 7 14. Le centre de la conchoïde est A; la conchoïde 14 7 est la première, & la seconde conchoïde est 16 17; la règle qui les sépare BC; les lignes qui partent de cette règle ou ligne & qui vont aux deux conchoïdes, sçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, sont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 sont égales entr'elles & aux autres ci-dessus, sçavoir à C 7, M 6, &c. Nous disons donc ainsi:

Le grand triligne est divisé (selon les indivisibles) en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais

mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs : or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarez ; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considérons son égal ; & par ainsi nous trouvons que le quarré A 7 vaut les quarez AC, C 7 plus deux fois le rectangle AC 7 ; le quarré A 17 vaut les quarez AC, C 7 ou C 17 moins le rectangle AC 17 pris deux fois. Tout ceci mis ensemble vaut le quarré C 7 deux fois, plus le quarré AC deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre ; or ces quarez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A 7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A 7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarez AC, & C 7. [ La petite figure qui est ici a été faite, d'autant que dans l'espace C 7 B 14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C 7, M 6, & autres : ces secteurs sont au grands secteurs ; comme les quarez de C 7, M 6, L 5, & autres, sont aux grands quarez A 7, A 6, A 5, & autres. ] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A 7 14 & A 17 16, & les quarez AC & C 7 pris deux fois : au lieu des quarez C 7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la même raison entr'eux que lesdits quarez ; partant au lieu de dire, deux fois les quarez C 7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure T V Y X, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle ACB sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16 ; & c'est ici la première conséquence ou conclusion.



12. Fig.

Pour la seconde, c'est quand nous ôtons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un côté l'espace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits secteurs, le triangle ABC, & l'espace 16 17 CB. Alors l'espace d'une conchoïde à l'autre, c'est-à-dire 16 17 7 14, est égal à deux fois les petits secteurs plus deux fois l'espace 16 17 CB; & c'est ici une autre conclusion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en ôte le petit, il reste le grand A 7 14 qui est égal à deux fois les petits secteurs, au triangle ACB & à l'espace 16 17 CB, qui est une autre conclusion.

Que si on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle ACB, il restera l'espace 7 CB 14 qui sera égal à deux fois les petits secteurs avec une fois CB 16 17, qui est une quatrième conclusion.

Maintenant il nous faut voir quelle raison il y a entre le triangle ABC & l'espace BC 7 14. Cela se fera considérant le quarré A 7 duquel nous ôterons le quarré AC. Ayant donc divisé le triligne A 7 14 en secteurs tous semblables & infinis, ainsi qu'il a été fait ci-dessus aux autres conclusions, & sçachant que les secteurs sont entr'eux comme leurs quarrez, nous disons que le quarré A 7 est égal aux quarrez AC & C 7 plus le rectangle AC 7 pris deux fois. Si j'en ôte le quarré AC, il me reste le quarré C 7 plus le rectangle AC 7 deux fois. Il faut considérer quels solides ils font.

Tous les quarrez C 7, M 6, & les autres sont tous égaux; & par ainsi tous joints ensemble font un parallépipède ou solide qui a pour hauteur & largeur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, sçavoir autant qu'on aura pris de fois & ajoûté les quarrez l'un à l'autre; c'est le premier solide qui se forme,

L'autre se fait du rectangle AC7 pris autant de fois que les susdits quarrez, & forme un solide qui a pour hauteur C 7 comme l'autre, mais sa longueur est diverse, sçavoir des lignes AC, AM, AL, & des autres qui toutes sont inégales.

Or ces deux solides se doivent mettre ensemble afin de les comparer à celui qui est composé des quarrez AC, AM & autres qui tous sont inégaux; & partant ce solide sera racourci de deux côtez. Or ce solide se peut considérer comme si j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervale AD: car alors la ligne BC sera une touchante dudit cercle au point D; la ligne AD sera le sinus total; & les lignes AN, AO, AP seront toutes des sécantes, & ainsi le solide sera formé des quarrez des sécantes. Or ces deux solides étant de même hauteur, sçavoir de la ligne C 7 & autres, il est aisé de les joindre ensemble, & de tous deux en faire un solide composé de tous les quarrez C 7, M 6, &c. d'une part, & de la ligne C 7 multipliée par la somme des lignes AC, AM, & les autres prises deux fois (parce que le rectangle AC 7 est deux fois dans le carré A 7) c'est-à-dire, qu'il faut doubler les lignes AC, AM, & autres.

Le solide qu'il faut comparer à celui-ci est fait par la somme des quarrez des lignes AC, AM, & des autres qui toutes sont inégales. Nous disons donc, Comme le solide fait par la somme des quarrez AC, AM, & autres, est au solide composé des deux ci-devant mis; ainsi le triangle ABC est à la figure C 7 14 B. Mais dans le premier solide les lignes C 7, M 6 me sont données, & partant leurs quarrez: de plus les lignes AC, AM, & autres me sont aussi données, d'autant que la ligne AD (que je prens pour sinus total ou demi-diametre d'un cercle que je feins être fait) m'est donnée, & la ligne DE sur lesquelles j'ai formé ma conchoïde; & par le

Moyen de AD sinus total & de l'angle BAD, je connois toutes les sécantes de ce cercle que je pose être décrite sur le rayon à AD: ces sécantes sont AN, AO, AP, & les autres qui suivent. Dans le dernier solide tous les quarez de AC, AM me seront donnez, puis que les lignes sont données; & ainsi je joins les quarez C 7, M 6 avec le rectangle fait de AC doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarez. Or CA, & MA sont sécante; donc par le calcul il nous sera facile d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le second solide qui est composé de l'aggrégé ou somme des quarez des sécantes; & telle sera la raison de ABC à l'espace BC 7 14.

**TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT**  
*un espace égal à un Quarré donné, & ce d'un  
 seul trait de Compas.*

**O**N demande qu'il soit tracé sur un cylindre droit d'un seul trait de compas un espace égal au quarré de la ligne AB. Pour le faire je coupe en deux également la ligne AB au point C, & je décris le cercle FME, le diametre duquel FE soit égal à AC. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur soit du moins le double de FE, & au milieu de cette hauteur soit le point F; puis ouvrant le compas de l'intervale FE, je décris un espace sur la superficie du cylindre. Je dis que cet espace vaut le quarré de AB.

Pour le prouver, je divise le cercle en parties infinies aux points E G H I & autres: de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points sont infinis: du point E qui est l'extrémité du diametre, je tire à chaque point de la division des lignes droites E G, E H, E I, &

autres qui sont dans le demi-cercle ELF. Or toutes ces petites lignes sont des sinus du quart d'une circonférence; ce qui se connoîtra, faisant du rayon FE & du centre F un cercle qui ait pour diamètre le double de EF; mais ici je me contente de la quatrième partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui soient toutes égales à FE, elles iront jusques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes EG, EH & les autres à angles droits, car l'angle se trouve dans le demi-cercle ELF, & partant toutes les petites lignes sont les sinus du quart d'une circonférence.

Nous sçavons que le demi-diamètre du cercle est au quart de la circonférence, comme tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Nous sçavons aussi que le quarré du demi-diamètre est égal à la figure qui est faite par les infini petits sinus qui divisent ce quart de circonférence. Or le demi-diamètre est FE qui est égal à la ligne droite AC moitié de AB; partant son quarré quatre fois vaudra le quarré de AB. Or les sinus EG, EH, &c. sont égaux aux perpendiculaires élevées des points GH, &c. jusques au retranchement fait par le compas, comme il sera montré; & par ainsi la figure ou l'espace tracé par le compas qui est ouvert de la grandeur EF, l'un des pieds posé sur F qui est un point pris en quelque endroit que ce soit de la surface du cylindre, & l'autre pied, par exemple sur le point E, & tournant sur la superficie du cylindre tant qu'il revienne au même point E: cet espace compris sur le cylindre vaut quatre fois l'espace compris des petits sinus qui divisent le quart de la circonférence; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il se peut ainsi dire. Or le cylindre est présumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il

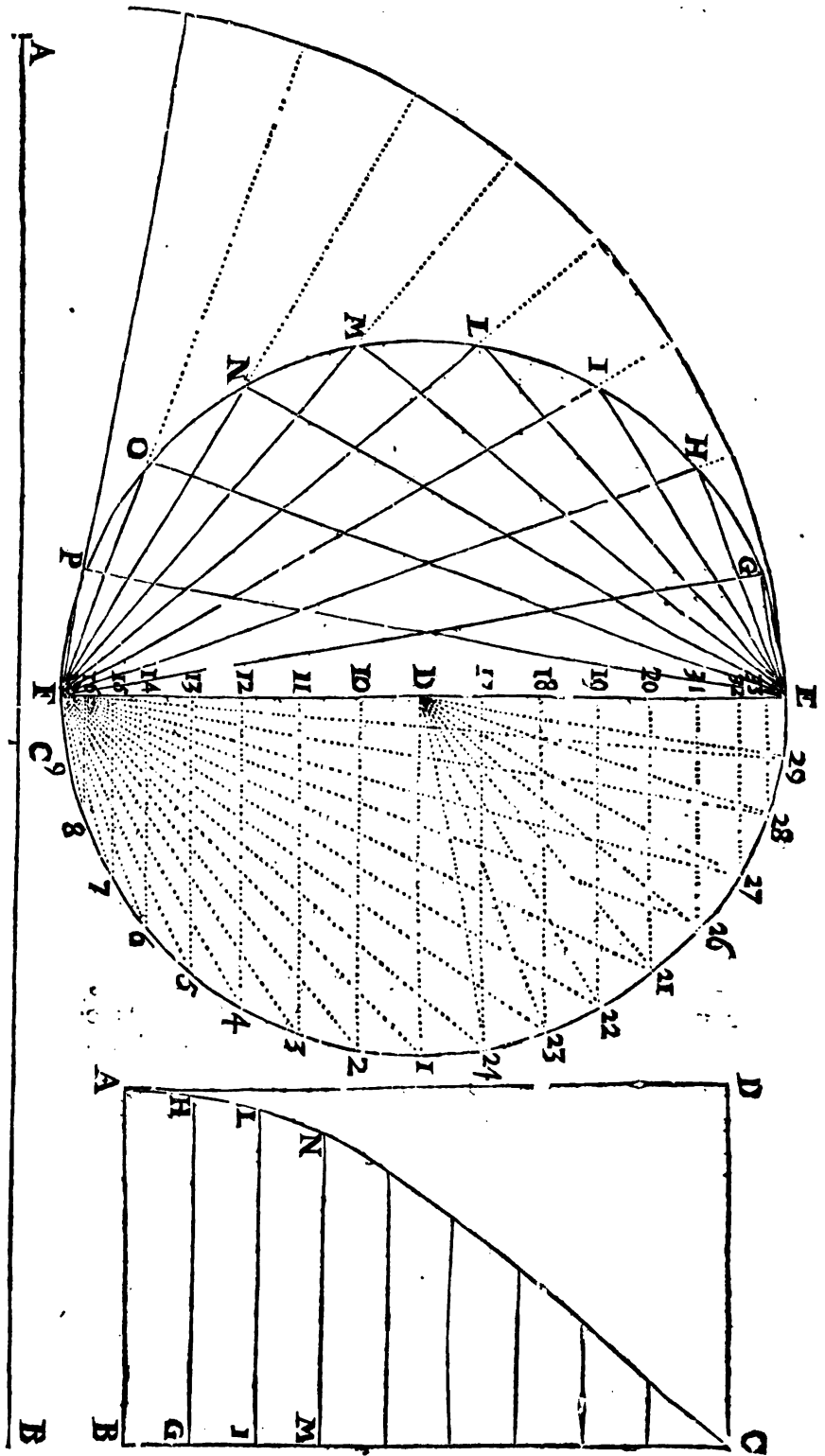
faudra, dessus & dessous ledit point F, & le cercle FME parallèle à sa base pour satisfaire à la question.

Reste à montrer que la ligne EH est égale à la perpendiculaire élevée du point H, quand elle a été retranchée par le compas ouvert de la grandeur FE. Pour cet effet, il faut tirer la ligne FH, & concevoir deux triangles, l'un de la ligne FH & FE portée à l'extrémité de la perpendiculaire tirée du point H, & qui monte vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire qui sort de H jusques au retranchement fait par FE portée sur la surface du cylindre. Ces trois lignes font un triangle rectangle qui est égal au triangle FEH; car en tous les deux triangle la ligne FH est commune; l'angle en H est droit, car il se fait de la ligne FH & de la perpendiculaire sur le point H en l'un des triangles, sçavoir en celui qu'on veut montrer égal à FEH & pareillement l'angle en H de l'autre triangle FEH est droit, étant dans le demi-cercle; la ligne FE qui a coupé la perpendiculaire élevée sur le point H est égale à FE; partant la ligne EH est égale à ladite perpendiculaire qui part du point H, & qui est coupée par la ligne FE par la révolution du compas. Le même se prouvera de toutes les autres lignes, EG, EI, EL, EM, & autres.

Or cette figure se trouve être la même que la troisième figure ci-devant, si on suppose que la circonférence EHLF est égale à BC dans la troisième figure, & qu'elle est divisée infiniment en sinus GE, HE, IE, & les autres, tout ainsi que la ligne BC de la troisième figure est divisée en sinus infinis, sçavoir GH, IL, MN, &c. Or nous devons considérer cette troisième figure ou bien la présente, car il n'importe pas, & voir ce qu'elles font. Par exemple, quand la troisième figure tourne sur la ligne BC, elle fait un cylindre avec le rectangle BD, & un autre solide avec la figure courbe

ACB

*On considère ici deux triangles qu'on veut prouver être égaux : l'un est FHE ; l'autre a pour base FH, pour cathète la perpendiculaire tirée du point H jusques au retranchement fait par le compas, & l'hypoténuse sera égale à FE, puisque c'est l'ouverture du compas.*



A C B. Je trouve que le cylindre est double du petit solide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me fers de la treizième figure présente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme FP, FO, FN, & autres, qui sont toutes égales aux premières tirées du point E aux mêmes points, sçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis ensuite que les quarrés de GE & GF sont égaux au quarré de FE : il en est de même des quarrés de EH & HF, & ainsi des autres ; partant tous ces quarrés ensemble seront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrés je n'ai besoin que de ceux qui composent la figure, sçavoir des quarrés de EG, EH, EI, & autres tirez du point E, qui font la moitié de tous ceux que j'avois comparez avec le grand quarré FE ; partant tous ces petits quarrés seront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les solides sont entr'eux comme tous les quarrés pris ensemble ; partant le petit solide fait de la figure courbe ABC en la troisième figure, sera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2 ; ce qu'il falloit démontrer.

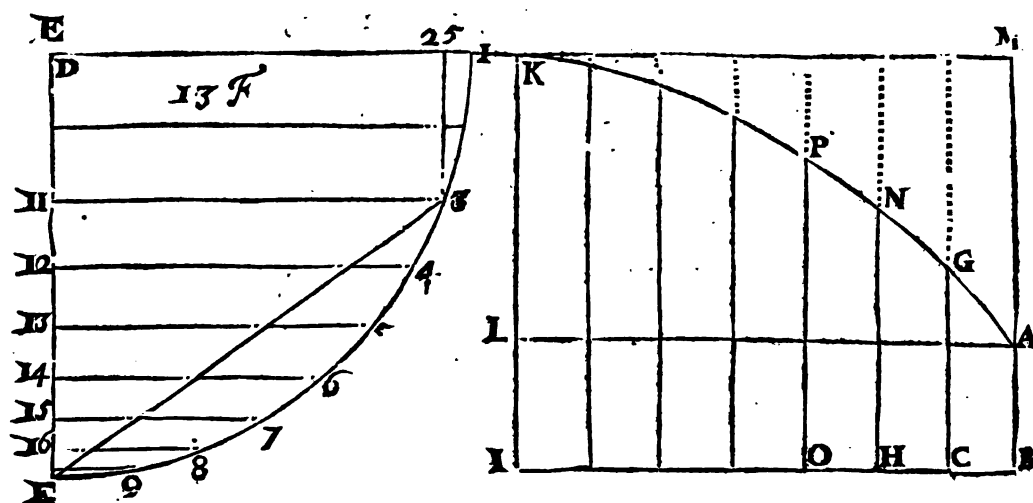
On considérera encore en la même figure un autre trait de compas. Je pose une des pointes sur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F<sub>1</sub> E L, lequel cercle est la base mitoyenne du cylindre qu'on suppose toujours prolongé en haut & en bas autant qu'il est nécessaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'icelui est F<sub>1</sub> qui est la soutendante du quart de la circonférence totale F<sub>5</sub> 1. Or cette circonférence est divisée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. sur chacun desquels j'éleve des perpendiculaires, comme ci-devant : des mêmes points je tire des perpendiculaires sur le demi-diamètre FD qui le divisent en une infinité d'autant de parties inégales,

Il faut maintenant considérer les proprieté de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il se fait plusieurs triangles rectangles dont les côtes sont  $F_2$ ,  $F_1$ , & la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est en l'air; le second,  $F_3$ ,  $F_1$ , & la perpendiculaire en l'air sur le point 3;  $F_4$ ,  $F_1$ , & la perpendiculaire en l'air sur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à mesure que la soutendante diminue. Car les quarrés des deux lignes  $F_2$ , & la perpendiculaire en l'air sur le point 2, sont égaux au quarré de  $F_1$ ; les quarrés de  $F_3$ , & de la perpendiculaire sur 3 en l'air sont égaux au même quarré  $F_1$ , & ainsi des autres. Mais le quarré  $F_1$  est égal au rectangle  $EFD$ , le quarré  $F_2$  est égal au rectangle  $EF_{10}$ , le quarré  $F_3$  au rectangle  $EF_{11}$ , & ainsi des autres quarrés & rectangles, partant tous les rectangles  $EFD$ ,  $EF_{10}$ ,  $EF_{11}$ , & les autres, sont entre eux comme les quarrés  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , &c. & partant tous les rectangles  $EF_{10}$ ,  $EF_{11}$ , & autres tous ensemble sont au grand rectangle  $EFD$ , comme tous les quarrés  $F_2$ ,  $F_3$ , &c. sont au grand quarré  $F_1$ . Quand du rectangle  $EFD$  j'ôte le rectangle  $EF_{10}$ , il reste le rectangle  $EF$  par  $10D$  qui est égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 2 en l'air; quand du même rectangle  $EFD$  j'en ôte le rectangle  $EF_{11}$ , il reste le rectangle  $EF$  par  $11D$  qui est égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ai besoin des quarrés de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la troisième figure sur  $BC$ , ces lignes représentent les demi-diamètres des cercles qu'il faut comparer avec le quarré du demi-diamètre de la base du cylindre.) Mais tous les rectangles susdits ont une même hauteur, sçavoir  $FE$ ; & partant ils sont entr'eux comme les lignes  $FD$ ,  $F_{10}$ ,  $F_{11}$ . Si on ôte de la base d'un rectangle la base d'un autre rectangle, il restera leur différence: comme si de

FD j'ôte  $F_{10}$ , il restera  $D_{10}$ ; si de FD j'ôte  $F_{11}$ , il restera  $D_{11}$ , & ainsi des autres. Or ces restes sont homologues avec les quarez des lignes perpendiculaires qui restent quand j'ai ôté le quarré  $F_2$  du quarré  $F_1$ : du même quarré  $F_1$  j'ai ôté le quarré  $F_3$ , puis  $F_4$ , &c: il reste les quarez des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes  $D_{10}$ ,  $D_{11}$ , & autres garderont entr'elles la même raison que les quarez desdites perpendiculaires. Mais les lignes  $D_{10}$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ , &c. sont sinus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. sont perpendiculaires sur le diamètre EF; donc les quarez des perpendiculaires sont au quarré de la grande FI prise autant de fois, comme tous les petits sinus sont au sinus total DF pris autant de fois. Mais les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, comme le demi-diamètre du cercle est au quart de la circonférence; partant le solide fait par la révolution de la figure courbe ACB sur la ligne BC, sera au cylindre fait du rectangle BD, comme le demi-diamètre du cercle est au quart de la circonférence.

*Il faut entendre ici que la figure ABC est faite de toutes les perpendiculaires élevées sur les points 2, 3, 4, &c. & que AB est égale à FI.*

Considérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale  $F_3$ , gardant toujours le point F pour poser ledit compas. Il se trouve que le quarré  $F_4$  avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, est égal au quarré de  $F_3$ ; le quarré  $F_5$  avec celui de la perpendiculaire sur le point 5 en l'air, sont égaux au même quarré  $F_3$ ; & ainsi des autres. Or le rectangle EF 11 est égal au quarré  $F_3$ , & le rectangle EF 12 est égal au quarré  $F_4$ , & ainsi des autres rectangles & quarez. Si donc du rectangle EF 11 j'ôte le rectangle EF 12, il reste le rectangle EF par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 tirée en l'air. Si du même rectangle EF 11 on ôte le rectangle EF 13, il reste le rectangle EF, par 13 11 qui est égal au quarré de la perpendi-



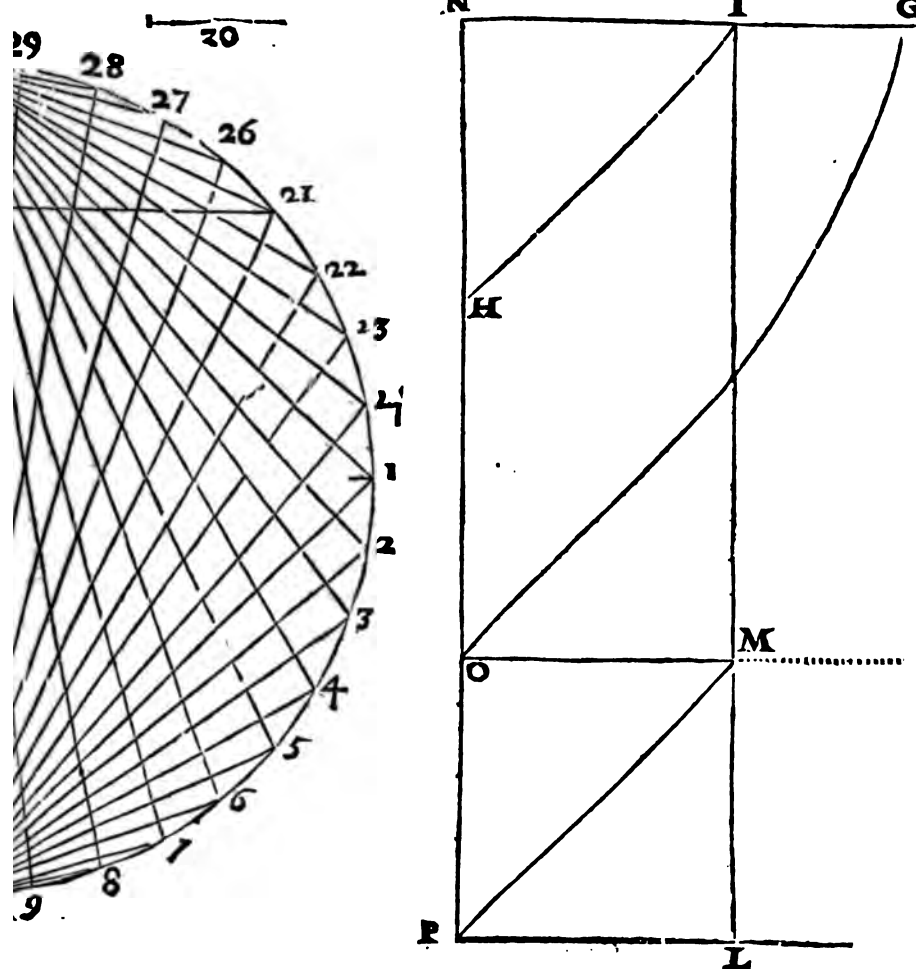
rez des perpendiculaires est au cylindre de la grande, comme le triline LAK au parallélogramme LKMA. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raisons en lignes; & retournant à la grande figure, nous disons: Comme tous les petits sinus sont au grand sinus pris autant de fois; ainsi le sinus 11 3 est à la circonférence F 3. Or il faut ôter de cette raison ce qui y est de trop, & dire: Comme tous les petits sinus moins 11 D pris autant de fois, au sinus total pris autant de fois, moins le même 11 D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira; Comme le sinus total DF est à D 11, ainsi la circonférence F 3, sera à quelque portion de la même circonférence F 3, laquelle portion il faut ôter de la ligne ou sinus 11 3; & par ainsi la ligne 11 3, quand on en a ôté ce qui avoit été retranché de ladite circonférence F 3, est à ce qui reste de ladite circonférence F 3, comme le petit solide fait des quarez de perpendiculaires est à leur cylindre. Or tous les sinus & la circonférence me sont

donnez; & partant la raison des solides sera connue, ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considérer sur la même figure la raison des solides entr'eux quand elle roule sur la ligne circulaire  $F_2 21$  étendue comme droite, & quand l'ouverture du compas est  $F_2 1$ , sans répéter ce qui a été dit ci-devant : on trouve que les quarrez des perpendiculaire tirées en l'air des points  $21, 22, 23, 24, \&c.$  sont entr'eux comme les lignes  $20 19, 20 18, 20 17, \&c.$  Or toutes ces lignes se doivent considérer en cette sorte,  $20 D - 19 D; 20 D - 18 D; 20 D - 17 D,$  & ainsi des autres. Les suivantes se considèrent ainsi,  $20 D + 10 D; 20 D + 11 D; 20 D + 12 D; 20 D + 13 D, \&c.$  en sorte que  $20 D$  est pris autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence  $F_2 21$  & les autres sinus, sçavoir  $D 10, D 11, D 12, D 13 \&c.$  sont pris autant de fois qu'il y a de divisions au quart de la circonférence  $F_5 1$ . De tout ceci il en faut ôter les lignes  $D 19, D 18, D 17,$  & les autres prises autant de fois qu'il y a de divisions dans la circonférence  $1 21$ . Voilà une des équations; l'autre est la ligne  $F_2 20$  prise autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence  $F_2 21$ .

Pour mieux entendre ce discours, on fera la figure qui est ici à côté du demi-cercle, en laquelle  $AB$  vaut  $F_1$ , quart de la circonférence;  $BC$  vaut  $1 21$ ; & la toute  $AC$  vaut la circonférence  $F_3 21$ ;  $AN$  vaut  $F_2 20$ , & par ainsi le parallelogramme  $NC$  vaut ce qui est contenu dans  $20 F_2 21$ ;  $NG$  vaut  $FD$  sinus total;  $AG$  ou son égale  $NI$  vaut  $D 20$ ;  $NH$  égale à  $OP$  vaut la circonférence  $1 21$ . Nous disons donc que comme le rectangle  $ANPC$  est au rectangle  $INPL$  + le triligne  $NGO$  — le triligne  $INH$  ou  $OMP$  son égal, ainsi le cylindre est au solide qui se fait quand la figure retran-

*Voyez la  
Figure sui-  
vante.*



chée du cylindre tourne sur la circonfé  
duë en ligne droite; ce qu'il falloit

Nous venons maintenant à une co  
que prenant toûjours le même poin  
du compas telle que son quarré soit  
FE & de la ligne 30, il se trouve

les quarez de FE & de 30 sont égaux aux quarez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainsi de tous les autres. Or le quarré FE vaut les quarez E 22 & 22 F; partant les quarez de E 22, 22 F, & de 30 sont égaux au quarré de 22 F & à celui de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'ôte des deux équations ce qui est commun, sçavoir le quarré F 22, & il me reste d'une part le quarré E 22 — le quarré 30 égal au quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainsi tous les quarez des perpendiculaires tirées en l'air de tous les points qui divisent la demi-circonférence, sont égaux aux quarez des lignes qui partent du point E, & se terminent ausdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarquer que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toujours, puisqu'il y a les quarez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres sont égaux au quarré FE pris autant de fois. Mais de tous de ces quarez je n'ai besoin que de la moitié; partant cette moitié sera égale à la moitié du quarré FE pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette somme de quarez, parce qu'on n'en a pas besoin d'autre chose; car joignant lesdits quarez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarez des perpendiculaires en l'air, qui est ce qu'il faut avoir.)

Nous concluons donc que le solide qui se fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent sur la circonférence étendue comme une ligne droite, est égal à deux cylindres, le premier desquels a d'une part la ligne FE, & de l'autre la même circonférence étendue; & de celui-ci il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la même circonférence étendue, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la figure tourne sur la circonférence étendue; & ainsi le cylindre des perpendiculaires est égal à ce petit cylin-

dre & à la moitié du grand tout ensemble; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut voir maintenant la comparaison des plans, & comment ils sont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarez de E 22 & de 30 sont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22, & le rectangle FE 19 est égal au quarré E 22. Je fais un rectangle égal au quarré 30 sur la ligne EF, & sur quelque autre ligne tirée depuis E en K, & ainsi les deux rectangles joints ensemble, sçavoir FE 19, & FEK, qui valent le rectangle FEK 19 sont égaux aux quarez de E 22 & de la perpendiculaire 30, comme aussi au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22. Or si du point K comme sommet je décris une parabole, dont le côté droit soit égal à FE, & KF soit l'axe: le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 sera égal au rectangle FE par 19 K, & ainsi de toutes les autres; partant les quarez desdites ordonnées seront égaux aux quarez des perpendiculaires tirées en l'air, & les mêmes ordonnées égales aux perpendiculaires; c'est pourquoi le plan occupé par les perpendiculaires devroit être égal au plan occupé par les ordonnées.

Mais la comparaison ne se peut pas faire de la sorte, parce que les perpendiculaires sont également distantes l'une de l'autre; mais les ordonnées le sont inégalement, puisque la ligne FE est toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut être comparé au plan.

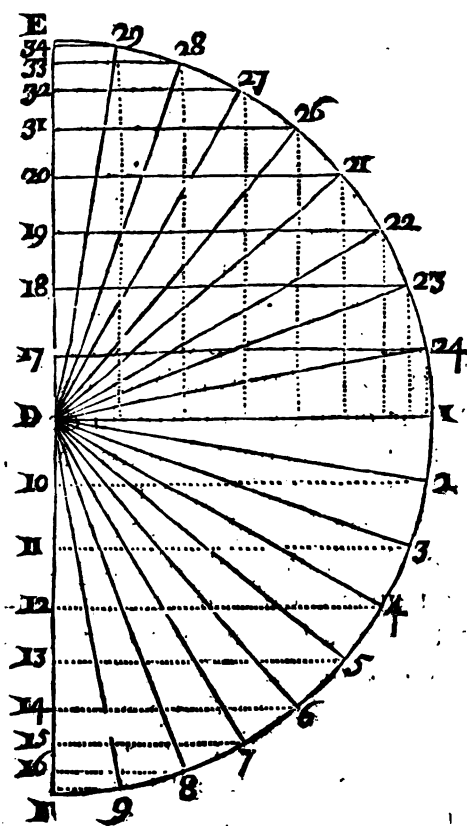
*Voyez la  
Figure sui-  
vante.*

Nous venons maintenant à considérer qu'elle est la raison, ou comparaison des quarez des sinus avec le quarré du diamètre FE. La circonférence F1E est divisée en parties infinies & égales, & les lignes 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33, & 29 34 sont toutes sinus droits. Je dis que le quarré D 24 demi-diametre vaut le quarré 17 24, & le quarré 17 D qui est

sinus de complément égal à la ligne tirée du point 24  
 perpendiculaire sur le demi-diamètre D 1, & est égale  
 au sinus 29 34. Le même quarré du demi-diametre D 23  
 est égal aux quarez de 18 23, & de 18 D sinus de com-  
 plément égal à la perpendiculaire tirée de 23 sur D 1,  
 & aussi au sinus droit 28 33. Le quarré de D 22 est égal  
 aux quarez de 22 19, & de 19 D sinus de complément  
 égal à la perpendiculaire tirée de 22 sur D 1 & au sinus  
 27 32, & ainsi de tous les autres, en telle sorte que tous  
 les sinus de complément sont égaux aux sinus droits,  
 ci-devant marquez; & ainsi les quarez de tous les si-  
 nus pris deux fois (ce qui se doit faire, puisque les uns  
 sont égaux aux autres) sont égaux au quarré du demi-  
 diamètre D 1 pris autant de fois qu'il y a de sinus. Mais  
 le quarré du demi-diametre n'est que le quart du quar-  
 ré du diamètre; partant le quarré du diamètre sera huit  
 fois la somme des quarez des sinus, c'est-à-dire, que les  
 quarez des sinus sont au quarré du diamètre pris au-  
 tant de fois comme 1 à 8. Voilà la première partie.

Pour la seconde. Le quarré de FE est égal aux quar-  
 rez de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E,  
 qui est à dire le quarré 28 33 deux fois; le même quar-  
 ré FE est égal aux quarez F 32 & 32 E, plus deux fois  
 le rectangle F 32 E, ou deux fois le quarré 32 27; le  
 même FE est égal aux quarez F 31 & 31 E, plus deux  
 fois le rectangle F 31 E, ou le quarré 31 26; le même  
 quarré FE est égal aux quarez F 20 & 20 E, plus deux  
 fois le rectangle F 20 E, ou le quarré 20 21, & ainsi  
 de tous les autres tant en haut qu'en bas: & de cette  
 sorte le quarré FE vient à être égal à deux fois tous ces  
 petits quarez F 34, 34 E; F 33, 33 E; F 32, 32 E, &  
 tous les autres en telle sorte que le quarré FE pris au-  
 tant de fois est double de tous ces quarez, & de plus,  
 à deux fois les quarez de 34 29, 33 28, 32 27, & les

autres. Nous avons vû comme tous les quarez de ces



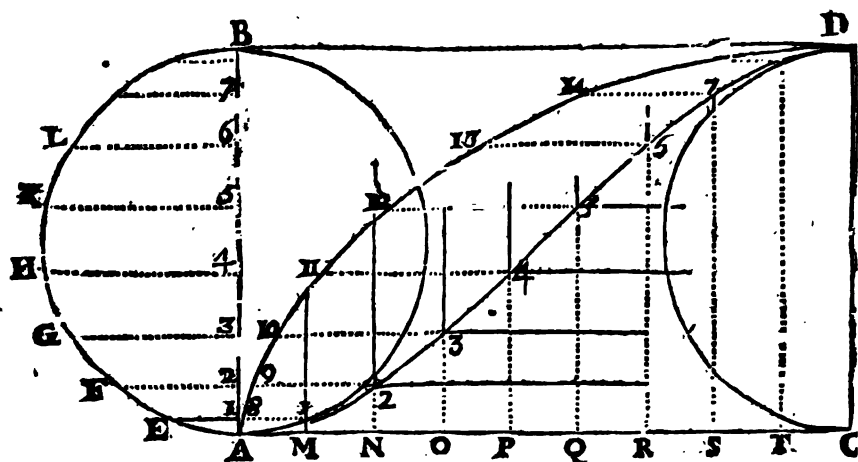
sinus 34 29, 33 28, &c. sont au quarré du diametre FE pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils sont ici deux fois & les sinus versés aussi deux fois; partant deux fois les quarez des sinus versés, & deux fois les quarez des sinus droits sont égaux à huit fois les quarez des sinus droits; & ôtant de part & d'autre deux fois les quarez des sinus droits, restera d'une part deux fois les quarez des sinus versés égaux à six fois les quarez des sinus droits; & pre-

nant la moitié, les quarez des sinus versés seront égaux à trois fois les quarez des sinus droits; partant les quarez des sinus versés sont à ceux des sinus droits, comme 3 à 1; mais le quarré de FE pris autant de fois est aux quarez des sinus droits, comme 8 à 1; donc le quarré de FE pris autant de fois est aux quarez des sinus versés, comme 8 à 3, ce qu'il falloit trouver.

La précédente conclusion nous servira pour trouver la raison du solide que fait la Roulette, quand elle tourne sur la circonférence du cercle générateur étendu

en ligne droite. Car le solide fait par les sinus versés (voyez la figure de la Roulette, qui est placée ci-après page suivante) sçavoir par  $M_1, N_2, O_3, P_4$ , &c. est au solide fait par le parallelogramme composé du diamètre du cercle, & de la circonférence d'icelui étendue en ligne droite, comme 3 à 8 par la conclusion précédente. Nous sçavons aussi que l'espace compris entre les deux lignes  $A_1D$  &  $A_4D$  est égal au demi-cercle  $AHB$ , parce que les lignes d'un des espaces sont égales aux lignes de l'autre espaces par la construction : partant le double de l'espace est égal au cercle entier  $AHBA$ , de sorte que tout ce qui se dira du cercle se doit entendre dudit espace doublé. Mais il a été démontré que le cylindre de  $AB$  est au solide qui se fait lorsque la figure  $A_1D_5A$  tourne sur la ligne ou circonférence  $AC$ , comme 8 à 2, lesquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez ci-devant, font 5, qui est la raison qu'il y a du solide entier de la roulette, à son cylindre  $ABDC$  doublé ; car  $ABDC$  n'est que la moitié de l'espace parcouru par la Roulette.

Remarquez que ce solide qui est au cylindre  $AD$  tour-



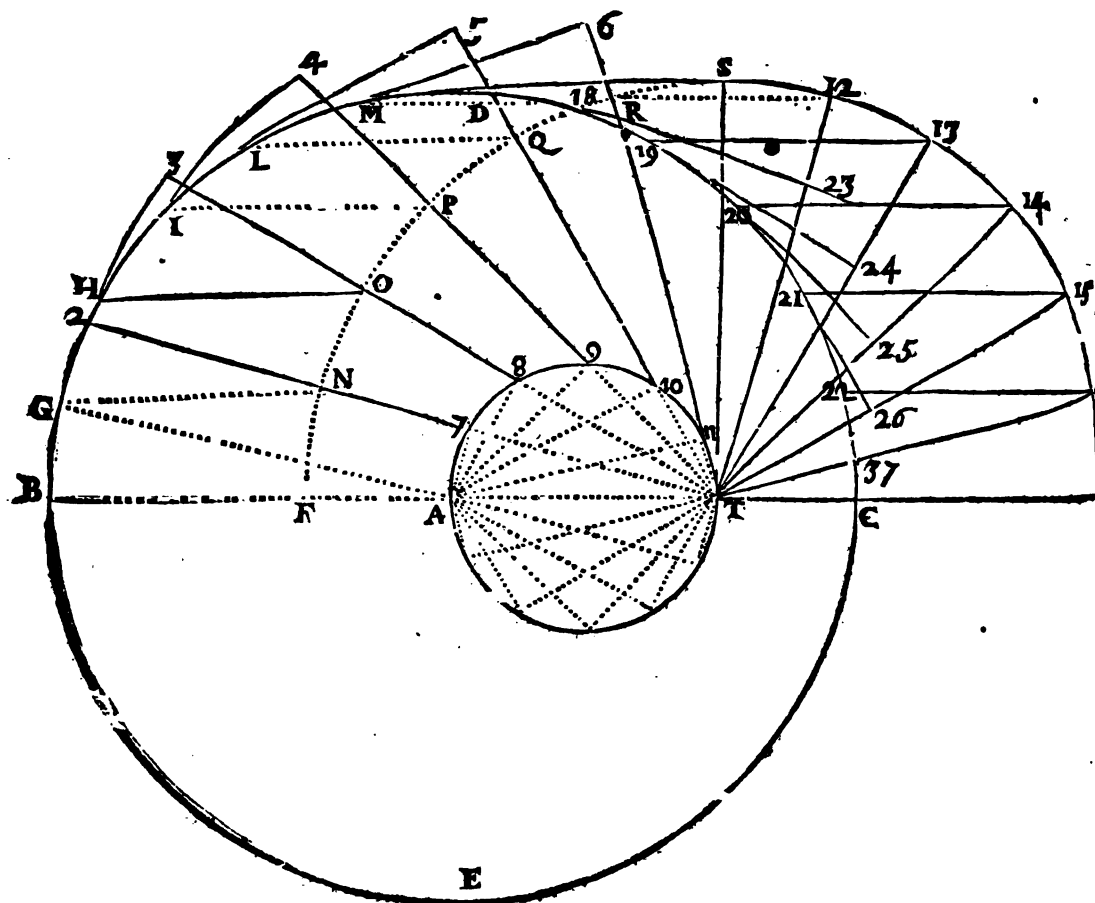
Qq iij

né sur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8 : est celui que fait l'espace compris entre les deux lignes A<sub>12</sub>D & A<sub>4</sub>D, qui est égal à celui que feroit le demi-cercle AHB par la même révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & posées en même distances de AC, & partant est le quart dudit cylindre AD; & joignant ledit solide à celui qui se fait par l'espace compris entre les lignes A<sub>4</sub>D & AC, qui est audit cylindre comme 3 à 8, on aura le solide fait par l'espace compris entre A<sub>12</sub>D & AC, qui sera 5, ledit cylindre AD étant 8.

**TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT**  
*un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique  
 donné, & d'un seul trait de Compas.*

**L**E cercle BDCE est la base d'un cylindre oblique, les côtez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui est l'autre base du cylindre, & est parallèle au premier BDCE : ) ce cercle peut être représenté par le cercle FNOP, &c. mais il est en l'air & à plomb au-dessus de celui-ci ) l'axe du même cylindre sort du centre A, va rencontrer obliquement le centre dudit cercle supérieur. Or nous feignons que du sommet de l'axe soit tirée une perpendiculaire qui tombe sur le point T, & que du sommet de tous les côtez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier BDC, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. feignant des lignes tirées GH, HI, IL, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence même, & le cylindre en cette sorte se

trouve divisé en infinies parallelogrammes ; car les cô-  
 tez du cylindre avec la portion de la circonférence des  
 deux cercles font des parallelogrammes qui composent  
 tout l'espace du cylindre ; de sorte qu'il faut comparer  
 tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme  
 pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne tou-  
 chante G 2 , & du point correspondant à G , sçavoir de  
 N , je tire une perpendiculaire à ladite touchante , qui  
 la rencontre au point 2 ; si du sommet du côté du cy-  
 lindre (j'entens du côté qui commence en G , & va fi-  
 nir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une li-  
 gne au point 2 : cette ligne sera perpendiculaire à la  
 ligne G 2 . Du point H je tire une ligne touchante , &  
 du point O correspondant à H , je tire une perpendi-  
 culaire à ladite touchante , sçavoir O 3 , & ainsi des au-  
 points I & P , L & Q , &c. je ne parle plus de la ligne  
 tirée d'enhaut , car il suffit d'avoir dit une fois qu'elle  
 sera perpendiculaire à la même touchante. Ayant ainsi  
 tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes  
 à chaque point , ces lignes seront N 2 , O 3 , P 4 , Q 5 ,  
 &c. Si chacune de ces lignes est continuée comme 2 N 7 ,  
 3 O 8 , 4 P 9 , &c. elles iront toutes finir au point T  
 centre du cercle FS 17. Pour la preuve , nous feignons  
 qu'il y a une ligne AG , laquelle avec 2 7 compose un  
 quadrilatere : en icelui l'angle 7 2 G par la construction  
 est droit ; l'angle A G 2 est droit , sçavoir du centre au  
 point d'atouchement ; partant 2 N , & GA sont paralle-  
 les. Soit tirée NT , l'arc GB étant égal à l'arc NF. Il  
 s'ensuit que l'angle GAB est égal à l'angle NTF , puis-  
 qu'ils sont faits tous deux aux centres T & A des deux  
 cercles égaux BDC & FS 17 , & partant la même GA sera  
 parallele à NT ; donc 2 N 7 , & NT sont paralleles en-  
 tr'elles ; mais elles se joignent au point N ; & partant  
 elles ne font ensemble qu'une même ligne.



Maintenant il faut considérer les parallelogrammes, au lieu desquels je prens la perpendiculaire qui tombe du sommet sur les touchantes ci-devant, comme du sommet du cylindre qui part de G & va en l'air, j'abaisse la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme composé de ligne G 2, qui passe dans les indivisibles pour circonférence,

circonférence, & du côté du cylindre qui part de G & va en l'air, lequel côté vaut pour deux côtez du parallélogramme, sçavoir commençant en G & 2, & finissant en la circonférence de la base supérieure du cylindre; & par ainsi on a les quatre lignes du parallélogramme, sçavoir G 2 ( qui passe pour circonférence ) & son égale en la circonférence de la base supérieure, & les deux côtez du cylindre. Mais au lieu du parallélogramme nous considérons un triangle qui a pour un de ses côtez la perpendiculaire tirée du sommet du côté sur le point 2, & qui se peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallélogramme; & pour les deux autres côtez, la ligne G 2, & le côté du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le côté du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire tirée du sommet & finissant en 2. Il faut ensuite considerer un autre triangle, dans lequel la même perpendiculaire tombant en 2 soit un des côtez; 2 N soit un autre côté; & le troisième soit la ligne tombante perpendiculairement du sommet du côté sur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe sur 2 peut autant que les deux lignes 2 N, & la perpendiculaire qui tombe du sommet sur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du sommet sur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence est toujours égale: mais les lignes 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q, &c. sont inégales; car 2 N vaut 7 T; 3 O vaut 8 T; 4 P est égale à 9 T, & ainsi des autres qui toutes sont inégales.

Au premier triangle G 2 & l'autre point qui est au cercle supérieur le côté du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle supérieur, vaut la ligne tirée du sommet ( qui est ce troisième point en l'air ) & qui finit en 2, & la ligne G 2. ( on doit entendre ceci de tous les autres points & triangles qui se peuvent former de

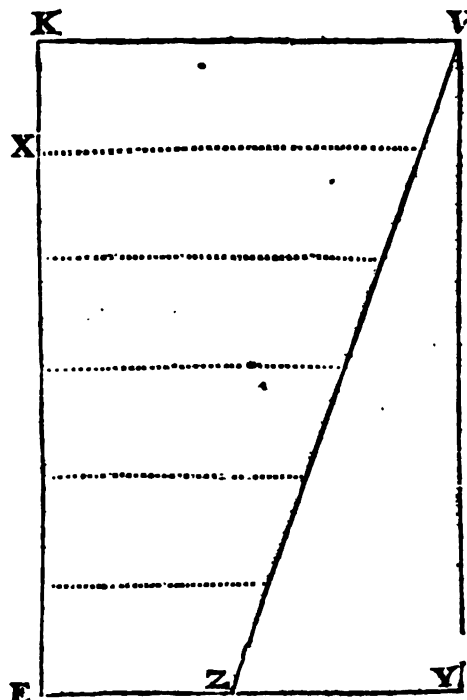
la même sorte. ) Mais les lignes  $G_2, H_3, I_4$  &c. vont toujours augmentant; car  $G_2$  est égal à la soutendante  $A_7$ , la ligne  $H_3$  à  $A_8$ ,  $I_4$  à  $A_9$ ; toutes lesquelles lignes  $A_7, A_8, A_9$  sont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne  $G_2$  est égale à  $A_7$ ,  $H_3$  à  $A_8$ , & ainsi des autres; de plus que  $2N$  est égale à  $7T, 3O$  à  $8T$ , &c. Pour cet effet, il faut considérer les triangles  $2GN$ , &  $AT_7$ , auxquels l'angle  $2NG$  est égal à l'angle  $AT_7$ ; car les lignes  $GN, AT$  sont parallèles, l'angle  $N_2G$  est droit, par la construction, & pareillement  $T_7A$  qui est dans le demi-cercle, & partant le troisième angle est égal au troisième; la ligne  $GN$  est égale à  $AT$ , & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne  $2N$  à  $7T$ , &  $G_2$  à la soutendante  $A_7$ ; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reste à voir le rapport & la raison de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut considérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils aient les côtes égaux, car ils sont composez des côtes du cylindre & de la portion de la circonférence divisée en parties égales infinies, & cette division est faite aux deux cercles ou bases d'icelui cylindre; & d'autant que les angles sont inégaux, les parallelogrammes sont inégaux, & ainsi leur hauteur sera inégale, c'est par cette hauteur qu'il faut considérer lesdits parallelogrammes. Il faut voir premierement le plus grand de tous qui est fait de  $BG$ , tant en la base du cylindre  $BDC$ , qu'en l'autre qui est en l'air, & des côtes du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui est la hauteur dudit parallelogramme, & qui du sommet tombe sur le point  $B$ , n'est autre chose que le côté du cylindre; & considérant le second parallelogramme qui a pour côtes  $GH$  & les côtes du cylindre, on voit que ce côté du cylindre vaut en

puissance la ligne  $G_2$ , & la perpendiculaire ou hauteur du même parallélogramme ; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallélogramme est plus petite que la perpendiculaire du premier, qui est égale au côté du cylindre ; & par ainsi ces hauteurs perpendiculaires ou vont toujours en diminuant jusques au quart de cercle, & puis après vont en croissant au quart suivant.

Remarquez que les lignes  $G_2, H_3, I_4, L_5$  qui sont touchantes, passent pour la circonférence des divisions du cercle, & pout côtéz des parallélogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne, que  $KV$  est égale à la plus grande des perpendiculaires, & aussi au côté du cylindre, & qui tombe perpendiculairement sur le côté  $BG$  au point  $B$  : la ligne  $KX$  & les autres divisions représentent & sont égales à celles de la circonférence, comme  $KX$  à  $BG$ , & ainsi des autres ; car  $KE$  est supposée égale au quart de la circonférence  $BHD$ . Le plus grand des parallélogrammes est fait des lignes  $KV, KX$  ; & quand il est pris autant de fois qu'il y en a de petits, il occupe l'espace  $KVYE$ , partant toutes ces lignes sont à la grande  $KV$  prise



autant de fois, comme la figure K V Z E est au quart de la superficie du cylindre qui est ici représenté par le parallelogramme K V Y E.

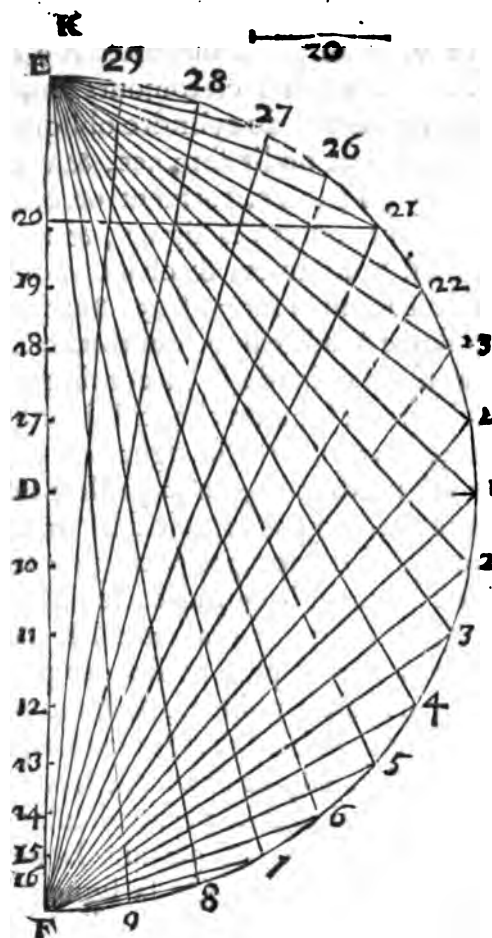
Il faut passer plus avant, & considérer les perpendiculaires qui sont tirées du sommet sur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle BDC. Or chacune de ces perpendiculaires, par exemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement sur le point N & la ligne N 2; la perpendiculaire qui tombe sur le point 3 vaut en puissance celle qui tombe perpendiculairement sur O, & la ligne O 3, & ainsi des autres. Ceci s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle BDC base du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui est la base supérieure du même cylindre, duquel centre on abaisse la perpendiculaire qui tombe sur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervalle AT comme diamètre je forme le cercle A 9 T; la demi-circonférence duquel est divisée en autant de parties égales qu'il y en a au quart BD de la circonférence du cercle BDC. Puis après, du point duquel j'ai tiré la perpendiculaire sur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui font la division du cercle, comme il a été dit. Du point T je tire des lignes aux mêmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis d'avantage que le cercle A 9 T nous représente la base d'un cylindre droit qui a son autre base en l'air, sçavoir un cercle dont la circonférence passe par le point d'où est tiré la ligne qui tombe sur T, & est aussi le centre de la base supérieure du cylindre oblique, & on nommera ici l'edit point qui est en l'air, sommet. Nous disons donc que la ligne tirée en l'air dudit sommet sur le point 7 est égale en puissance aux deux lignes dont l'une est celle

qui tombe perpendiculairement dudit sommet sur le point T ; & l'autre est T 7. La ligne qui part dudit sommet, & va au point 8, est égale en puissance à la susdite qui tombe dudit sommet sur T, & à T 8, & ainsi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe sur le point T est toujours la même, & la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique ; & toutes ces lignes qui partent dudit sommet, & vont sur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où sortent toutes ces lignes, & aussi celle qui tombe sur T, est le sommet ; & chacune desdites lignes qui vont dudit sommet sur 7, 8, 9, &c. sont chacune égales en puissance à ladite ligne qui tombe sur T, & à celle qui de T va sur le point de la circonférence A 9 T, auquel celle qui part du sommet aboutissoit aussi.

Or en tout ceci on doit considérer la figure du discours précédent, qui est ici décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas se doit faire sur un cylindre droit posant un pied du compas pour pole sur le point F, & traçant de l'autre sur le cylindre, & faisant ladite ouverture plus grande que le diamètre FE : la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires suivantes qui partent des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. jusques au même point F, auquel lieu la perpendiculaire est égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui est l'ouverture du compas est égale en puissance à la ligne FE, & à la moindre perpendiculaire, sçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelque autre point comme 22. Nous disons que la ligne qui est l'ouverture du compas vaut les quarez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point

# 318 TRAITE DES INDIVISIBLES

22 en l'air; partant les quarréz de EE & de la perpendiculaire sur E en l'air, sont égaux aux quarréz F 22 &



de la perpendiculaire sur 22 en l'air. Au lieu du quarré FE, je prends les quarréz de F 22, & de 22 E; partant les quarréz de F 22, & de la perpendiculaire sur 22 en l'air, valent les quarréz de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air. Des deux grandeurs ôtez ce qui est commun, sçavoir le quarré de F 22, restera le quarré de la perpendiculaire sur 22 en l'air, égal aux quarréz de 22 E & de la perpendiculaire sur E en l'air; & faisant le même aux autres

points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire sur 23, par exemple, égal aux quarréz de 23 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air, & ainsi des autres: par ainsi nous trouvons que les quarréz desdites

perpendiculaires en l'air sont égaux aux quarez de la perpendiculaire sur E en l'air, & des soutendantes 23 E, 22 E, 26 E, &c.

Or si on suppose que le cercle A 9 T soit aussi grand que F 22 E de la présente figure, & qu'ils soient tous deux également divisez, & que l'ouverture du compas vaille en puissance le diamètre FE, & la hauteur du cylindre oblique, sçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement sur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des points E 29, 28, 27, 26, &c. sont toutes égales aux lignes qui tombent sur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui sont tirées du centre de la base supérieure du cylindre oblique, qui est le sommet d'où tombe perpendiculairement la ligne sur le point T, & cette ligne est la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point sur le cercle A 9 T, & est égale à la perpendiculaire tirée sur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du même sommet, est égale à la perpendiculaire sur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainsi toutes les lignes tirées du sommet, ou centre de la base supérieure du cylindre oblique sont égales aux perpendiculaires retranchées par le compas sur la surface du cylindre droit. Or les lignes ainsi tirées du centre oblique sur le cercle A 9 T sont égales aux lignes qui tombent sur les points 2, 3, 4, &c. & qui sont tirées de la circonférence de ladite base supérieure du cylindre oblique, sçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les soutendantes T 7, T 8, T 9, &c. sont égales aux lignes N 2, O 3, P 4, &c. Nous disons donc que les parallelogrammes qui sont en même hauteur, & dont les bases sont égales, doivent être égaux, & contiennent des espaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous de-

*Voyez la  
Figure de la  
page 312.*

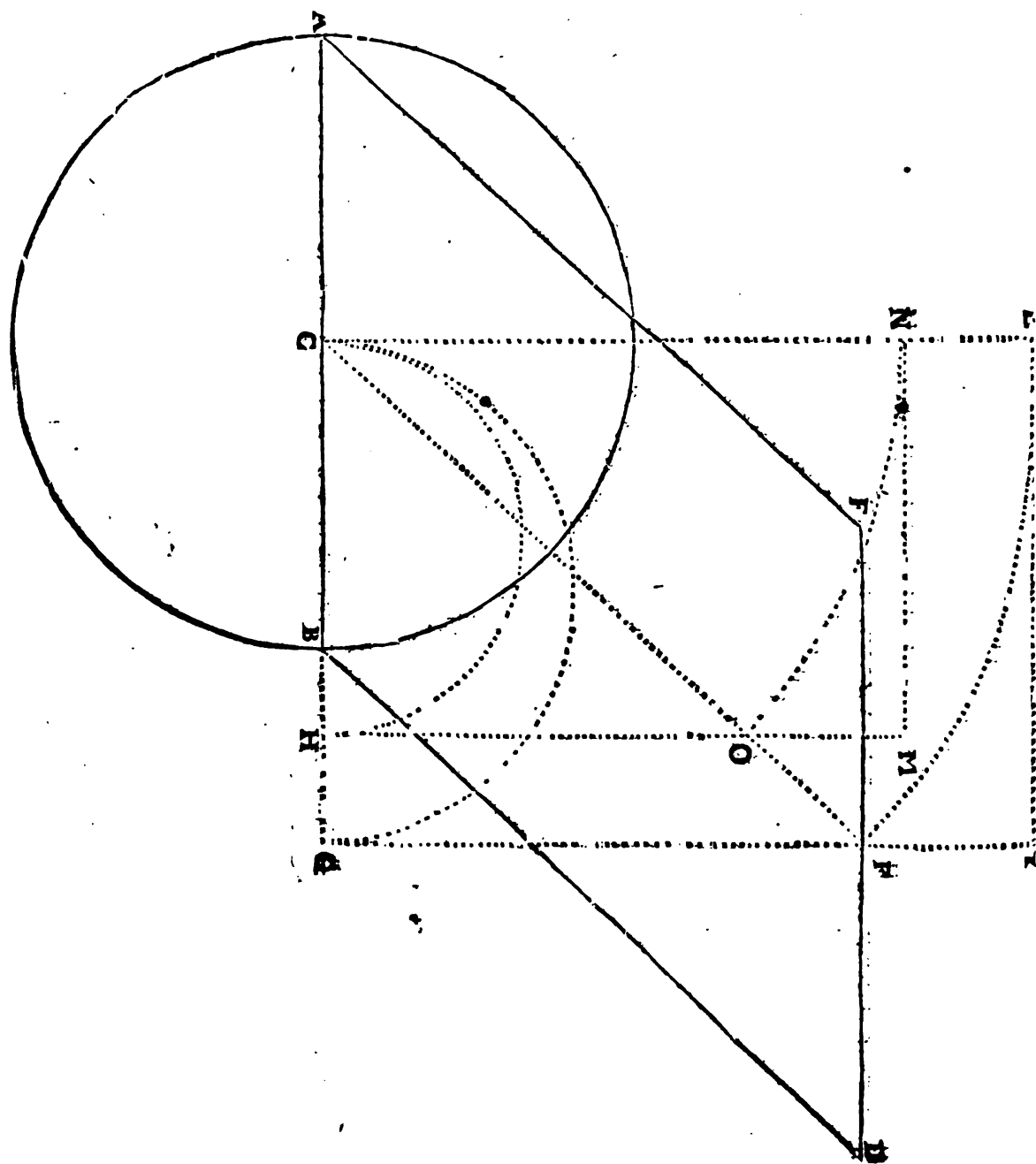
vons feindre que le cercle A 9 T va jusques au centre du cercle FPS 17., & que son diametre AT est égal à BA demi-diametre du cercle BDC; & ainsi le demi-cercle A 9 T sera égal au quart de cercle BD. Or le trait du compas qui s'est fait en la dernière figure F 22 E, se rapporte entièrement à ce qui s'est fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait sur le cylindre droit est égal au quart de la circonférence du cylindre oblique.

Pour conclusion. Si le cercle de la dernière figure F 22 E est égal à celui de l'autre figure, sçavoir BDC, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air) quand le compas est plus ouvert que FE) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraie hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & même sur C: toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E seront égales aux perpendiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égal à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessus que dessous ledit point E.

*Voyez la  
Figure sui-  
vante.*

Que la ligne C G soit le diametre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie; A C B soit le diametre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; C F soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne F G perpendiculaire sur A B, ladite F G sera la hauteur du cylindre

cylindre oblique. Mais si on élève ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diamètre de sa base ; & si on tire de L en I une parallèle à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervalle CL, on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons vû ci-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diamètre du cylindre droit CG, sçavoir de sa base au demi-diamètre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diamètre du cylindre droit est égal au demi-diamètre de l'oblique, alors ce qui est retranché du cylindre droit sera égal à la superficie du cylindre oblique. Mais l'un n'étant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui soit égal à la superficie du cylindre oblique, il est nécessaire de trouver un cylindre droit semblable au premier CLIG, comme est CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle est CH : du point H j'élève la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO semblable au triangle CGF : ces triangles semblables servent à faire le petit cylindre droit semblable au grand cylindre droit ; car du petit cylindre CNMH, on retranche NEO, &c. & ce qui est retranché est égal à la superficie du cylindre oblique proposé ; car le retranché LF du cylindre droit CLIG est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diamètre CG au demi-diamètre CB. Mais le petit cylindre CNMH étant semblable au grand cylindre CLIG, le retranché de l'un sera semblable au retranché de l'autre : les superficies des cylindres sont entr'elles en raison doublée de leurs diamètres ;

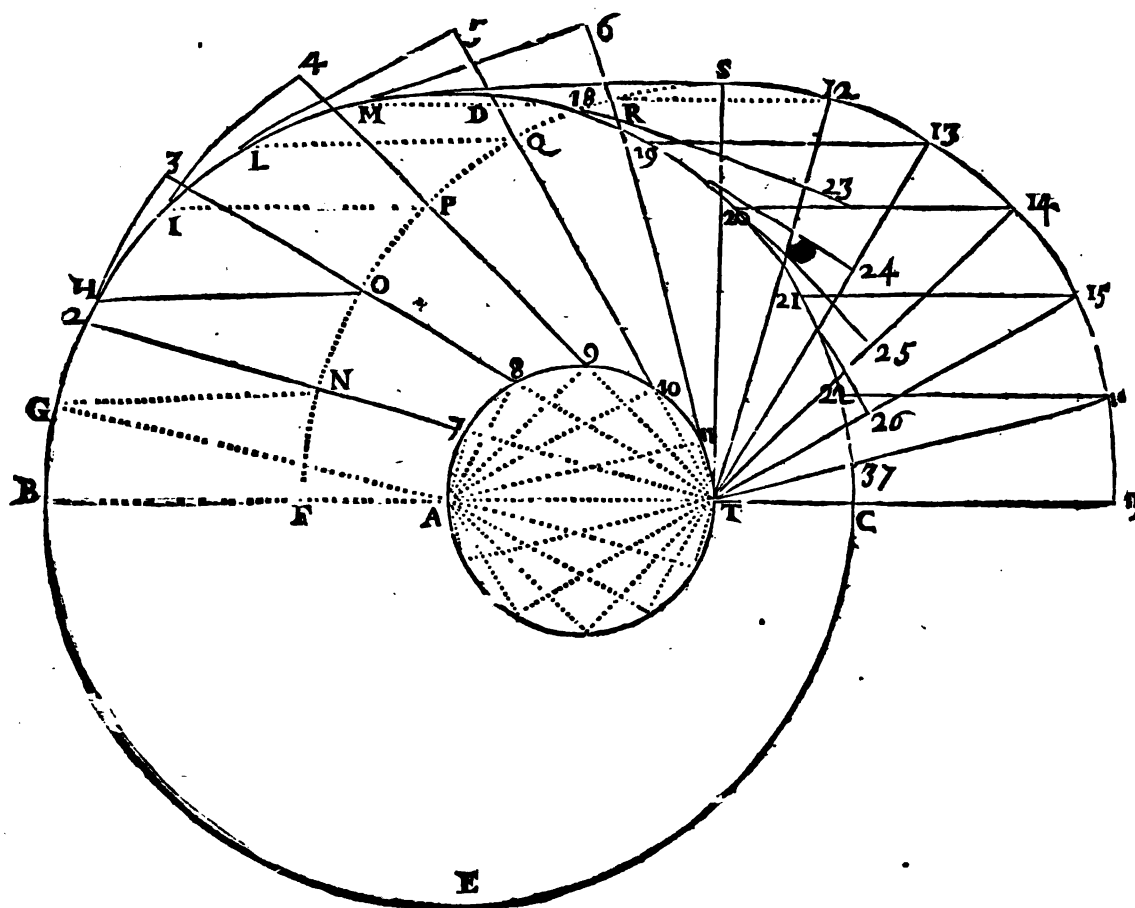


partant la superficie du grand cylindre est à celle du petit en raison doublée de CG diametre du cercle du grand cylindre à CH diametre du cercle du petit ; la superficie de l'un sera donc à celle de l'autre en raison doublée de CG à CH, c'est-à-dire, comme CG à CB. Mais les cylindres droits étant semblables, le retranché de l'un sera au retranché de l'autre, comme toute la superficie de l'un à toute la superficie de l'autre ; partant le tranché du cylindre droit CLF est au retranché du petit cylindre droit CNEO, comme CG à CB. Mais le retranché du grand cylindre droit est à la superficie du cylindre oblique, comme CG à CB ; partant le retranché du petit cylindre est égal à la superficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a même raison au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a été dit ci-devant pour couper sur un cylindre un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique, se peut réduire à ce qui s'ensuit.

Soit fait la figure suivante dans laquelle le diametre du petit cercle, sçavoir AT, doit être égal au demi-diametre du grand cercle BDC base inférieure, & de FPS 17 représentant la base supérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre est perpendiculaire sur T joint au point C. Je dis que si on ouvre le compas autant que le côté du cylindre oblique, & que laissant un des pieds du compas sur le point F joint au point A, on trace une ligne sur le cylindre droit dont la base est A 9 T, l'espace compris entre ladite ligne, & ladite base A 9 T, sera égal à la superficie du cylindre oblique.

Soient divisées les bases desdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, sçavoir, faisant autant de divisions sur le quart de cercle BLD que sur le demi-cercle A 9 T, & ce, tant aux bases supérieures qu'aux inférieures desdits cylindres ; & tirant des lignes



par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cylindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puisque les parallelogrammes fufdits ont même bafe ; puisqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la bafe de chacun des cylindres, re-  
 e à montrer que leur hauteur eft égale. Cette hauteur  
 eft facile à connoître au cylindre droit . puisque le cô-  
 té même du cylindre coupé par le compas , la dénote :  
 mais au cylindre oblique cette hauteur eft la ligne tirée  
 de la bafe fupérieure représentée par les points N , O , P ,  
 &c. perpendiculairement fur la tangente tirée du point  
 correspondant en la bafe inférieure ; ainfi la ligne tirée  
 de N en l'air fur la touchante G 2 ( qui part du point  
 G de la bafe inférieure correspondant au point N de  
 la fupérieure ) enforte qu'il fe faffe un angle droit au point  
 2 , eft la hauteur du parallelogramme tiré de G au point  
 N en l'air de la bafe fupérieure. Et de même , la hau-  
 teur du parallelogramme tiré du point H au point qui  
 eft au-deffus de O en l'air en la bafe fupérieure , eft la  
 ligne tirée du même point O en l'air au point 3 fur la  
 touchante H 3 où elles font enfemble un angle droit ;  
 & ainfi les hauteurs de tous les parallelogrammes font  
 les lignes tirées des points de la bafe fupérieure perpen-  
 diculairement fur les tangentes qui partent des points  
 correspondans en la bafe inférieure ; & ainfi , le moin-  
 dre de tous les parallelogrammes fera celui qui du point  
 D de la bafe inférieure , eft tiré au point correspondant  
 à S en la fupérieure ; car il n'a pour hauteur simple-  
 ment que la hauteur du cylindre oblique , fçavoir les ti-  
 rées perpendiculairement des points C , F , N , O , &c.  
 à la bafe fupérieure. Comme le plus grand defdits pa-  
 rallelogrammes eft celui qui de B eft tiré vers F en l'air ;  
 car fa hauteur eft le côté entier du cylindre oblique :  
 il reſte à démontrer que ces perpendiculaires font éga-  
 les en l'un & en l'autre cylindre.

Premierement, il eft certain que l'ouverture du com-  
 Sf iij

pas, qui fait le retranchement sur le cylindre droit, étant égale au côté du cylindre oblique, la perpendiculaire sur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, fera égale à celle qui va du point B au point correspondant de la base supérieure du cylindre oblique, qui est aussi le côté du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire sur le point T au cylindre droit est égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à sa base supérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de la base inférieure va à celui de la supérieure qui est au-dessus de T, est égal au côté du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas: mais ledit point T en l'air, centre de la base supérieure, est le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire sur T au cylindre droit, sera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire sur S.

On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des côtes soit DS; le second, la perpendiculaire qui va de S à la base supérieure; & le troisième qui va de D audit point sur S en l'air; car ce triangle est entièrement égal à celui qui se fait au dedans du cylindre droit dont un des côtes est AT; l'autre, la perpendiculaire sur T jusques au retranchement; & le troisième est l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & est égale au côté du cylindre oblique, sçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air; la ligne AT est égal à DS, comme il est aisé de le montrer; les angles en T & en S sont droits; & partant les triangles sont égaux, & la ligne sur T égale à la ligne sur S.

On montrera, comme ci-devant, l'égalité des autres perpendiculaires; sçavoir, celle sur 7 au cylindre droit.

& celle qui tombe sur  $z$  à l'oblique; celle sur  $8$ , à celle sur  $3$ , &c. & nous le répéterons encore ici. L'ouverture du compas est égale en puissance aux quarrés de  $AT$  & de la perpendiculaire sur  $T$  du cylindre droit; & pareillement elle est égale aux quarrés de  $A7$  & de la perpendiculaire sur  $7$ , & aux quarrés de  $A8$  & de la perpendiculaire sur  $8$ , &c. Donc les quarrés de  $AT$  & de la perpendiculaire sur  $T$  sont égaux aux quarrés de  $A7$  & de la perpendiculaire sur  $7$ ; & si au lieu du quarré  $AT$  on prend les quarrés de  $A7$  &  $7T$  qui lui sont égaux, on aura les quarrés de  $7T$ ,  $7A$ , & de la perpendiculaire sur  $T$  égaux aux quarrés de  $7A$ , & de la perpendiculaire sur  $7$ ; & ôtant de part & d'autre le quarré  $7A$ , on aura le quarré de la perpendiculaire sur  $7$  égal aux quarrés de  $7T$ , & de la perpendiculaire sur  $T$ .

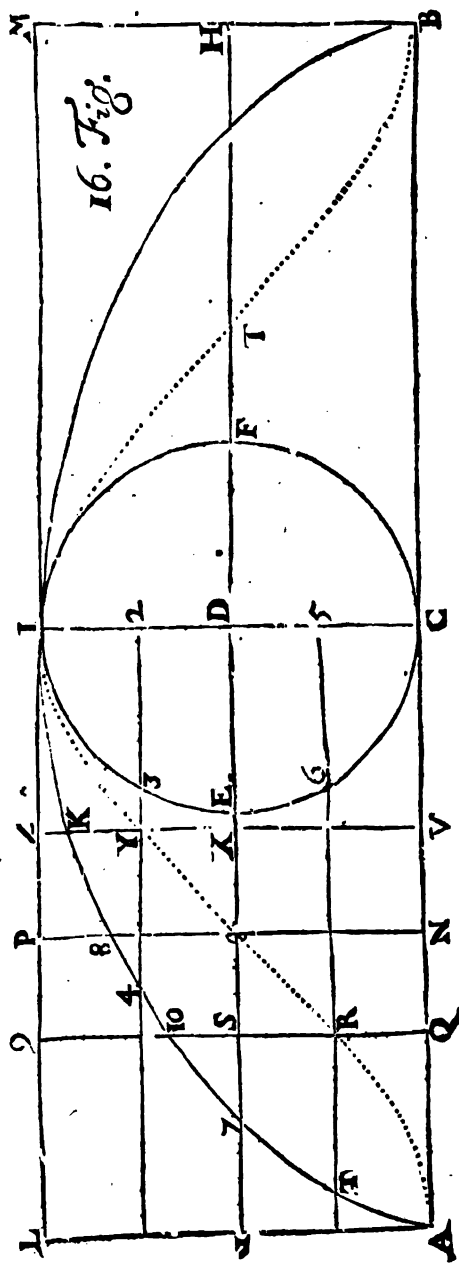
De plus, on a montré que  $zN$  est égal à  $7T$  par le moyen du rectangle  $7AGz$ . Il faudra donc pour la perpendiculaire sur  $z$  imaginer un triangle rectangle en l'air sur le point  $N$  dont un des côtes sera  $Nz$ ; le second, la perpendiculaire qui du point  $N$  va trouver le point correspondant en la base supérieure du cylindre oblique; & le troisième est la perpendiculaire cherchée, qui du point  $N$  en l'air est menée au point  $z$ , & ce troisième côté étant opposé à l'angle droit en  $N$ , vaut en puissance les quarrés de la perpendiculaire sur  $N$  (égal à celui de la perpendiculaire sur  $T$ ) & de la ligne  $Nz$  égale à  $7T$ ; donc la perpendiculaire sur  $7$  sera égal à la ligne qui du point  $N$  en l'air tombe sur  $z$ . Mais ces lignes désignent la hauteur des parallelogrammes faits sur les cylindres, & partant lesdits parallelogrammes ayant la base égale & la hauteur égale sont égaux; & partant la surface du cylindre oblique égale à ce qui est coupé du cylindre droit. Mais si la perpendiculaire

tirée du centre de la base supérieure ne tombe pas sur la circonférence de la base inférieure, en sorte que  $AT$  soit pas égal au demi-diamètre de ladite base, alors il faut proportionner, comme on a montré au discours sur la page 322.

### DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

**Q**UE  $AIB$  soit le chemin de la Roulette;  $ALMB$  le parallélogramme fait du diamètre  $IC$ , & de la circonférence  $AB$  étendue en ligne droite. Nous cherchons la raison qu'il y a du cylindre fait par le parallélogramme, au solide fait par la Roulette  $AIB$ , lorsque le tout tourne sur l'adite circonférence  $ACB$ . Pour cet effet, je tire la ligne  $GDH$  parallèle à  $ACB$ ; & cette ligne se prend pour le chemin du point  $D$  centre de la Roulette. Or cette ligne  $GDH$  coupe la figure  $AOI_4$  & le demi-cercle  $CEI$ , chacune en deux parties semblables: or il y a un Théorème qui porte que, quand deux figures sont ainsi coupées par une ligne parallèle à la ligne sur laquelle les figures font leur tour, les solides des figures sont entr'eux comme les figures; & partant le solide fait par la figure  $AOI_4$  est égal au solide fait par la demi-circonférence  $IEC$ ; car nous avons vu comme le plan  $AOI_4$  est égal au demi-cercle  $IEC$  que nous avons trouvé être le quart du parallélogramme; ainsi ces solides seront chacun le quart du cylindre fait par le parallélogramme. Mais ne prenant que le seul solide fait par  $AOI_4$  qui sera le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne  $QRS$  qui représente toutes les lignes tirées perpendiculairement de  $AN$  premier quart de la circonférence  $ACB$  sur  $GDH$ , & la ligne  $VXY$  qui représente toutes les lignes tirées de  $NC$  second quart, sur la ligne courbe  $OYI$ : nous disons que le quarré de  $QR$  est égal  
aux

aux quarez de QS  
& SR, moins deux  
fois le rectangle Q-  
SR, & ainsi des au-  
tres lignes tirées sur  
ledit quart AN; & de  
plus que le quarré de  
VY est égal aux quar-  
rez de VX, & XY  
plus deux fois le rec-  
tangle VXY, & ainsi  
des autres lignes ti-  
rées sur le second  
quart NC. Or les re-  
ctangles qui se trou-  
vent dans l'espace  
AO sont égaux à  
ceux de l'espace NI;  
& étant de plus d'un  
côté & moins de l'au-  
tre, on les ôtera de  
part & d'autre. Il re-  
stera donc que les  
quarrez de QR, VY  
& des autres lignes  
tirées de AC sur la  
ligne courbe ARO-  
YI pris tous ensen-  
ble, seront égaux aux  
quarrez du demi-dia-  
mètre QS ou VX pris  
autant de fois, & aux  
quarrez de SR, XY,  
& autres lignes tirées  
de GD sur la ligne



courbe AOI pris aussi autant de fois. Or lesdites lignes SR, XY, &c. sont des sinus droits dont les quarez sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarez du demi-diametre sont aux quarez du diametre, comme 2 à 8. Si on joint ces raisons, on aura celle de 3 à 8 qui est celle des quarez des lignes tirées de AC sur la ligne courbe AOI au quarré du diametre pris autant de fois; & si on y joint la raison de la figure AOI 4 au parallelogramme AI, qui est comme 2 à 8, on aura la raison de 5 à 8, qui est celle du solide que fait la Roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant sur ACB.

On conclura la même chose en considérant les quarez des sinus versés QR, VY, & les autres, lesquels sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'espace ARI 4 est au parallelogramme AI, comme 2 à 8, qui joint avec la raison de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle est la raison du solide de la Roulette au cylindre, comme en l'autre conclusion.

Maintenant il faut voir quelle raison il y aura entre le solide de la même Roulette & son cylindre, lorsqu'elle tourne sur LM parallele à AB, où il faut considérer que le quarré de N 8 vaut les quarez de NP & P 8 moins deux fois le rectangle NP 8; & ainsi le quarré N 8 plus deux fois le rectangle NP 8 est égal aux quarez NP, P 8. On sçait que les quarez de N 8, VK, & de toutes les autres sont au quarré du diametre CI ou NP son égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles NP 8, VZK, & tous les autres: or ces rectangles ont tous pour hauteur NP, & partant ils seront entr'eux comme toutes les lignes P 8; ZK, 9 10, & les autres. Mais tout l'espace rempli de ces lignes, ou plutôt toutes ces lignes sont au diametre pris autant de fois, comme 2 à 8: & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils seront au quarré du dia-

metre pris autant de fois, qu'il y a de lignes VK, N 8, Q 10, &c. comme 4 à 8; laquelle raison jointe à celle de 5 à 8 ci-devant, font celle de 9 à 8, ou  $\frac{9}{8}$ ; & parce que les quarez Q 9, NP, VZ, &c. représentent les 8, il s'ensuivra que les quarez 9 10, P 8, ZK, &c. vaudront  $\frac{7}{8}$ ; car puisque les quarez Q 10, N 8, VK, &c. avec deux fois les rectangles Q 9 10, NP 8, VZK, &c. (qui tous ensemble avec lesdits quarez vallent  $\frac{9}{8}$ ) sont égaux aux quarez Q 9, 9 10, NP, P 8, VZ, ZK, &c. ceux-ci vallent aussi  $\frac{9}{8}$ . Si donc on en ôte les quarez Q 9, NP, VZ, qui vallent  $\frac{9}{8}$ , restera  $\frac{1}{8}$  pour les quarez 9 10, P 8, ZK, qui ôtez encore des mêmes quarez Q 9, NP, VZ, restera  $\frac{7}{8}$  pour le solide de la Roulette, qui sera au cylindre comme 7 à 8.

La même chose se peut conclure d'une autre façon, en disant que le quarré P 8 est égal aux deux quarez PN, N 8 moins deux fois le rectangle PN 8, & tous les autres de même, sçavoir le quarré de ZK égal aux quarez de ZV, & KV moins deux fois le rectangle ZVK, & ainsi des autres. On a vû que les quarez de N 8 & les autres, sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 5 à 8; & joignant le quarré de NP qui est 8, avec 5, on aura la raison de 13 à 8. De cette somme il faut ôter le moins, sçavoir les rectangles PN 8 & autres, tous lesquels ont même hauteur, sçavoir PN; ils seront donc entr'eux comme leurs bases VK, N 8, Q 10, & les autres. L'espace A 8 I D C rempli par les petites lignes VK, N 8, &c. est au grand parallelogramme AI, comme 6 à 8; & le rectangle pris deux fois sera audit parallelogramme, comme 12 à 8; & ôtant la raison de 12 à 8 de celle de 13 à 8, restera celle de 1 à 8, comme ci-devant pour la valeur des quarez ZK, P 8, 9 10, & les autres.

Il faut maintenant considérer les solides qui se font

quand la figure tourne sur LA, où on remarquera que la ligne IC parallèle à ladite LA, coupe le parallélogramme AM & la figure AIB en deux également; & partant les solides sont entr'eux comme les plans; & ainsi le solide fait par AIB sera au cylindre formé par le parallélogramme AM, comme le plan de l'un est au plan de l'autre. Mais les plans sont entr'eux comme 4 à 3; partant le cylindre sera au solide de la Roulette comme 4 à 3.

Considérons maintenant le solide fait par le plan de la compagne de la Roulette AOITB. On voit que la ligne IC coupe en deux également tant le parallélogramme AM, que ladite figure AOITB; partant les solides seront entr'eux comme les plans: mais les plans sont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre sera au solide fait par AOITB, comme 2 à 1, c'est-à-dire double.

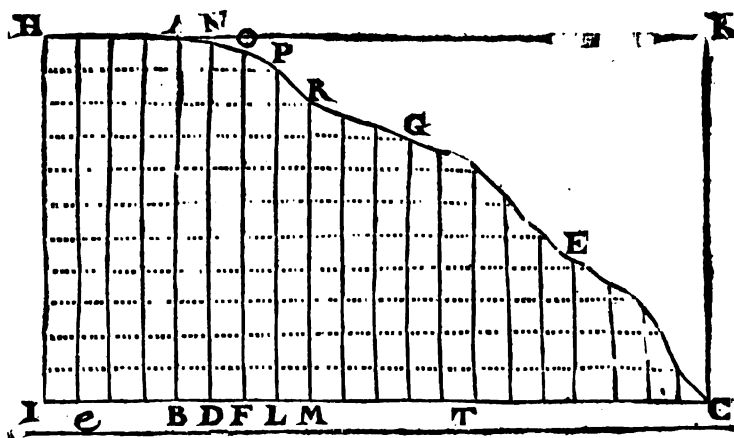
On conclura de là que le solide fait par la figure AOI 10 est au cylindre AI, comme 1 à 4; car puisque le solide fait par A8IDC est au cylindre AI comme 3 à 4: si on en ôte le solide fait par AOIDC qui est au même cylindre AI comme 2 à 4, restera la raison de 1 à 4, pour celle du solide fait par AOI 10, au même cylindre AI.

### PROPORTION DES SOLIDES

*composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura même base & même hauteur, ensemble de leur centre de gravité.*

**Q**UE AGECE soit une ligne irrégulière telle qu'on voudra, pourvu toutefois qu'elle baisse toujours vers C; & soient tirées les lignes AB, BC, qui fassent un angle en B, lequel soit ici supposé être droit, car cela

n'est pas nécessaire, & on aura le triligne ABC. Que les lignes AB, BC soient divisées en une infinité de parties égales, & chaque partie de AB soit égal à chaque partie de BC : de chaque point de la division soient ti-



rées des parallèles aux lignes AB, BC, qui divisent le triligne, comme on voit ici. Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan ABC égale à BC ; puis je conçois un plan sur la ligne AB, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air. Ensuite j'éleve de chaque point de la ligne BC une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires est égale à sa correspondante, sçavoir à celle qui va du point dont elle a été tirée jusques à la ligne AB : comme la perpendiculaire tirée sur D sera égale à BD, celle qui est élevée sur F est égale à BF, & ainsi des autres. Il faut aussi concevoir un triangle rectangle isocelle qui se fait par la ligne BC, la perpendiculaire en l'air sur C qui est égale à BC, & la ligne qui va de B à l'extrémité de ladite per-

pendiculaire : le plan de ce triangle est égal à la moitié du quarré BC ; le même doit être entendu de tous les triangle qui se font par le moyen du plan incliné, qui tous sont égaux à la moitié du quarré de leurs côtez égaux.

Il faut ensuite considérer une perpendiculaire élevée sur le point A qui chemine sur la ligne AGE C, & qui rendontre le plan incliné : cette ligne par son chemin décrit une superficie ; & par conséquent on a quatre superficies qui enferment un solide, la première est le plan du triline ACB ; la deuxième, le plan incliné qui commence à AB ; la troisième est le triangle sur BC en l'air & perpendiculaire sur le plan ABC ; la quatrième est celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne AGE C. Ce solide est distingué & comme composé d'une infinité de triangles tous paralleles & semblables à celui qui est élevé perpendiculairement sur BC, & qui est une des faces du solide ; partant ce solide partagé de cette sorte est formé de la moitié de tous les quarrés de la ligne BC, & de ses paralleles.

Que si on veut couper ce solide d'un autre sens, sçavoir par des plans paralleles à la ligne AB, alors on fera dans le solide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes BDN, BFO, BLP &c. partant tous ces parallelogrammes ensemble seront égaux aux demi-quarrés de la ligne BC & de ses paralleles ; car c'est le même solide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrés de la ligne BC & de ses paralleles, sont égaux à tous les parallelogrammes NDB, OFB, PLB &c.

Soit tiré une parallele à AB en quelque part qu'on voudra : que ce soit HI, sçavoir hors de la figure, & soit achevé le parallelogramme HICK, & soit élevé un plan sur la ligne HI, incliné en telle sorte, qu'il ren-

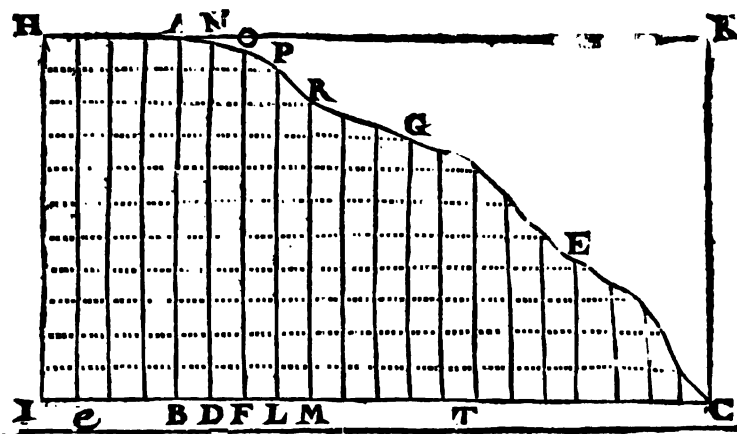
contre comme le précédent, l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air prise de la longueur de IC ; & soit aussi prolongé les lignes de la figure jusques à la ligne HI : on trouvera que les demi-quarrez de la ligne IC & des autres paralleles à cette ligne , qui aboutissent à HI sont égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure ABC , en les prolongeant jusques à HI , & dans l'espace HIBA , sçavoir ABI , NDI , OFI , &c.

Nous considérerons maintenant la figure quand elle tourne sur HI. Alors elle forme trois solides , sçavoir un cylindre par HIBA ; un solide qui se nomme creux par la figure ACB ; un autre par HACBI ; & le grand cylindre HICK. Nous cherchons les raisons de ces solides entr'eux. Pour le petit cylindre , il est au grand cylindre comme le quarré de HA est au quarré de HK ; le solide fait de HIBCA est au grand cylindre , comme le quarré de IC & des autres paralleles jusques à HA , sont au quarré de HK pris autant de fois ; le solide de la figure ABC est au grand cylindre comme le quarré de IC & des autres paralleles moins le quarré IB , pris autant de fois , est au quarré HK pris autant de fois : & si on prend la moitié du solide , elle sera au grand cylindre , comme la moitié des quarrez IC , & des autres moins la moitié du quarré IB pris autant de fois , est au quarré HK pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur est égal , sçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure HABI , & ils seront au grand quarré HK pris autant de fois , comme la moitié du solide de la figure est au grand cylindre. Que si on fait tourner la figure ABC sur AB , alors la moitié du solide fait par ABC sera au cylindre fait par ABCK , comme la moitié des quarrez de BC & de ses paralleles , sont au quarré de BC pris autant de fois ; & en general , sur quelque ligne qu'on fasse

tourner la figure, pourvû qu'elle soit parallele à AB, on aura toujours la même équation; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarrez compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la même ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cet effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appui & en C la puissance: tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pesent; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'eux pese; & tous ces centres ensemble viennent à être égaux (eu égard à la pesanteur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme; F, du second parallelogramme; L, du troisième &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des côtez de leurs figures, par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de ND à FO, & de celle de BD à BF; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécédens est à celui des conséquens, sçavoir comme le parallelogramme NDB est au parallelogramme OFB: ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes AB, ND, OF, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pese sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne

BC où les parties sont contrepesées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il est en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres ci-dessus représentées par toutes les lignes qui sont sur les points. Ce poids



est donc une ligne égale à toutes les lignes ci-dessus, & je dis ainsi : Toutes les pesanteurs, ou centres de gravité ensemble sont au poids de toute la figure qui est en M, comme tous les parallelogrammes de la figure sont au grand parallelogramme qui a un côté égal à toutes les lignes ci-dessus, & la ligne BM pour l'autre côté (car on prend ici les parallelogrammes qui étant perpendiculaires sur les lignes ND, OF, PL, &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne AB, & en montant va rencontrer le point sur C en l'air élevé à la hauteur de CB, comme il a été dit ci-devant.) Mais toutes les pesanteurs assemblées sont égales à la pesanteur qui est en M; partant tous les parallelogrammes de la figure sont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes BA, DN, FO, &c. pour un de ses côtez, & BM

pour l'autre : étant égaux ils auront même raison à une autre grandeur ; c'est pourquoi tous les rectangles sont au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes les lignes susdites AB, ND, OF, &c. pour un de ses côtez, & BM, pour l'autre, est au même quarré pris comme ci-devant.

Au lieu de tous les rectangles susdits je prens ce qui leur est égal, sçavoir les demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, BM, BC, &c. ils seront donc au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle susdit qui a BM pour un de ses côtez, & pour l'autre toutes les lignes AB, ND, OF, &c. est audit quarré BC pris &c. Mais nous avons vû que comme le cylindre fait par ABCK. est à la moitié du solide fait quand la figure tourne sur AB, ainsi le quarré BC pris autant de fois, est aux demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, &c. Donc le rectangle qui a les lignes AB, ND, OF, &c. pour un de ses côtez, & BM pour l'autre, est au quarré BC pris autant de fois, comme la moitié du solide fait par ABC est au cylindre. Par les indivisibles je fais des solides de tous ces plans, & je dis que la moitié du solide fait par ABC est au cylindre fait par ABCK, comme le solide qui a pour base la figure ABC, & BM pour hauteur, est au solide qui a pour base le parallelogramme ABCK, & BC pour hauteur. Or les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur ; partant la moitié du solide de ABC, & le cylindre du parallelogramme ABCK, sont la raison composante des deux solides, qui sont entr'eux en la raison composée du parallelogramme ABCK à la figure ABC, & de celle de la ligne BC, à BM. Nous connoissons la raison composante, c'est-à-dire de la moitié du solide au cylindre ; car (si c'est une parabole) son solide est à son cylindre comme 8. à 15. : ici nous n'avons que la moitié du soli-

de; c'est pourquoi ce sera comme 4 à 15. Pareillement la raison du plan de la parabole à son parallelogramme est connue, qui est comme 2 à 3, ôtant donc de 4 à 15 la raison de 2 à 3 ou de 4 à 6, il reste celle de 6 à 15; & telle est la raison de BM à BC, & le point M est le centre.

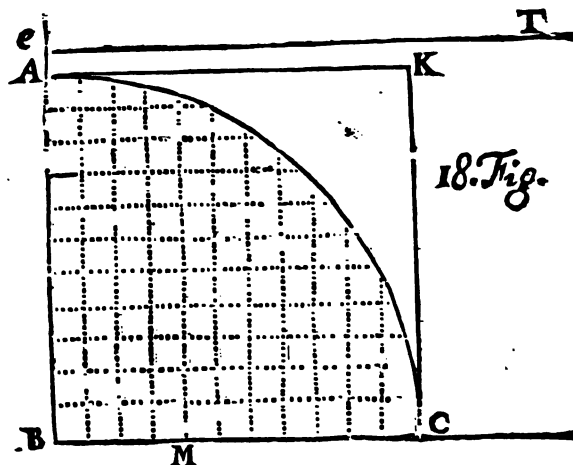
Que si nous feignons un cylindre tel qu'il soit la moitié d'un solide, & que nous disions: Comme le cylindre est à la moitié du solide, ainsi quelque ligne, comme  $\epsilon T$  est à ligne BM; & comme le parallelogramme ABCK est au plan ABC, ainsi la même ligne  $\epsilon T$  est à la ligne BC: ces trois lignes composent la raison qui est entre la moitié du solide & le cylindre, qui sera la raison composée de  $\epsilon T$  à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M sera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder selon cette dernière façon il faut avoir trouvé cette ligne  $\epsilon T$ , faisant que, comme le plan ABC est au parallelogramme ABCK, ainsi la ligne BC soit à  $\epsilon T$ ; & puis dire: Comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait par ABC tournant sur AB, ainsi la ligne  $\epsilon T$  soit à BM: le point M marque le centre de gravité. Cette méthode est pour agir plus élégamment, & plus brièvement que par la première qui est plus sûre, sçavoir par la composition de raison des deux solides qui sont entr'eux en la raison composée de celle de leur base, & de celle de leur hauteur, comme il a été dit ci-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le solide qui se fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendrait en C, puis après du point C l'autre quart de cercle viendrait rencontrer la ligne AB prolongée tant que de besoin. Quand ce quart de cercle tourne sur AB, il se fait un solide de ce quart, & il se fait un cylindre du

Voyez la  
Figure suivante.

parallelogramme  $ABCK$ , lequel, en cette figure, est un quarré; car  $AB$  est égale à  $BC$ , & chacune est le demi-diametre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité, sçavoir, le point  $M$ , en la façon ordinaire, sçavoir, que le demi - solide du quart de cercle, est à son cylindre comme le solide qui a pour base le quart de cercle, & pour hauteur la ligne  $BM$ , est



au solide qui est composé du quarré  $BC$  pris autant de fois qu'il y a de divisions en  $BC$ . Mais les solides sont entr'eux en la raison composée de celle de leur hauteur, & de celle de leur base, sçavoir comme le quart de cercle, au quarré  $BC$ , & comme la ligne  $BM$ , à  $BC$ ; en telle sorte que ces quatre termes composent la raison de la moitié du solide fait par le quart de cercle, à son cylindre, laquelle est connuë; car le cylindre est au solide comme 6 à 4; mais ici il n'y a que la moitié, & partant la raison sera comme 6 à 2. La raison du plan au plan, & de la ligne à la ligne, sera donc comme 2 à 6; la raison du plan au plan est connuë; car en cette figure, selon Archimède, elle est comme 11 à 14. Si

donc je soustrais la raison de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il restera la raison de 14 à 33 pour celle des lignes BM à BC; & le point M vient à être le lieu du centre de gravité, en la première manière.

La deuxième façon est en disant : Comme le cylindre de ABCK est à la moitié du solide du quart de cercle, ainsi la ligne  $eT$  est à BM; (on trouvera la ligne  $eT$  comme ci-devant, sçavoir en faisant comme le plan du quart de cercle est au parallélogramme, ainsi la ligne BC est à  $eT$ ) c'est pourquoi nous voyons que la moitié du solide est à son cylindre, en la raison composée de  $eT$  à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M est encore le centre de gravité, selon la seconde méthode.

La troisième méthode est la plus subtile, & elle est telle : comme le quart & demi de la circonférence, sçavoir AC & sa moitié, le tout pris comme ligne droite, est à BC demi-diamètre, ainsi BC est au tiers de la ligne  $eT$  trouvée comme ci-dessus; & il se trouvera que BM sera le tiers de ladite  $eT$ ; & ainsi le point M sera le centre de gravité. Il faut montrer que BM est le tiers de  $eT$ ; de plus que le quart, & demi de la circonférence est à son demi-diamètre, comme le même demi-diamètre est à BM tiers de  $eT$ .

Pour le premier, il est aisé à voir; car faisant que comme la moitié du solide est au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par ABCK, est à la moitié du solide fait par le quart de cercle, ainsi la ligne  $eT$  soit à BM. Nous sçavons que le cylindre est triple de la moitié du solide; partant la ligne  $eT$  sera triple de BM, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, sçavoir le quart & demi de la circonférence pris comme ligne droite, le demi-diamètre & le tiers de  $eT$  sont proportionnelles. Ceci se démontre par la proportion.

V u iij.

troublée que je dispose comme il s'en suit. Que le quart & demi de la circonférence soit  $a$ ; le demi-quart de la même circonférence soit  $b$ ; le demi-diamètre soit  $c$ ; le même demi-diamètre soit aussi  $d$ ; la ligne  $eT$  soit  $e$ ; & le tiers de la ligne  $eT$  ou la ligne  $BM$ , soit  $m$ . On fera les proportions suivantes.

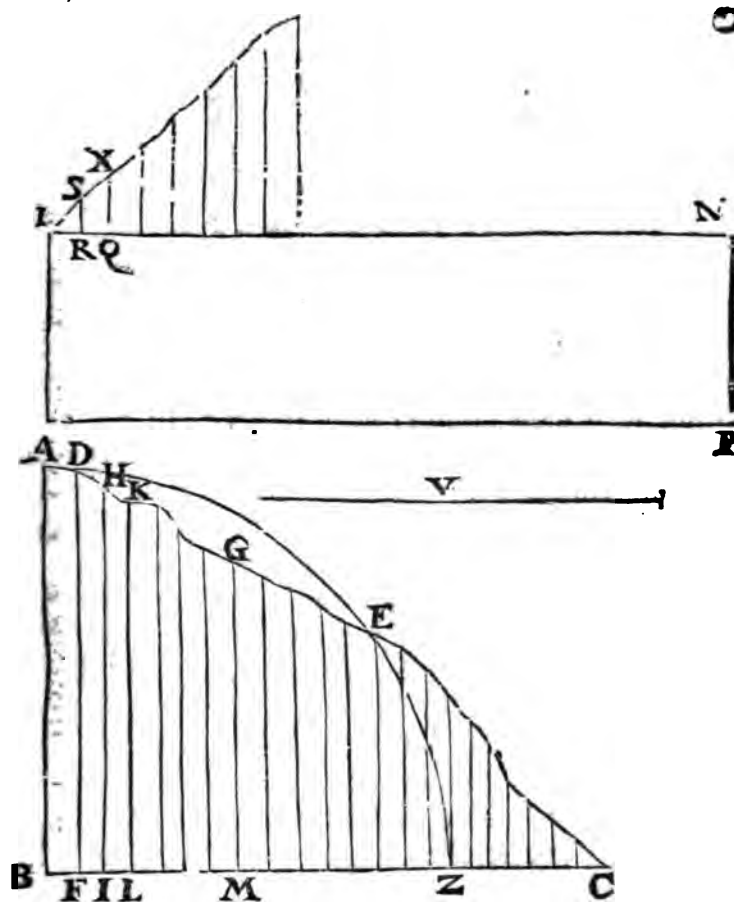
Comme  $a$  est à  $b$ , ainsi  $e$  est à  $m$ ; & comme  $b$  est à  $c$ , ainsi  $d$  est à  $e$ ; partant comme  $a$  est à  $c$ , ainsi  $d$  est à  $m$ ; partant les trois lignes  $a$ ,  $c$ ,  $m$  sont proportionnelles, ce qui restoit à démontrer.

Tout ce qui a été dit jusques à présent ne sert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un solide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puisse être, soit droite, circulaire, ou irrégulière.

### TROUVER LE CENTRE DE GRAVITE de la ligne AGE C.

**S**OIT divisé la ligne AGE C en une infinité de parties égales; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme ci-devant, soit aussi tiré des parallèles à AB de chaque point de la division, qui diviseront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur pesanteur; & le poids d'une partie n'est pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion est représenté par le point de sa division: les parallèles portent chaque pesanteur sur le levier BC aux points de sa division; & c'est sur ces points de BC que pesent toutes les parties de la ligne AGC. Nous sçavons que les poids sont entr'eux comme les rectangles; c'est-à-dire que le poids du point D est au poids du point H, comme le rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou son égale DH, & de BI. Au lieu de dire,

comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à  
 , parce que les rectangles ont tous un côté égal, sça-  
 voir la portion de la ligne AGC. Je feins que le cen-



soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à  
 GC qui représente sa pesanteur; puis je dis que le poids  
 du point F est au poids du point M centre, comme la  
 ligne BF est à la ligne BM; le poids du point I est au

poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainsi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points pesans sur ceux de la ligne BC sont au poids universel pesant sur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une seule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM &c. est au rectangle fait par la ligne AGC pendue au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramassez ensemble sont égaux au poids en M, qui est le poids de toute la ligne; & partant les deux rectangles sont égaux, & leurs côtes sont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la résolution de la question du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'ôte par les indivisibles la portion de la ligne AGC : cette portion étant une & terminée, ne diminuë rien dans l'infini; (car tout ce qui est fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ni ne diminuë rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reste l'espace compris par les lignes BF, BI, BL, &c. qui est égal au même rectangle de AGC par BM. Je pose que la ligne AGC soit la droite TN, laquelle étant divisée infiniment, j'éleve sur chaque point de la division perpendiculairement la ligne RS égale à BF, QX égale à BI, & ainsi des autres. Les lignes ainsi élevées composent une figure égale au rectangle TP dont le côté NP est égal à BM, & TN égal à AGC, puis je cherche un quarré qui soit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un est égal à l'autre.) Que son côté soit la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne AGC est à la ligne V, ainsi la ligne V est à la ligne BM cherchée; & ceci est la proposition universelle. Comme la ligne proposée à la ligne dont le quarré est égal à la figure ou plan fait par routes les lignes BF, BI,

BI, BL, &c. ainsi cette même ligne qui est le côté du dit quarré, est à la ligne BM cherchée; & ainsi ces trois lignes, sçavoir la donnée, celle qui est le côté du quarré susdit, & la cherchée BM sont continuellement proportionnelles.

Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonférence AGZ. Alors il faudra dire : Comme la ligne AGZ étendue en ligne droite est à son demi-diametre BZ, ainsi ce demi-diametre est à la ligne cherchée BM. Mais le quart de la circonférence est au demi-diametre, comme tous les sinus tirez par les points esquels est divisée la circonférence, sont au sinus total pris autant de fois; or tous ces sinus sont les lignes BF, BI, BL, &c. répondans aux points de la circonférence divisée en parties égales infinies; & tous ces sinus sont égaux au quarré du demi-diametre, comme il paroît par la troisième proposition.

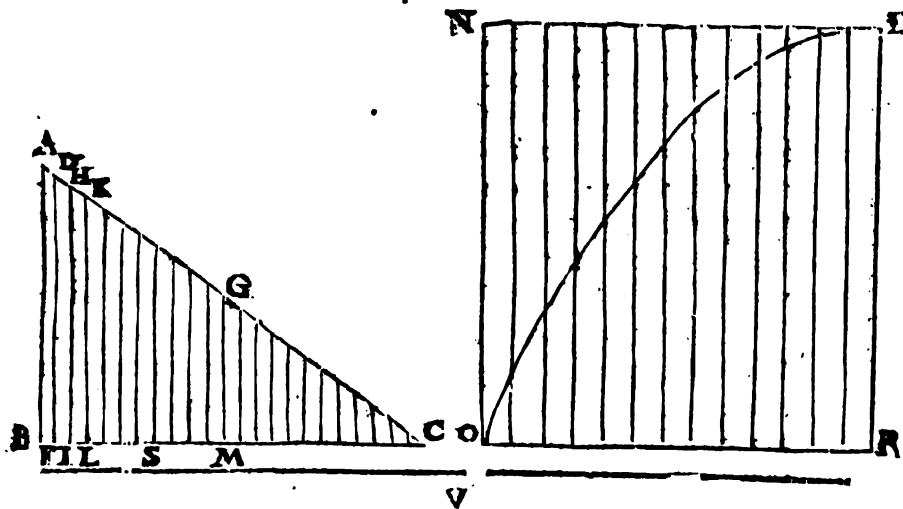
Mais si on suppose que la ligne AC soit droite, pour en trouver le centre de gravité je la divise en une infinité de parties égales & de chaque point de la division je tire des lignes paralleles à AB, qui tombent sur le levier BC & le divisent en parties égales entr'elles, & divisent la figure ABC en triangles semblables: les points de la ligne BC marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne proposée AC. Or tous ces centres ou pesanteurs sont entr'elles, comme les rectangles sont entr'eux, c'est à sçavoir comme le rectangle BF par AD est au rectangle BI par DH ou son égale AD; & d'autant que la portion de AC est toujours la même en tous les rectangles, les centres sont entr'eux, comme les lignes BF, BI, BL, &c. de sorte que ces petits centres ou pesanteurs particulieres sont au centre ou pesantEUR totale qui est au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & pesantEUR à la ligne AC) comme

*Voyez la  
Figure sui-  
vante.*

toutes les lignes BF, BI, BL, &c. sont au rectangle AC par BM; car par les indivisibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne AC, sçavoir de AD, & de toutes les lignes BF, BI, BL, &c. prises ensemble, ladite portion AD. Il faut trouver une ligne qui soit égale en puissance à l'espace fait par toutes les lignes BF, BI, BL, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, sçavoir AC, est à cette ligne dont le carré est égal à l'espace & plan susdit fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainsi cette ligne ou côté de carré est à BM; en sorte que la ligne susdite qui peut l'espace fait par les lignes BF, BI, BL, &c. soit moyenne proportionnelle entre la ligne proposée AC, & la cherchée BM. Mais toutes ces lignes sont à BC pris autant de fois, comme le triangle au carré de la somme ou multitude desdits points, c'est-à-dire, comme 1 à 2; partant la ligne BM vaudra en puissance le quart du carré BC; & partant BM est la moitié de BC; & ainsi le centre de ladite ligne proposée est au milieu d'icelle: car du point M tirant une ligne parallèle à AB, elle passera par le point G milieu de la ligne AC, & marquera le lieu de son centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure solide, soit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, solide elliptique, ou de quelque autre solide connu. Parlons premierement du cône qui est représenté par la ligne AC, & par CB tirée perpendiculairement sur AB. Le sommet du cône est C, l'axe est CB, & la ligne AB étant doublée vient à être le diamètre du cercle, ou base du cône. Que l'axe de ce cône, sçavoir BC, soit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales: toutes ces divisions font autant de cercles, qui tous ensemble par les indivisibles composent le cône, & sont entr'eux

comme les quarez de leurs diametres; ſçachant donc comme les diametres ſont entr'eux, on ſçaura auffi la proportion des quarez. Or cette diviſion fait dans le cône & ſur ſon axe des triangles ſemblables, comme



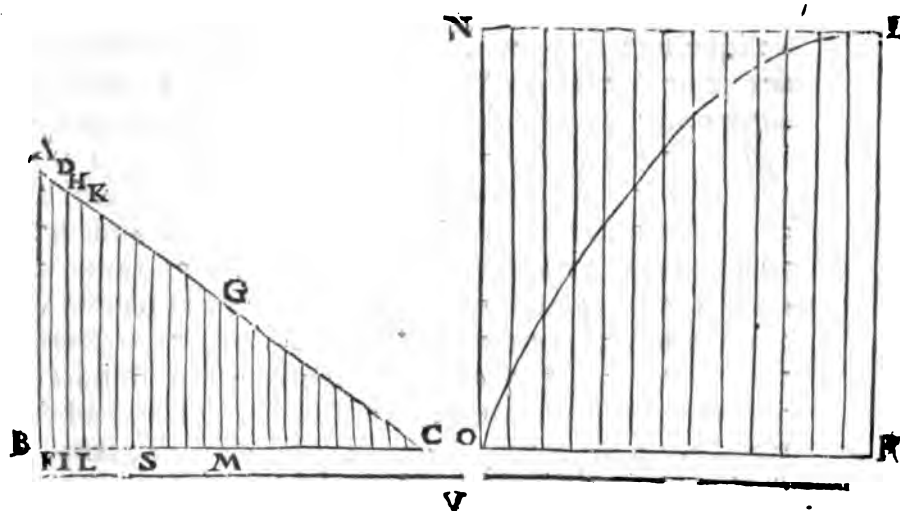
ABC, DFC, HIC, KLC, &c. c'eſt pourquoi les demi-diametres AB, DF, HI, KL &c. ſont entr'eux, comme les portions de l'axe BC, FC, IC, LC ſont entr'elles : or ces portions ayant différences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diametres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diametres gardent l'ordre naturel des nombres; leurs quarez garderont l'ordre naturel des quarez deſdits nombres; & partant ces cercles ſeront entr'eux comme les quarez des nombres qui ſuivent l'ordre naturel; c'eſt-à-dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Cela poſé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent

la même proportion, c'est-à-dire que la ligne soit à la ligne comme un quarré à un quarré; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au même lieu que le solide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour sommet le point E : son axe est ER ; & la touchante EN représentera l'axe du cône BC. Je divise EN en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à NO (représentant AB) qui divisent le plan ou triligne EON. On a montré que ce triligne est à son parallelogramme comme 1 à 3 ; on dira donc : Comme le triligne est à son parallelogramme, ainsi NE sera à une autre ligne V ; partant V sera triple de NE ; & si NE vaut 4, V vaudra 12. Je dis ensuite : Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, est à la moitié du solide fait par le triligne OEN qui est renfermé dans le cylindre, ainsi 4 à 1 ; & ainsi la ligne V qui vaut 12 est à 3 qui sera la ligne CS, & le point S montrera le centre de gravité. Or BC étant 4, BS sera 1, & CS sera 3.

**C E N T R E D E G R A V I T E,**  
*du Conoïde parabolique.*

**S**I je cherche le centre de gravité du conoïde parabolique, je le couperai, ou son axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviseront tout le solide en cercles (car dans le conoïde parabolique aussi bien que dans le cône, les sections faites par un plan parallele à la base, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres ; & partant sçachant comme les diametres sont entr'eux, nous sçaurons comment sont leurs quarrés. Mais dans la parabole les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les portions de l'axe : ici les portions sont



égales, & partant ils sont entr'eux comme les nombres naturels; les quarez des diametres seront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré étant 1, le second fera 2, le troisiéme sera 3 &c.

Par nostre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette même propriété. Je trouve que le triangle fait la même chose; il faut donc seindre que ABC est un triangle. Je divise BC en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à AB : or BC représente l'axe du solide dont on cherche le centre. Cela fait je dis : Comme le plan du triangle est à son parallelogramme, ainsi BC est à la ligne V. On sçait que le triangle est au parallelogramme comme 1 à 2 ; partant V sera double de BC ; si BC est 3, V sera 6. Après on dit : Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle est à la moitié du solide, ou du cône fait par le triangle, ainsi la ligne V sera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre susdit est à la moitié du cône comme 6 à 1 ; partant BM sera  $\frac{1}{6}$  de la ligne V, &c.

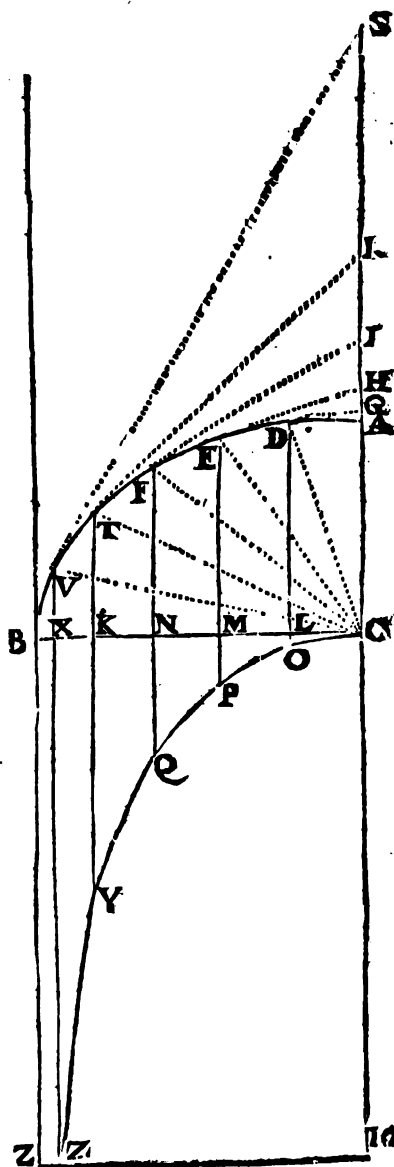
Xx iiij

le tiers de BC; le centre de gravité du conoïde parabolique sera donc au tiers de son axe du côté de la base; & ainsi divisant l'axe en trois parties égales, le premier point du côté de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, après avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sçachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide: il faut trouver un plan duquel la propriété soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles: si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent être entr'elles comme le quarré au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit être telle dans le plan: observant toujours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diametre, au quarré du demi-diametre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

Soit la ligne courbe ou circulaire BTEA divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chacun desdits points soit tiré une touchante comme VS, TR, FI, EH, DG, &c. à telle condition que la dernière comme DG étant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne CS, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S &c. qui partant seront tous plus éloignés de C que le point G dans la ligne CS. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à être parallèle à CS. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir DO, qui soit égale & parallèle à CG; du point

E, la ligne EP égale & parallèle à HC, de F, la ligne FQ égale & parallèle à IC, semblablement la ligne TY égale à RC, & VZ égale à SC, & ainsi des autres points finis, la ligne CS étant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infini, laquelle viendra à être asymptote au regard de la ligne qui se forme par l'extrémité des lignes tirées des points de la division parallèles à CS, qui est la ligne courbe CO-PQYZ. Puis après, si du point C on tire des lignes à chaque point de la division de la courbe BFA, tout l'espace AFBC viendra à être divisé en secteurs infinis, lesquels par les indivisibles se convertissent en triangles, à cause que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la division infinie. Je dis davantage que tout l'espace BFACQZ jusques au bout de la courbe CQZ tirée à l'infini, & qui est entre ladite courbe, & la touchante B tirée aussi à l'infini, se trouve divisé en



parallogrammes infinis, l'un desquels est DOCG qui représente le moindre. C'est un parallogramme, parce que dans les indivisibles la touchante DG passe pour la partie de la ligne courbe DA, comme il a été dit ci-devant dans une autre proposition : or DO a été fait égale & parallèle à GC, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & parallèles à leurs correspondantes en CS.

Pour venir à la conclusion, les parallogrammes ont tous un même côté que les triangles, qui est chaque portion égale de la ligne courbe AEB. Je dis donc que les triangles qui ont pour sommet le point C duquel partent les deux côtés du triangle, & dont le troisième est la portion de la courbe BFA divisée à l'infini ; tous ces triangles, dis-je, qui remplissent l'espace AFBC, partent du point C comme de leur sommet. Mais les parallogrammes qui sont sur bases égales & entre mêmes parallèles que les triangles, sont doubles desdits triangles, & les uns & les autres sont entre les parallèles CO & DG & entre CP & EH &c. (ces lignes CO, CP sont seulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallogrammes sont entre les mêmes parallèles, & sur des bases égales ; car les bases des uns & des autres sont les portions de la ligne courbe divisée à l'infini, & les portions des touchantes comprises entre les parallèles à CA passent & sont prises pour ces portions de courbes comprises aussi entre les mêmes parallèles.)

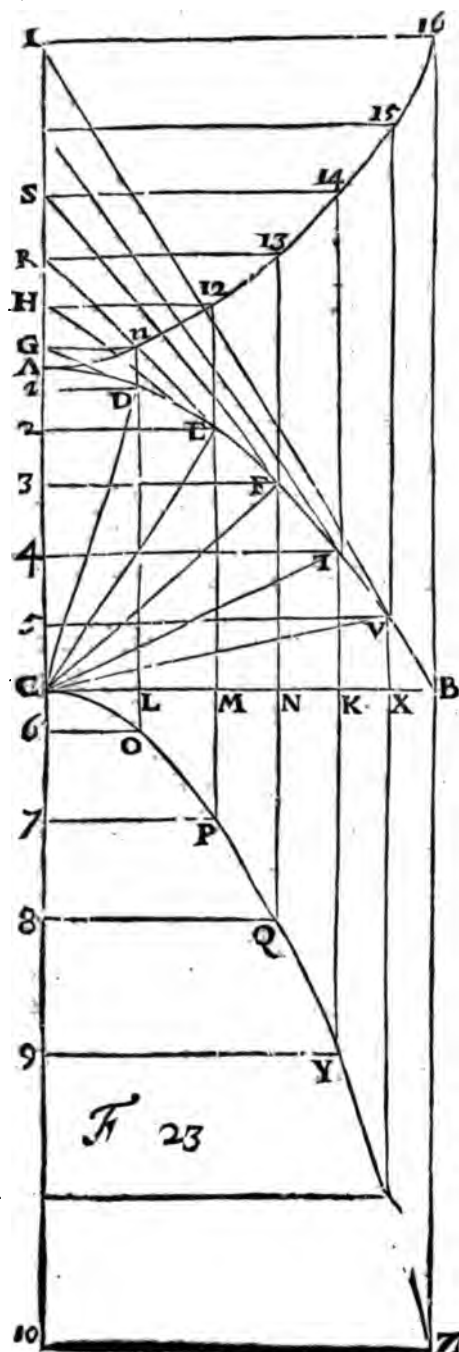
Puisque les parallogrammes sont doubles des triangles, par les indivisibles, l'espace qui est occupé par lesdits parallogrammes, lequel se trouve compris entre la courbe AEB d'une part, & la courbe CQZ produite à l'infini, d'autre part ; & entre les lignes droites AC & la touchante B tirée à l'infini, tout cet espace, savoir le quadriligne ZBFACQZ sera double de l'espace AFBC.

AFBC. Mais l'espace AFBC est celui qui est fait par les triangles; partant il sera égal à l'autre espace compris dans ZBCQZ, les deux lignes BZ & CZ étant tirées à l'infini; ce qu'il falloit démontrer.

Or la touchante BZ est asymptote, d'autant que, comme la ligne DO qui part de la touchante DG est égale à la ligne GC qui part de l'extrémité de la même touchante, & ainsi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui sort du point B, & qui devoit rencontrer la même ligne CQZ en quelque point plus éloigné, fût égale à la portion de la ligne CAI prolongée & comprise entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il est impossible que la touchante en B la puisse rencontrer, puisqu'elles sont paralleles; ainsi elle ne rencontrera jamais la ligne CQZ en quelque point que ce soit, & partant elle est asymptote.

Considérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. sur l'axe CA, & pareillement des points O, P, Q, &c. sur l'axe C 10, supposant que la figure ABC soit une parabole.

Soit D 1 la première ordonnée de la figure ABC, & O 6 de CZ 10, on aura DO égal à GC, & aussi à 16; & si des deux lignes égales GC, & 16 on ôte la ligne C 1 qui leur est commune à toutes deux, il restera G 1 égale à C 6. Or par la propriété de la parabole, G 1 est divisée en deux également par le sommet A; partant C 6 est double de A 1; & ainsi de tous les autres, sçavoir C 7 sera double de A 2; C 8 de A 3, &c. & ainsi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole ABC sont entr'elles, ainsi les doubles parties seront entr'elles dans l'autre figure CZ 10. Mais dans la parabole les parties sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées, & partant dans la figure CZ 10 les parties de l'axe se-



ront aussi entr'elles ;  
comme les quarez des  
paralleles aux ordon-  
nées ( qui sont les or-  
données de ladite figu-  
re CZ 10 ) sçavoir  
comme le quarré de O  
est au quarré de P  
ainsi C 6 est à C 7 ; d'où  
il s'ensuit que la figure  
CZ 10 sera aussi une pa-  
rabole , qui sera double  
de la parabole ABC.

Mais si l'on veut que  
les portions de l'axe  
soient entr'elles com-  
me les cubes des or-  
données , & qu'ainsi  
G 1 soit triple de A 1 ,  
alors C 6 sera triple du  
même A 1 , & la para-  
bole CZ 10 sera triple  
de la parabole ABC. La  
même chose se fera tou-  
jours changeant les pa-  
raboles , & faisant que  
les portions de l'axe  
soient entr'elles comme  
les quarré - quarez ,  
quarré cubes &c. des  
ordonnées à l'axe des  
dites paraboles.

Maintenant il faut  
voir comment se fera

la quadrature de la parabole. Pour cet effet il faut considérer dans  $ABC$  que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure  $CZ$  10, je la puis considérer comme ayant tiré du point  $B$  une touchante qui rencontre  $CI$  en  $I$  (car dans la parabole la touchante au point  $B$  n'est point parallele à  $CI$ , comme à la figure précédente, & partant elle doit rencontrer la ligne  $CI$ .) De ce même point  $B$  on tire  $BZ$  parallele à  $CI$  qui rencontrera la ligne  $CQZ$ ; car cette ligne n'est formée que par l'extrémité des lignes paralleles à  $CA$ . Du point de la rencontre soit fermée la figure  $CQZ$  10. Les ordonnées de la parabole  $ABC$  feront égales aux ordonnées de la parabole  $CZ$  10. Mais les portions de l'axe de la parabole  $ABC$  ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole  $CZ$  10; partant celles-ci sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole  $CZ$  10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole  $ABC$ ; & partant la parabole  $CZ$  10 sera double de  $ABC$ , ou du triligne qui lui est égal  $BCQZ$ ; & le parallelogramme  $CBZ$  10 triple de la même parabole  $ABC$ ; donc ladite parabole  $CZ$  10 sera les deux tiers dudit parallelogramme  $CBZ$  10; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole, puisque j'ai un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archimède s'étant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de même la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes  $DA$  1, &  $OCL$  sont égaux; & pour cet effet ayant tiré la ligne droite  $CD$ , je dis que le triligne  $CDA$  est la moitié du quadriligne  $CODA$ : si donc de ce quadrili-

gne j'ôte le parallelogramme  $CLD$ , il restera les trilingnes  $COL$  &  $ADI$ ; si du trilingne on ôte le triangle  $CDI$ , il restera le trilingne  $DAI$ ; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ai tiré une partie double d'une partie que j'ai tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit être double du reste de la petite, & de cette sorte  $DAI$ , &  $LCO$  sont doubles de  $DAI$ ; donc  $DAI$  sera égal à  $LCO$ , ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne  $CD$  coupe en deux également le quadriligne  $CODA$  (car il n'est pas toujours véritable.) Pour cet effet on suppose  $OD$  pour un des côtes du parallelogramme, & pour l'autre la portion  $DA$  indivisible sur la touchante  $DG$  ou sur la ligne courbe  $DA$  qui est la même chose, & le triangle  $CD$  avec la même portion indivisible  $DG$  ou  $DA$ . Je dis que le parallelogramme est double du triangle; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mêmes paralleles, sçavoir  $OC$  &  $DG$ ; ainsi  $CD$  coupe le parallelogramme, ou pour mieux dire, le quadriligne  $ODAC$  en deux également; car nous ne considérons plus l'espace  $DAG$  ni celui qui est compris entre la courbe  $OC$  & la droite  $OC$ ; car ces espaces ne sont point de nos parallelogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir  $CD$ ,  $CE$ , & les autres à l'infini; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace  $ABC$  comme les parallelogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes  $DO$ ,  $EP$ ,  $FQ$ , &c.) remplissent l'espace  $ZBACQZ$ , soit que les lignes  $BZ$  &  $CQZ$  se rencontrent ou non.

Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe  $AC$ . Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes; comme le cylindre fait sur l'axe

CA par le parallelogramme CADO; le cône fait sur la même CA, & par le triangle CAD; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont DOPE & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme CDE, CEF & les autres semblables autour de l'axe CA. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur même base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en même raison; & partant le solide fait de ABC fera le tiers du solide ZBACQZ; & si les lignes BZ, CZ ne se rencontre point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce côté-là, & ôtant le solide fait de ABC, restera le solide BCZ, qui sera double du même ABC. Dans les plans nous avons trouvé que le plan ABC est égal au plan BCZ continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considérer ces figures comme paraboles; & par conséquent la touchante du point B, ou plutôt la ligne tirée de B parallele à AC rencontra la courbe CZ continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit CZ 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales; mais les portions de l'axe de la parabole CZ 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe AC, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas fera double de celui d'en haut, & partant tout le solide d'embas fait par CZ 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par ABC tournant sur AC, comme 2 à 1. Mais on a vû que le solide de AB étoit au solide fait par ZQCB, comme 1 à 2; partant ledit solide de ZQCB sera égal au solide de CZ 10;

& ainsi le solide de CZ 10 fera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme CBZ 10, ce qu'il falloit démontrer.

Voyez la  
Figure de la  
page 354.

Il faut maintenant considérer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à CG, sçavoir L 11; du point M tirant M 12 égale & parallele à CH, & ainsi des autres, & par l'extrémité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chacun desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de ABC tirées des points correspondans DEF, &c. qui sont infinies: de plus AG est égal à A 1, AH égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

On considérera aussi que les lignes L 11, & DO sont égales, & pareillement M 12 & EP; N 13 & FQ, &c. & partant les parallelogrammes 11 LM 12, 12 MN 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes ODEP, PEFQ, &c. car on ne prend ici que les lignes DOEP &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles CAD, CDE, CEF &c. sont la moitié des parallelogrammes AO, DP, EQ, &c. partant ils feront aussi la moitié des parallelogrammes ACL 11, 11 LM 12, 12 MN 13, &c. l'espace ABC est donc la moitié de l'espace 16 ACB, soit que les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace BA 16, quand même les lignes A 16 & B 16 étant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit montrer la même chose plus brièvement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, étant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace ZCAB est égal à BCA 16; ôtant donc ABC commun, restera BA 16 égal à BCZ qui a été ci-devant montré égal à ABC, & partant 16 AB lui est aussi égal.

Maintenant soit ABC la premiere parabole, la touchante BI rencontrant CI, la ligne B16 égale & parallele à CI rencontrera la courbe A16 au point 16, & la figure A16I sera une parabole égale & semblable à ABC : car les ordonnées de l'une sont égales aux ordonnées de l'autre, sçavoir, D1 à G11, E2 à H12 &c. puisqu'elles sont entre les mêmes paralleles; & par la propriété de la parabole, AG est égal à A1, AH à A2, AR à A3, &c. sçavoir les portions de l'axe où aboutissent les ordonnées correspondantes sont égales; & partant toute la parabole ABC sera égale à toute la parabole A16I. Or on a trouvé que l'espace BA16 est égal à ABC; partant les trois pieces ou espaces ABC, A16I, & BA16 comprises dans le parallelogramme ICB16, & qui le forment, sont égales entr'elles.

Ce que nous venons de dire ici de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui est la même chose, se doit entendre aussi des paraboles des autres genres, c'est-à-dire que, si la parabole ABC est du troisieme genre, la parabole A16I sera aussi du troisieme genre; mais elle ne sera pas la même que la parabole ABC : car les parties AG, AH, AR, &c. sont bien entr'elles en même raison que les parties A1, A2, A3 &c. mais AG n'est pas égale à A1, ni AH égale à A2 &c. comme elles sont dans la parabole du premier genre.



DE



# DE TROCHOIDE EJUSQUE SPATIO.

## DEFINITIONES.

**S**I circulus duplici motu simul & eodem tempore moveatur, altero quidem recto, quo centrum illius feratur secundum lineam rectam: altero autem circulari, quo ipse cum omnibus suis radiis circa centrum suum circumvolvatur; sitque uterque motus sibi ipsi semper uniformis, & alter alteri æqualis, ita ut recta quam percurrit centrum spatio unius integræ conversionis circumferentiæ, intelligatur esse eidem circumferentiæ æqualis: atque inter movendum circulus ipse perpetuò maneat in eodem plano infinito in quo extitit in initio motûs: ejusmodi circulum vocamus *Rotam*.

Recta per quam fertur centrum, vocetur *iter centri*.

Quæcunque puncta vel lineæ à circulo denominantur, denominentur hîc à rotâ, ut centrum rotæ, radius rotæ, circumferentia rotæ, &c.

*Rec. de l'Acad. Tome VI.*

Zz

Manifestum est autem circumferentiam rotæ contingere continuè & successivè in aliis atque aliis punctis quandam lineam rectam itineri centri parallelam : vocetur hæc *via rotæ*.

Manifestum est quoque quidquid accadat in quâvis integrâ circumvolutione rotæ, idem quoque accidere in quâcumque aliâ : modo initia circumvolutionum sumantur à radiis similiter positis, id est, qui cum itinere centri æquales ad easdem partes angulos constituent, sintque radii ipsi paralleli.

Nos itaque unam conversionem assumamus, cujus initium statuimus in eo rotæ radio qui perpendicularis est tam *viz* rotæ quàm itineri centri, eumque ipsum radium, dum ad motum rotæ movetur, consideramus ac prosequimur, donec absolutâ integrâ conversione, idem ab eadem parte fiat rursus iisdem *viz* rotæ & itineri centri perpendicularis. Hic ergo radius in initio circumvolutionis vocetur *radius principii motûs*: in medio autem dum ipse perpendicularis est itineri centri, sed ad alteras partes constitutus, dicetur *radius medii motûs* : & tandem in fine, *radius perfecti motûs*.

Quod si radius ipse in quâcumque positione produci intelligatur utrinque quantum libuerit etiam extra rotam, idem dicetur linea principii, medii, vel perfecti motûs.

Jam in lineâ principii motûs indefinitè productâ versùs viam rotæ intelligatur sumptum quodcumque punctum præter centrum, atque inter ipsum centrum versùs viam rotæ, etiam in eâdem viâ aut ultrâ, cujus puncti motus spectetur : fiet necessariò ut propter implicationem motûs circularis cum recto, ipsum punctum describat lineam aliquam, cujus portio quædam ab unâ parte itineris centri, altera autem portio ab alterâ parte existat ; ea autem incipiet in lineâ principii motûs, & in lineâ perfecti motûs desinet. Vocetur hæc *Trochoides*.

Recta quæ Trochoidis hujus extrema puncta jungit, estque vel via rotæ, vel ei parallela, dicatur *Trochoidis ejusdem basis*. Portio lineæ mediæ motûs intercepta inter trochoidem & basim ejus, *axis Trochoidis* vocabitur; qui quidem axis ab itinere centri bifariam secabitur in puncto quod nos *centrum trochoidis* nuncupamus. *Vertex* autem *trochoidis* est extremum axis punctum in trochoide existens, seu basi oppositum.

Jam manifestum est à trochoide & ab ejusdem basi comprehendi spatium quoddam planum; quod nos postea vocabimus *spatium trochoidis*. Ejus centrum, basis, axis & vertex iidem qui trochoidis intelligantur.

Quæcunque recta ab aliquo puncto trochoidis ducitur usque ad axem parallela viæ rotæ, dicatur *ad axem ordinata*.

Item, mensura integri motûs conversionis rotæ intelligatur tota circumferentia rotæ: mensura dimidii motûs intelligatur dimidia circumferentia; & sic in universum mensura cujusvis partis motûs rotæ intelligatur esse arcus circumferentiæ ejusdem rotæ, qui ad integram circumferentiam eandem habeat rationem, quam pars motûs assumpta ad motum conversionis integræ.

Præterea, si circa axem trochoidis tanquam circa diametrum, & circa ejusdem trochoidis centrum circulus describatur, is erit vel rota ipsa, vel eadem major aut minor, prout punctum, quod trochoidem descripsit, sumptum fuerit vel in circumferentiâ rotæ, vel extra vel intra ipsam rotam. Et si quidem circulus ipse sit rotæ æqualis, seu rota ipsa; tunc ipsa trochoides denominabitur à rota simplici, diceturque *trochoides rota simplicis*, seu *trochoides vera rota*. Si autem ipse circulus circa axem trochoidis descriptus major sit quàm rota, tunc trochoides denominabitur à rotâ contractâ, diceturque *trochoides rota contracta*. Si tandem circulus minor sit ip-

sâ rotâ, ejus trochoides denominabitur à rotâ prolatâ, diceturque *trochoides rota prolata*. Spatia, bases, & cætera ad ipsas trochoides pertinentia, curvæ suæ denominationem fortiantur : at circulus ipse circa axem trochoidis tanquam circa diametrum descriptus, dicatur circulus suæ trochoidi proprius.

Et quia positis iis quæ jam dicta sunt, concipi potest duplex rotæ motus circularis, prout motus circuli circa centrum intelligi potest fieri ad hanc vel illam partem : nos eum assumimus, qui rotis communibus convenit, quo quidem motu pars interior circumferentiæ, putà quæ adjacet viæ rotæ, fertur non ad easdem partes ad quas centrum tendit motu recto, sed ad contrarias ; superior autem rotæ pars quæ viæ ejus opponitur, fertur secundum motum centri. Hic enim motus omnium rotarum physicarum proprius est & veluti naturalis ; alter autem eidem contrarius est, veluti violentus & contra naturam rotæ : geometricè tamen uterque considerari potest, nec alia inter trochoides quæ ab ipsis orientur, accidet differentia, nisi quod quæ partes erant unius extremæ in alterâ, eadem erunt mediæ ; spatia autem longè different cùm figurâ tùm magnitudine, sed quia unum erit veluti complementum alterius, ideo ex uno noto dabitur alterum ; quam speculationem nos in aliud tempus remittimus. Agimus autem hic de trochoide rotæ tam simplicis quàm prolatae & contractæ, sed motu communi rotæ physicæ motæ, ac de eâ & de spatio ejus sequentia enuntiamus Theoremata, quorum pars statim demonstrabitur ; reliqua autem pars quæ longissimæ & acutissimæ speculationis est, opportuno tempore suam nanciscetur demonstrationem, quam quidem à nobis inventam ( ut cætera quæ ad rotam pertinent ) eo usque retinemus donec per tempus liceat integrum opus producere.

Supponimus autem quædam quæ etsi per se demonstrationem requirant, tamen ea tam facilis est, ut cuivis in Geometriâ mediocriter versato statim appareat, qualia sunt hæc. In primo quadrante integræ conversionis rotæ punctum quod trochoidem describit, percurrit spatium quod est inter basim trochoidis & iter centri; idemque punctum motu recto posterius est centro rotæ. In secundo quadrante idem punctum percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad verticem trochoidis, estque adhuc posterius centro rotæ. In tertio quadrante punctum idem percurrit spatium quod est à vertice trochoidis usque ad iter centri, sed jam hoc punctum præcedit respectu centri, quod sequitur si motus recti habeatur ratio. In quarto & ultimo quadrante punctum de quo agimus percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad basim trochoidis, & adhuc idem punctum præcedit, centrum autem rotæ sequitur motu recto.

Hinc verò atque ex quibusdam aliis quæ naturam rotæ motæ, ut dictum est, statim consequuntur, demonstrabitur facile trochoidem quæ fit ab unicâ conversione cujuscunque rotæ in seipsam non recurrere, seu per idem punctum bis transire non posse: contrarium autem accideret in rotâ prolatâ, si aliud à nostrâ sumeretur principium.

Nec minus facile est demonstrare eam trochoidis partem, quæ est à principio usque ad verticem æqualem esse & similem alteri parti quæ est à vertice usque ad finem, & ambas partes sibi invicem congruere posse. Item, primam medietatem ejusdem trochoidis totam esse ab unâ parte axis, secundam verò totam esse ab altera. Idem dictum intelligatur de duabus partibus spatii ipsius trochoidis quæ ab ejusdem axe constituuntur. Atque ita quæ in unâ ex his medietatibus demonstrabuntur, in alterâ quoque medietate demonstrata esse quivis facile

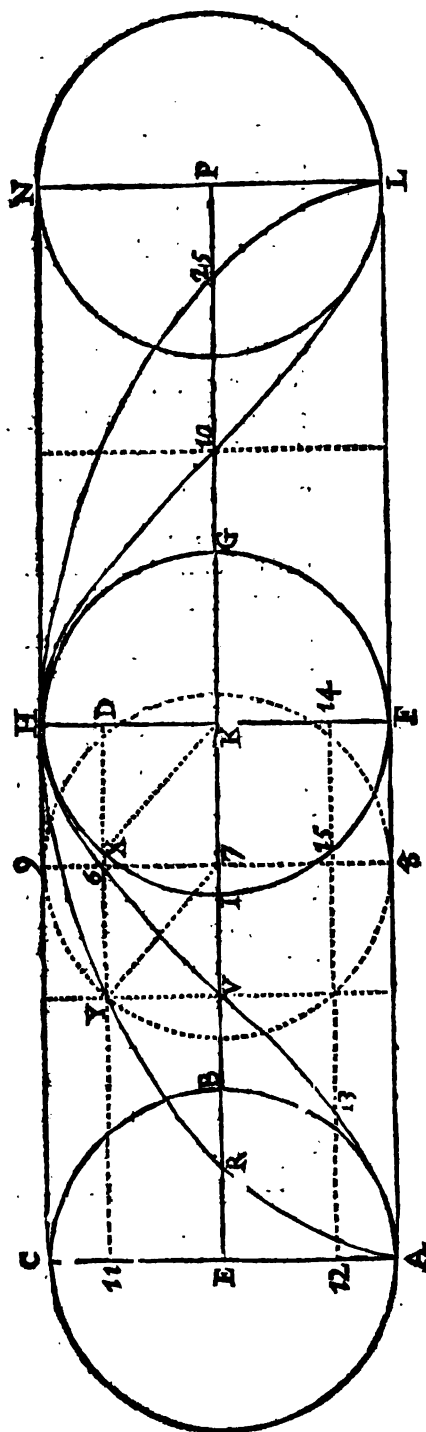
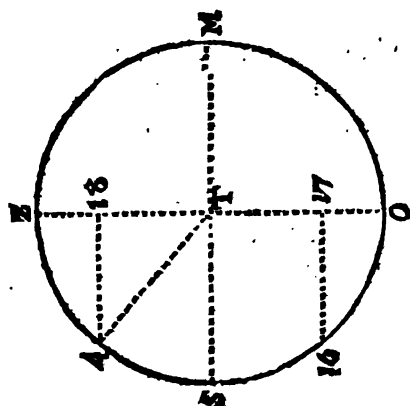
intelliget, collatis invicem duarum medietatum partibus illis quæ sunt prope verticem &c. His positis primaria trochoidis proprietas, quam propterea demonstrabimus, videtur esse hæc.

## PROPOSITIO PRIMA.

*Si ab assumpto puncto primæ medietatis trochoidis ad axem ordinata sit recta quævis, ejus portio quædam erit extra circumulum ipsi trochoidi proprium; quæ quidem portio æqualis erit arcui rotæ, qui mensurat eam partem motûs, quæ restat inde ab eo tempore, quo notatum est à puncto mobili punctum assumptum, usque ad medietatem integræ conversionis rotæ.*

**E**ST O recta EP; iter centri rotæ cujusdam æqualis circulo seorsim posito SOMZ, cujus centrum T; sitque recta CEA linea principii motûs, intelligaturque recta EP æqualis circumferentiæ rotæ SOMZS, & recta NPL sit linea perfecti motûs. Tum divisâ EP bifariam in puncto K, ducatur recta HKF, quæ sit linea medii motus; puncta autem A, F, L sint ad easdem partes respectu rectæ EP, & puncta C, H, N ad easdem partes inter se, sed ad alteras respectu ejusdem rectæ EP, & punctorum A, F, L.

Concipiatur jam in linea principii motûs CEA assumptum esse punctum A, ad describendam trochoidem, sive recta EA æqualis sit semidiametro rotæ TO, quo pacto fiet trochoides rotæ simplicis; sive ipsa EA major sit quàm TO, ut fiat trochoides rotæ prolata; sive denique minor ut habeamus trochoidem rotæ contractæ: moveaturque rota hoc pacto ut centrum illius percurrat rectam EP, interim dum ipsa motu circulari absolverit unam integram conversionem circa idem centrum, posito utroque motu sibi ipsi semper uniformi:



feratur autem unà cum rotâ recta EA, quæ ad motum rotæ æqualiter circumvolvatur, ita ut in medio motûs integræ conversionis ipsa EA conveniat rectæ KH, in fine autem eadem conveniat rectæ PL; sicque propter implicationem motûs circularis cum recto punctum A describat trochoidem ARYHL, cujus basis AL, axis HF, vertex H, centrum K, & spatium ARYHLA; sint etiam puncta A, F, L in eadem rectâ lineâ quæ est basis, & puncta C, H, N in aliâ rectâ ipsi basi & itineri centri parallelâ, ut sit ALNC parallelogrammum rectangulum. Præterea centro K, & intervallo KH, seu KF, æquali ipsi EA, describatur circulus HIFG, cujus circumferentia secet iter centri versûs principium quidem in I, versûs finem autem in G, qui circulus erit proprius trochoidi ex definitione, eritque idem vel æqualis rotæ, vel ipsâ major aut minor, quod hoc loco nihil refert. Item in lineâ ARYH, quæ est prima medietas trochoidis sumatur quodcunque punctum Y, à quo ad axem HF, ordinata sit recta YD secans primam semicircumferentiam circuli proprii in puncto X.

Dico primò portionem aliquam ipsius YD esse extrâ circulum FIH. Quia cum punctum Y est in primâ medietate trochoidis, quæ quidem per ipsum punctum Y semel tantum transit, ut superius positum est, non potest esse nisi unica positio rotæ in quâ illâ existente notatum est punctum Y, atque in illâ positione centrum ipsius rotæ extitit inter puncta E, K, scilicet intra primam medietatem itineris centri. Existat igitur eâ positione centrum illud in puncto 7, per quod ducatur recta 879 parallela lineæ medii motûs FKH, secans basim quidem AL, in puncto 8, rectam verò CN in puncto 9; ducatur quoque recta 7 Y, quæ quia ducitur à centro rotæ 7 in hac positione ad punctum Y, quod in eadem positione trochoidem describit, æqualis erit rectæ EA,

EA, seu potius recta  $\gamma Y$  erit ea ipsa EA, cujus punctum E motu recto pervenit in  $\gamma$ , punctum autem A motu implicato perlatum est in Y, describens trochoidis portionem ARY, & eadem recta motu circulari rotæ positionem suam mutavit secundum angulum  $\delta \gamma Y$ : huic ergo angulo constituatur æqualis  $\text{OT}_4$  rotæ seorsim positæ, cujus OTZ sit diameter, & punctum  $\delta$  in circumferentiâ.

Conveniente ergo per intellectum centro T cum centro  $\gamma$ , & angulo  $\text{OT}_4$  angulo  $\delta \gamma Y$ , siue latera æqualia sint, siue non, manifestum est ex naturâ rotæ, arcum  $\text{O}_4$  esse mensuram motûs jam peracti à principio conversionis; & arcum  $\delta Z$  qui cum  $\text{O}_4$  complet semicircumferentiam rotæ, esse mensuram motûs qui deest ad complendam dimidiam conversionem: & quia æquales sunt ambo motus rotæ, circularis scilicet & rectus, & uterque uniformis sibi ipsi, manifestum est quoque rectam  $E\gamma$  æqualem esse arcui  $\text{O}_4$ , & rectam  $\gamma K$  arcui  $\delta Z$ : quod notetur.

Centro  $\gamma$ , intervallo autem  $\gamma Y$ , vel  $\gamma \delta$ , vel  $\gamma \theta$ , quæ æqualia sunt, describatur circulus cujus diameter erit  $\delta \theta$ . Quoniam ergo per ea quæ posita sunt punctum Y in prima medietate trochoidis existens sequitur post centrum motu recto, erit ipsum Y respectu diametri  $\delta \theta$  versûs principium curvæ, jacebitque propterea ipsa diameter  $\delta \theta$  inter punctum Y & axem HF, eademque secabit rectam YD ordinatam ad axem, esto in puncto  $\epsilon$ : rectæ ergo DH,  $\epsilon \theta$  æquales sunt, sicuti & rectæ FD,  $\delta \epsilon$ ; & rectangulum FDH, æquale rectangulo  $\delta \epsilon \theta$ , quæ rectangula cum sint æqualia quadratis XD, Y $\epsilon$ , erunt hæc quadrata æqualia, & recta DX æqualis rectæ  $\epsilon Y$ : sed recta DY major est quàm  $\epsilon Y$ , totam scilicet parte; ergo eadem DY major est quàm DX; excessus autem est portio XY; hæc itaque portio

est extra circulum FXH trochoidi AYH proprium; quo primo loco demonstrandum erat.

Dico secundò eandem portionem exteriorem XY æqualem esse arcui  $4Z$ . Quoniam enim ostensæ sunt æquales DX, &  $6Y$ , sunt autem puncta X 6 vel simili, vel sejuncta, & hoc casu vel punctum X est inter puncta D & 6, vel è contrario ipsum X est inter puncta 6, Y, secundum diversas species trochoidum rotæ simplicis, prolatae, vel contractæ, quod hoc loco nihil refert: quidquid sit additâ vel subtractâ communi X 6, si quæ inter puncta X 6 interjaceat, fiet recta D 6 æqualis rectæ XY, est autem D 6 æqualis rectæ K 7, seu arcui  $4Z$ , ut notatum est; quare & recta XY eidem arcui  $4Z$  est æqualis, quod secundo loco demonstrandum erat: quare constat Propositio.

*Corollarium primum.*

**H**INC manifestum est arcum XH similem esse arcui rotæ  $4Z$ , sicuti arcus FX similis est arcui  $O_4$ ; & est  $4Z$  quicumque arcus mensurans motum qui deest ad dimidiam conversionem, &  $O_4$  mensurat motum jam transactum, quod notasse in sequentibus usui erit.

*Corollarium secundum.*

**H**IC demonstrari potest in rotâ simplici, atque in prolata rectam 6D majorem semper esse quàm XD propterea quod ipsa rota seu circulus  $O_4Z$  tunc æqualis est circulo proprio FXH, vel ipso major; ideoque arcus  $4Z$ , æqualis est arcui XH, vel ipso major; quia similes sunt ipsi arcus. Sed recta 6D æqualis est arcui  $4Z$ , ex demonstratis; quare eadem 6D æqualis est arcui XH, vel ipso major: arcus autem XH sem-

per major est recta XD; quare hoc casu recta 6 D semper major est quam XD.

In rotâ autem contractâ, quia ipsa rota minor est quam circulus sibi proprius FXH, atque ideo arcus 4 Z semper minor est arcu sibi simili XH secundum rationem diametri rotæ ad diametrum circuli sibi proprii, erit recta 6 D, quæ æqualis est arcui 4 Z, semper minor arcu XH, secundum eandem rationem; hic autem arcus XH, quia assumptus est utcumque minor semicircumferentiâ circuli proprii FIH, potest habere ad rectam XD quamcunque rationem majoris ad minus, scilicet ut diameter FH, ad diametrum rotæ OZ. Fieri ergo poterit aliquando ut arcus XH ad rectam XD eandem habeat rationem quam ad rectam 6 D, aliquando majorem & aliquando minorem; ideoque in rotâ contractâ poterit recta 6 D æqualis esse rectæ XD, vel ipsa major aut minor: atque ita punctum 6 erit vel simul cum puncto X, vel inter puncta Y, X; vel inter puncta X, D.

Et quidem quod res ita se habeat in universum ex his satis patet; quibus autem in punctis quæve positione rotæ omnes istæ differentiæ accidunt in datâ quâcunque ratione diametri rotæ contractæ ad diametrum circuli sibi proprii demonstrare longum esset & difficillimum, opusque esset hoc assumptis; scilicet dato cuivis arcui circumferentiæ circuli, intelligi posse rectam lineam æqualem, minorem, vel majorem.

### *Corollarium tertium.*

**I**L L V D quoque ex demonstratis statim apparet, scilicet trochoidem occurrere circumferentiæ circuli sibi proprii in unico puncto verticis, atque in eo puncto tantum lineas ipsas sese tangere, ipsumque circummotum contineri interi spatium ejusdem trochoidis.

*Corollarium quartum.*

**H**INC præterea clarum est ipsam trochoidem non esse lineam rectam nec ex duabus rectis compositam, siquidem illa à puncto A pervenit ad punctum H, nec tamen ingreditur aut secat circulum proprium FXH, quem secaret necessario si recta esset à puncto A ad punctum H, sive à puncto H ad punctum L: non est ergò recta, nec ex duabus rectis composita.

Quod autem cujuscunque trochoidis nulla pars lineæ rectæ congruere possit, sed omnes partes sint curvæ, atque penitus ab aliis quibuscunque curvis huc usque notis diversæ, demonstrari quidem potest, sed demonstratio longa est & difficilis, neque hujus loci, quando quidem ad ea quæ intendimus non requiritur.

*Corollarium quintum.*

**Q**UIA in antecedenti Propositione punctum 6 est sectio communis rectæ ordinatæ YD & rectæ 879, quæ est diameter circuli 8Y9, qui concentricus est rotæ ita positæ, ut centrum illius sit 7: si intelligatur alia atque alia positio rotæ ab initio motûs donec centrum illius percurrerit rectam EK, manifestum est aliud atque aliud fore ipsum punctum 6; ipsamque moveri incipere à puncto A, & in medio motus integræ conversionis rotæ, idem pervenire ad punctum H, atque adeo ipsum ferri secundum lineam quandam A6H secantem rectam EK in puncto V. Quod si idem ferri intelligatur à puncto H ad punctum L, fiet reliqua dimidia pars ejusdem novæ lineæ, secans rectam KP in puncto 10; atque ideo ipsa integra erit AV6H10L, hanc nos vocamus *trochoidis comitem*, seu *sociam*.

Vertex, basis, axis & centrum illius eadem sunt quæ trochoidis, cujus illa comes est. Quod autem ab ipsa & basi suâ comprehenditur spatium planum, ab eâdem denominetur. Item, quæ à trochoide & ab ejus comite comprehenduntur duo spatia, quorum alterum est AYHVA, inter lineas principii & medii motus: alterum verò ei simile & æquale inter lineas medii & perfecti motus; singula à duabus illis lineis simul nomen fortiantur, dicaturque unumquodque spatium trochoide & suâ comite contentum: ordinata ad axem comitis trochoidis dicatur quævis recta à quocunque puncto ejusdem comitis ad axem ducta parallela basi.

## PROPOSITIO SECUNDA.

*Si à quocunque puncto trochoidis ad axem ordinetur recta quæpiam, hujus portio erit ordinata ad axem comitis ejusdem, quæ quidem portio æqualis erit ei ejusdem ipsius ordinatæ ad trochoidem portioni, quæ interjicitur inter ipsam trochoidem & circumferentiam convexam circuli eidem trochoidi proprii.*

**M**ANIFESTA est hæc Propositio ex iis quæ jam demonstrata sunt. Est enim YD recta quæcunque à puncto Y in trochoide existente ad axem FDH ordinata, & ponantur eadem quæ superius. Existit punctum 6 in ejusdem trochoidis comite, ex definitione; & recta 6D erit ad axem ipsius comitis ordinata: recta verò XY interjicitur inter trochoidem & circumferentiam convexam circuli ipsi proprii. Ostensum autem est rectas ipsas 6D & XY esse inter se æquales; quare patet Propositio, quæ id tantum enuntiabat.

*Corollarium primum.*

**H**INC manifestum est eandem ordinatam  $\epsilon D$  æqualem esse arcui rotæ  $4 Z$ .

*Corollarium secundum.*

**P**ERSPICUUM est etiam rectam  $Y 6$ , quæ interjicitur inter trochoidem & ejus sociam, æqualem esse rectæ  $XD$  interjectæ inter circumferentiam circuli proprii & axem.

*Corollarium tertium.*

**S**ED & hic demonstrari potest in rotâ simplici comitem trochoidis occurre circumferentiæ circuli proprii in vertice tantum, atque in eo solo puncto lineas ipsas sese contingere. Quod idem accidit comiti trochoidis rotæ prolatae. At in curva rotæ contractæ comes secat circumferentiam circuli proprii infra verticem, idque semel tantum in primâ dimidiâ conversione rotæ, & rursus semel tantum in alterâ dimidiâ conversione: ac præterea eadem comes eandem circumferentiam tangit interiùs in vertice, cujus quidem Enuntiati longa est demonstratio, non tamen ita difficilis; sed de his aliàs.

*Corollarium quartum.*

**I**D autem peculiare est rotæ simplici, quod angulus contactus qui fit à comite trochoidis illius & circumferentiâ circuli ipsi proprii, minor sit omni angulo contactus duorum quorumvis circulorum etiam interiùs sese tangentium: quod rursus in alium locum remittimus,

propter prolixitatem demonstrationis, quæ tamen non est admodum difficilis.

*Corollarium quintum.*

**I**TEM cujuslibet trochoidis comes nec recta est, nec ex duabus aut pluribus rectis composita; nec trochoidi nec alii cuius curvæ ex iis quæ huc usque notæ sunt ita occurrere potest ut pars sit eadem, & pars non sit communis: quod, quia demonstrare longum est & difficillimum, neque ad ea quæ intendimus requiritur, ideo prætermittimus.

PROPOSITIO TERTIA.

*Si à quocunque puncto primi quadrantis comitis trochoidis ad axem ipsius ordinata sit recta quævis, quæ usque ad lineam principii motus producat; item ab aliquo puncto secundi quadrantis ejusdem comitis eodem modo ordinata sit alia recta (modo ipsæ ordinatæ æqualiter distent hinc inde ab itinere centri rotæ) earum rectarum sic productarum portiones permutatim sumptæ, erunt æquales; ita ut quæ in unâ earum rectarum inter comitem & axem interjicitur portio, æqualis sit ei alterius rectæ portioni quæ interjicitur inter eandem comitem & lineam principii motus, & reciprocè.*

**P**ONANTUR eadem quæ suprâ in eâdem figura; atque in linea A 13 V, primo scilicet quadrante comitis, sumptum sit punctum quodcunque 13, à quo ad axem FH ordinata sit recta 13 14, quæ minor erit quàm AF, quia ipsa AF æqualis est semicircumferentiæ rotæ; 13 14 autem ipsâ semicircumferentiâ minor. Producat ergo eadem 13 14 donec occurrat lineæ

principii motûs AC in puncto 12. Tum in axe FH intelligatur portio KD æqualis portioni K 14; sed ad diversas partes, & ducatur recta D 6 11 parallela rectæ KE, occurrens comiti quidem in puncto 6, quod erit in secundo ipsius quadrante, lineæ autem AC in puncto 11. Dico rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11, & reciprocè rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D. Secet enim recta 12 14 circumferentiam FIH in puncto 15; & recta 11 D secet eandem circumferentiam in puncto X, sintque puncta 15, X in eadem semicircumferentiâ quæ est versùs principium motûs: item in semicircumferentiâ rotæ OSZ, sit arcus Z 4 similis arcui HX; & arcus Z 16 similis arcui H 15; sintque ZS, & OS quadrantes, sicuti HI, & FI. Jam quia æquales sunt rectæ K 14, KD erunt arcus IX, & I 15 æquales. Item æquales erunt arcus F 15, HX; & æquales FX, H 15: ac propterea in rotâ æquales erunt arcus S 4, S 16. Item æquales arcus O 16 & Z 4; & æquales O 4, Z 16. Quare ex Corollario primo Propositionis primæ, quia arcus HX, similis est arcui qui mensurat motum, qui superest ad dimidiam conversionem in eâ positione rotæ, erit arcus Z 4 eâ ipsâ mensura ejusdem motûs. Eâdem ratione erit arcus Z 16 mensura motûs qui superest ad dimidiam conversionem rotæ, dum notatur ab ipsâ punctum 13; ac propterea ex Corollario primo Propositionis secundæ, tam recta 6 D æqualis est arcui 4 Z, quàm recta 13 14 æqualis arcui 16 Z: ambo autem ipsi arcus 4 Z & 16 Z simul sumpti æquales sunt semicircumferentiæ OZ (ostensus est enim arcus 4 Z æqualis ipsi 16 O) ideoque duæ rectæ 6 D & 13 14 simul sumptæ æquales sunt eidem semicircumferentiæ OZ, sive rectæ D 11, vel 14 12. Demptis ergo communibus sequitur rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D; & rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11; quod erat ostendendum.

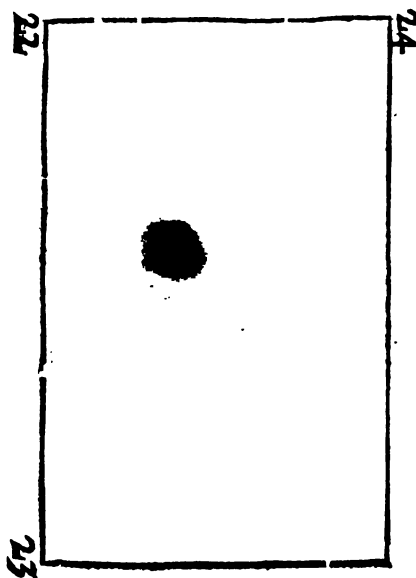
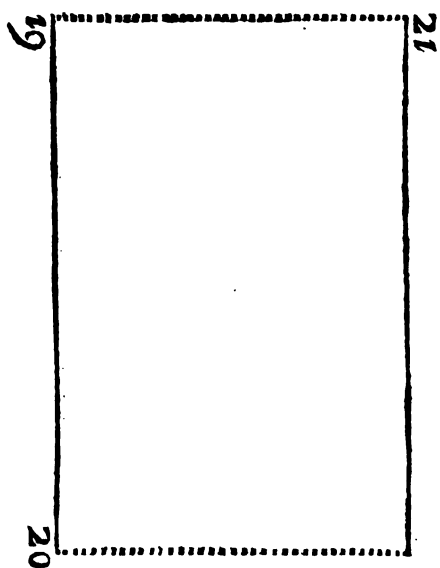
PROPOSITIO

## PROPOSITIO QUARTA.

*Quod à trochoidis comite & ab ipsius base continetur ; spatium dimidium est rectanguli cujus eadem est basis & eadem altitudo cum trochoide vel ejus comite , sumpto axe communi pro altitudine.*

**I**N eâdem rursùs figurâ. Dico spatium quod à comite AVH 10 L & basi ejus AL continetur , dimidium esse rectanguli ACNL , cujus eadem est basis AL & eadem altitudo axis FH. Consideretur enim ipsius rectanguli dimidium ACHF , quod à curvâ AVH ipsius comitis dimidia , in duas partes dividitur , quarum partium altera continetur ab ipsâ curvâ AVH & duabus rectis AF , FH , altera autem pars continetur ab eâdem curva AVH & duabus rectis HC , CA. Ostendendum est duas illas partes esse inter se æquales. Atqui ex antecedenti Propositione facile est ostendere duas easdem partes omnino sibi invicem superponi posse & congruere , posito scilicet puncto C cum puncto F , & rectâ CA cum rectâ FH ; item rectâ CH cum rectâ FA : tunc enim quia recta C 11 æqualis est rectæ F 14 , congruet punctum 11 cum puncto 14 , & recta 11 6 cum recta 14 13 , cui æqualis ostensa est ; & eodem modo recta A 12 congruet rectæ HD , & recta 12 13 rectæ D 6 , cui æqualis ostensa est , & reliquæ reliquis , & omnes omnibus , & spatium spatio congruet. Quare ipsa spatia sunt æqualia , & spatium AVHFA dimidium est rectanguli FC. Idem verò in reliquo rectangulo FN ostendetur eodem modo , ideóque vera est Propositio.

## PROPOSITIO QUINTA.



*Idem spatium propor-  
tione medium tenet  
inter duplum rotæ  
& duplum circuli  
trochoidi proprii.*

**P**ONANTUR ea-  
dem. Dico spa-  
tium AVH IO LA  
proportionem medium  
esse inter duplum ro-  
tæ OSZM, & duplum  
circuli FIHG trochoi-  
di proprii. Intelligan-  
tur enim duo rectan-  
gula, alterum quidem  
20 21, cujus basis 19  
20 æqualis sit semicir-  
cumferentiæ rotæ O-  
SZ, altitudo vero 19  
21 æqualis diametro  
eiusdem rotæ OZ; al-  
terum verò rectangu-  
lum 23 24, cujus basis  
22 23 æqualis sit semi-  
circumferentiæ circu-  
li proprii FIH, altitu-  
do autem 22 24 æqua-  
lis diametro eiusdem  
circuli FH. Jam quia  
duo rectangula 20 21

& FC æquales habent bases 19 20 & AF (quia utraque basis, ex positis, æqualis est semicircumferentiæ rotæ) erunt ipsa rectangula inter se ut altitudines, scilicet ut diameter rotæ OZ ad FH diametrum circuli proprii. Item, rectangulum FC ad rectangulum 23 24 ejusdem altitudinis FH, ex constructione, se habet ut basis AF ad basim 22 23, idest ut semicircumferentia rotæ OSZ ad semicircumferentiam circuli proprii FIH, quia ex constructione æquales sunt ipsæ bases iisdem semicircumferentiis. Ut autem semicircumferentia OSZ ad semicircumferentiam FIH, ita diameter OZ ad diametrum FH: quare ut rectangulum FC ad rectangulum 23 24, ita diameter OZ ad diametrum FH. Ut autem hæ diametri inter se, ita ostensum est rectangulum 20 21 ad rectangulum FC; ideoque eadem est ratio rectanguli 20 21 ad rectangulum FC, quæ ejusdem rectanguli FC ad rectangulum 23 24, quia utraque ratio eadem est rationi diametri OZ ad diametrum FH. Sed rectangulum 20 21 duplum est rotæ OSZM, ut ex Archimede in circuli dimensione deducitur, sicuti rectangulum 23 24 duplum est circuli FIHG & rectangulum FC æquale est spatio proposito AVHLA, quia dimidium dimidio ostensum est æquale per præcedentem. Quoniam ergo continuè proportionalia ostensa sunt rectangula 20 21, FC, & 23 24, patet quoque proportionalia esse spatia ipsis æqualia, scilicet duplum rotæ OSZM, spatium AVH 10 LA, & duplum circuli proprii FIHG, & medium esse spatium AVH 10 LA, ut proponebatur.

*Corollarium.*

**H**INC patet idem spatium AVH 10 LA in trochoide rotæ simplicis, duplum esse ejusdem rotæ; in trochoide autem rotæ prolata idem spatium majus esse quàm duplum rotæ; & tandem in trochoide rotæ con-

tractæ, minus quam duplum ipsius rotæ. Nam in rotâ simplici circulus FH ipsi rotæ æqualis est; in prolata minor; in contractâ major: unde spatium quod inter duplum rotæ & duplum circuli FH mediam tenet proportionem, in simplici quidem æquale est duplo rotæ; in prolata majus quàm duplum; & in contractâ minus.

## PROPOSITIO SEXTA.

*Quod à trochoide & ejus comite continetur spatium inter lineas principii & medii motûs, æquale est dimidio circuli eidem trochoidi proprii.*

**I**N eâdem figurâ esto spatium ARHVA contentum à dimidio trochoidis A R H, & dimidio comitis ejus AVH inter lineas principii & medii motûs AC, FH. Dico hoc spatium æquale esse semicirculo FIH.

Ducatur enim quæcunque recta Y D parallela basi AL, secansque tam spatium quàm semicirculum; & portio quidem ipsius Y D intercepta intra spatium, sit Y 6; portio autem intercepta intra semicirculum, sit XD: manifestum est igitur ex Corollario secundo Propositionis secundæ, portiones ipsas Y 6 & XD esse æquales; quod idem in cæteris similiter ductis basi AL parallelis accidet. Itaque quoniam spatium & semicirculus sunt intra parallelas AF, CH & cujusvis aliûs rectæ eidem parallelæ, & interjacentis portiones in spatio & in semicirculo interceptæ sunt æquales, sequitur spatium ipsum A R H V A semicirculo F I H esse æquale: quod erat ostendendum.



*Corollarium primum.*

**P**OTEST simili argumento demonstrari spatium ARYHIFA, quod à dimidiâ trochoide ARH, dimidiâ circumferentiâ HIF, & dimidiâ basi FA continetur, æquale esse spatio AVHFA, quod à dimidiâ comite AVH, diametro HF, & dimidiâ basi FA comprehenditur. Quia scilicet ipsa duo spatia sunt in iisdem parallelis AF, CH : & ductâ quâcunque eisdem intermediâ parallêlâ YD, ostensum est secundâ Propositione portionem YX priori spatio interceptam, æqualem esse portioni 6 D altero spatio comprehensam. Quod idem quia parallelis omnibus interceptis accidit, patet ipsa spatia esse æqualia.

*Corollarium secundum.*

**N**EC dissimili argumento probabitur spatium ARHCA, quod à dimidia trochoide ARH, rectâ HC, & rectâ CA continetur, æquale esse spatio AVHIFA, quod à dimidiâ comite AVH, semicircumferentiâ HIF & dimidiâ basi FA comprehenditur; quamvis in rotâ contractâ portio quædam primi horum spatiorum sit ultrâ rectam AC extrâ rectangulum FC; & portio quædam secundi spatii contineatur intra semicirculum FIH; nihilo enim minus fiet demonstratio universalis, sed propter distinctionem rotarum multis verbis opus erit. At veritas hujus propositionis multò facilius ex precedentibus elicitur in rotâ simplici & prolata. Nam quia quartâ Propositione ostensum est spatium AVHCA æquale esse spatio AVHFA; item Propositione sextâ spatium ARHVA ostensum est æquale semicirculo FIH: demptis æqualibus ab æqualibus in rotâ simplici & contractâ, patebit Propositio.

Bbb iij

*Corollarium tertium.*

**I**N rotâ simplici quatuor hæc spatia sunt æqualia ARHCA, ARHVA, AVHIFA & semicirculus FIH. Quia enim spatium comitis AVH 10 LA in rotâ simplici ostensum est esse duplum rotæ seu circuli FH, per Propositionem quartam erit dimidium ejusdem spatii, scilicet AVHFA, duplum semicirculi FIH; quare dempto semel ipso semicirculo, relinquitur spatium AVHIFA æquale eidem semicirculo. Cætera manifesta sunt.

## PROPOSITIO SEPTIMA.

*Cujusvis trochoidis spatium majus est circulo sibi proprio, & excessus mediam tenet proportionem inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.*

**M**ANIFESTA est Propositio. Nam in eadem figura, spatium trochoidis ARH 25 LA æquale est spatio suæ comitis AVH 10 LA, ac præterea duobus spatiis ARHVA, & L 25 H 10 L, quorum utrumque æquale est semicirculo FIH per sextam Propositionem; ideoque ambo simul ipsi integro circulo FIHG sunt æqualia; ideoque ipsum trochoidis spatium superat circulum sibi proprium spatio suæ comitis; quod quidem per Propositionem quintam mediam proportionem tenet inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

*Corollarium.*

**H**INC palam est in rotâ simplici spatium trochoidis triplum esse ejusdem rotæ: quia ipsum continet circulum sibi proprium, hoc est ipsam rotam semel, ac præterea ejus duplum, scilicet spatium suæ comitis.

# AD TROCHOIDEM, EJUSQUE SOLIDA.

## PROPOSITIO LEMMATICA PRIMA.

*Esto circulus ACBD, cujus diameter AB; atque ex ejus semicircumferentiâ ACB sumatur arcus quicumque FG, sive is sit diametro AB conterminus, sive non; dividaturque arcus ille in quotlibet partes æquales in punctis F, L, M, C, N, G, &c. indefinitè, quemadmodum in doctrinâ indivisibilium fieri consuevit; ex quibus punctis demittantur in diametram AB totidem rectæ perpendiculares FR, LS, MT, CE, NV, GX, &c. quæ erunt totidem sinus recti numero indefiniti & secundùm arcus æquales, vel æqualiter sese excedentes sumpti. Proponitur demonstrandum,*

*Omnes illos sinus indefinitè sumptos ad radium circuli toties sumptum sic se habere, ut recta RX, portio scilicet diametri inter extremos sinus intercepta, ad arcum propositum FG.*

**P**RODUCANTUR enim sinus illi, donec alteri semicircumferentiæ ADB occurrant in punctis H, O, P, D, Q, I, &c. & jungantur alternatim rectæ LH, MO, CP, ND, GQ, &c, occurrentes diametro AB in punctis, Y, Z, 2, 3, 4, &c. & ductis omnium arcuum subtensis FL, LM, MC, CN; HO, OP, PD, DQ, &c. fiant triangula rectangula similia HRY, LSY, OZS,

bere, quam recta  $RX$  ad rectam  $A\delta$ . Atqui ex doctrina indivisibilium, & propter infinitam arcuum equalium multitudinem & parvitatem, omnes prædictæ subtensæ simul sumptæ unâ cum  $HR$  &  $GX$ , sumi possunt pro duplo omnium sinuum prædictorum indefinitè sumptorum, dempto eorum uno; sicuti recta  $B\delta$  pro diametro seu duplo radii, & recta  $A\delta$ , pro arcu  $A\delta$ , sive  $FL$ . Ut ergo duplum omnium sinuum indefinitè sumptorum dempto

dempto uno, ad duplum radii; ita recta  $RX$  ad arcum  $FL$ ; sumptisque duorum priorum terminorum dimidiis, erunt omnes sinus indefinitè sumpti, dempto uno, ad radium, ut  $RX$  ad  $FL$ . Verùm tot sunt sinus, dempto uno, quot arcus; ergò sumptis consequentium æquemultiplicibus in præcedenti proportionē, erunt omnes sinus, dempto uno, ad radium toties sumptum, ut recta  $RX$ , ad omnes arcus minores; hoc est ad arcum  $FG$ . Sed in doctrinā indivisibilium, unicus sinus additus ad alios numero indefinitos, nihil mutat; unde patet Propositio: quippe omnes sinus ad radium toties sumptum eandem rationem habebunt, quàm recta  $RX$  ad arcum  $FG$ .

*Corollarium primum.*

**S**I ergo arcus assumptus  $FG$ , sit semicircumferentia ipsa, ad quam pertineat diameter  $AB$ , quæ hoc casu referet rectam  $RX$ ; patet omnes sinus rectos ad semicircumferentiam pertinentes atque secundum æquales arcus indefinitè sumptos, esse ad radium toties sumptum, ut diameter ad semicircumferentiam. Hic autem in demonstratione, quia extremi sinus evanescunt, nihil demendum erit nec addendum: in universum tamen additio aut subtractio finiti alicujus determinati, in doctrinā indivisibilium nihil mutat.

*Corollarium secundum.*

**S**I autem arcus  $FG$  sit quadrans diametro  $AB$  conterminus; tunc radius referet rectam  $RX$ ; atque ita omnes sinus recti ad quadrantem pertinentes, & secundum æquales arcus sumpti, erunt ad radium toties sumptum, ut radius ad quadrantem.

*Reg. de l'Acad, Tom. VI.*

Ccc

*Corollarium tertium.*

**A**T si arcus FG sit quidem diametro AB conterminus, sed quadrante major aut minor; tunc recta RX erit sinus versus ipsius arcûs. Ut ergo omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus versus ad arcum.

*Corollarium quartum.*

**S**I arcus FG diametro AB non sit conterminus, idem autem ita constitutus sit, ut alterutrum punctorum R vel X sit centrum circuli, quo pacto alteruter sinuum extremorum FR vel GX erit radius; tunc recta RX æqualis erit sinui recto ejusdem arcûs: quapropter, ut omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus rectus arcûs ad ipsum arcum.

*Corollarium quintum.*

**I**N casu quarti Corollarii. Si centrum circuli sit inter puncta R, X; tunc recta RX componetur ex duobus sinibus rectis duarum portionum arcûs FG. Ut ergò se habet summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita summa duorum sinuum rectorum, qui ad duas portiones arcûs FG pertinent, se habebunt ad eundem arcum.

*Corollarium sextum.*

**I**N eodem casu, si centrum cadat ultrà puncta R, X; tunc recta RX erit differentia duorum sinuum rectorum, vel etiam duorum sinuum versorum, qui sinus recti vel versi pertinebunt ad duos arcus quorum diffe-

gentia erit arcus ipse FG. Itaque, ut summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita differentia illa sinuum ad ipsum arcum FG.

*Corollarium septimum.*

**Q**UONIAM autem omnes sinus recti differunt à radio toties sumpto, per omnes sinus versos; sumptis differentiis pro antecedentibus, erunt omnes sinus versi ad radium toties sumptum, ut differentia inter rectam RX, & arcum FG, ad ipsum arcum FG. Undè rursus sex Corollaria, sex præmissis respondentia faciliè deducuntur, quorum quæ ad quartum pertinebit conclusio talis erit, Ut omnes sinus versi ad radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum & ipsum arcum, ad ipsum eundem arcum.

PROPOSITIO LEMMATICA SECUNDA.

Ex prædictis faciliè est examinandis sinuum Tabulis perutilem hanc Propositionem demonstrare.

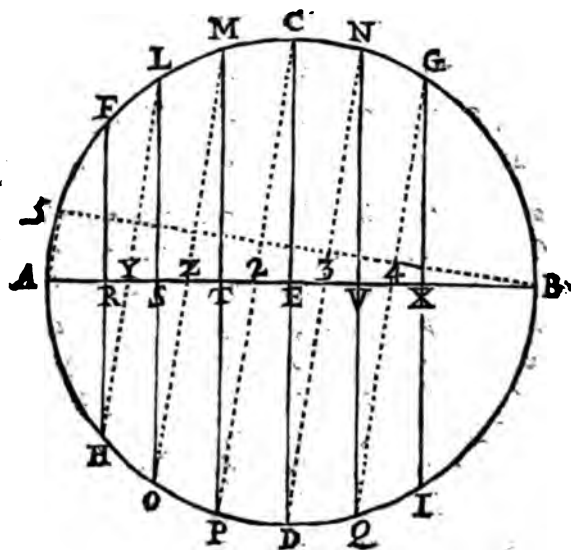
*Si in circumferentiâ circuli sumantur duo quicumque arcus FM, CG; & reliqua ponantur ut in primâ Propositione, omnes sinus recti ex arcu FM demissi, atque indefinite sumpti, puta FR, LS, MT &c. ad omnes sinus rectos ex arcu CG demissos atque indefinite sumptos, puta CE, NV, GX &c. (modò tamen singuli ex minoribus arcubus FL, LM, &c. æquales sint singulis ex minoribus arcubus CN, NG, &c. sive multitudo horum æqualis sit multitudini illorum, sive non) erunt, ut recta RT extremis sinibus intercepta, ad rectam EX extremis sinibus interceptam.*

**N**AM ex prima Propositione, Ut omnes sinus FR, LS, MT, &c. ad radium toties sumptum; ita recta RT ad arcum FM. Ut autem radius ille toties sum-

tus ad eundem radium toties sumptum, quot in majori arcu CG continentur minores, ita arcus integer FM ad arcum integrum CG : & ut radius toties sumptus quot in arcu CG continentur minores ad totidem sinus CE, NV, GX; ita arcus CG ad rectam EX : ergo ex æquo in quatuor terminis utrinque, Ut omnes sinus FR, LS, MT, & ad omnes sinus CE, NV, GX, &c. ita recta RT, ad rectam EX..

*Corollarium primum.*

**H**INC licet Tabulas sinuum per quoscunque arcus commensurabiles examinare hâc ratione. Esto an-



cus FM triginta graduum, arcus vero CG quadraginta graduum; sintque in utroque arcu dati extremi sinus ex Tabulis, puta FR, MT, CE, GX; tum reliqui inter-

medii per singula minuta prima, vel etiam secunda, si libuerit: unde ex iisdem Tabulis dabuntur etiam rectæ RT, EX. Quoniam ergo numerus sinuum utrinque finitus est atque determinatus, ex summâ omnium priorum sinuum FR, LS, MT, &c. dematur dimidium extremorum FR, MT; tum ex summâ posteriorum CE, NV, GX, &c. dematur dimidium extremorum CE, GX; eritque tunc residuum priorum ad residuum posteriorum, ut recta RT, ad rectam EX; quod nisi ita reperiatur, erroneæ erunt Tabulæ. Erit tamen error ferendus, donec excessus aut defectus minor erit dimidio illius numeri qui exprimit multitudinem omnium sinuum in utroque arcu contentorum.

*Corollarium secundum.*

**Q**UOD si proponatur arcus FG, ita dividendus in duos arcus FM, MG, ut demissis sinibus rectis FK, LS, &c. quemadmodum supra, summa omnium sinuum indefinitè sumptorum qui ad arcum FM pertinebunt, ad summam omnium qui ad arcum MG pertinebunt, rationem habeant datam; dividenda erit recta RX in ratione datâ, putâ in puncto T, atque ab eo excutanda perpendicularis TM usque ad circumferentiam; & factum erit, ut patet ex præmissâ secunda Propositione.

Hic multa theorematâ & problémata præmissis similia proponi possent, quæ, quia facilia sunt nihilque ad nostrum institutum conducunt, consultò omittimus.

*Ad primum, sequens notandum.*

**I**N figurâ rotæ atque trochoidis sequentis, ut pateat trilineum AMHG æquale esse quadrato semidiametris rotæ AG, adverte rectam GH quadranti circum-

ferentia æqualem esse quæ recta GH, si in quocunque partes æquales indefinitè secetur, & à singulis sectionis punctis excitentur perpendiculares usque ad curvam AMH, exhibebunt ipsæ perpendiculares omnes sinus rectos quadrantis diametro contermini secundum æquales arcus sumptos, ex naturâ trochoidis ejusdemque sociæ: quare per secundum Corollarium Propositionis primæ præmissæ, erunt illi omnes sinus simul sumpti ad radius AG toties sumptum, ut radius AG ad quadrantem GH. Ut autem summa illorum sinuum ad summam radiorum, ita trilineum AMHG ad rectangulum AH, ex doctrinâ indivisibilium; & ut radius AG ad quadrantem GH, ita quadratum ipsius AG ad rectangulum AH; ideoque ut trilineum AMHG ad rectangulum AH, ita quadratum AG ad idem rectangulum AH; unde trilineum ipsum AMHG æquale est quadrato semidiametri AG.

Quoniam autem trilineum reliquum AMHV est differentia inter trilineum AMHG & rectangulum AH; illud ergo AMHV æquale erit differentia inter quadratum AG & rectangulum AH; hoc est rectangulo contento sub semidiametro AG & differentiâ inter ipsam AG & quadrantem GH.

*Ad secundum, sequens notandum.*

**B**ILINEUM AMHZA est manifestò differentia inter triangulum AGHZA sive quadrantem rotæ, & trilineum AMHG sive quadratum semidiametri AG.

*De Rotâ simplici quædam notanda.*

I. **Q**UOD sub semidiametro rotæ & quadrante itineris centri ejusdem comprehenditur rectangulum, à sociâ trochoidis sic dividitur, ut portio ma-

por æqualis sit quadrato semidiametri rotæ; altera autem portio, eademque minor æqualis sit rectangulo contento sub semidiametro rotæ & differentiâ quæ est inter eandem semidiametrum & quadrantem circumferentiæ ipsius rotæ.

II. Quod à quartâ parte sociæ trochoidis & à rectâ quæ quartæ ipsius extrema conjungit clauditur spatium bilineum, æquale est differentiæ inter quadrantem rotæ & quadratum semidiametri ejusdem.

III. Propositâ trochoide ejusque sociâ, atque utriusque plano circa communem basim circumvoluto, fit solidum trochoidis circa basim, quod quidem ad cylindrum cui inscribitur hâc ratione comparabitur.

Portio solidi comprehensa inter duas superficies, quarum altera à trochoide, altera ab ejus sociâ describitur, æqualis est cylindro cujus basis sit rota ipsa, altitudo autem æqualis circumferentiæ ipsius rotæ; quoniam idem æquale est annulo stricto ejusdem rotæ; ac proinde portio illa, totius cylindri circumscripti quarta pars est.

Portio solidi quæ unicâ superficie continetur, scilicet eâ quæ à sociâ trochoidis describitur, commodè conferri potest cum cylindro cujus axis sit idem cum axē solidi trochoidis; semidiameter verò basis sit semidiameter rotæ: reperietur autem talis portio aquari tali cylindro, ac prætereà quadruplo illi solido quod fit ex conversione majoris illius trilinei, quod primo notando diximus æquari quadrati semidiametri rotæ, si scilicet tale trilineum circa iter centri rotæ convertatur. At ultimus hic cylindrus totius cylindri circumscripti quarta pars est; solidum autem ex conversione trilinei, ejusdem totius trigesima secunda pars evadit; quia omnia quadrata ipsius trilinei æqualia sunt omnibus quadratis omnium sinuum rectorum quadrantis rotæ secundum æquales arcus sumptorum, quæ omnia quadrata quadrati semidiametri toties sumpti dimidia sunt; & hoc

quadratum semidiametri toties sumptum est decima sexta pars omnium quadratorum parallelogrammi circumscripti circa trochoidem: hoc ergo solidum quater sumptum octavam totius cylindri circumscripti partem constituit: tandem ergo sequitur totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituere  $\frac{1}{2}$ .

Vel aliter hoc idem solidum quod à trochoidis sociâ circa ejusdem basim circumvolutâ describitur, ad totum cylindrum sic comparabitur. Quoniam planum, ex cujus conversione circa basim trochoidis fit tale solidum, ad rectangulum ipsi circumscriptum, ex cujus conversione fit totus cylindrus se habet ut summa omnium sinuum versorum secundum æquales arcus sumptorum, ad diametrum toties sumptum; erit solidum ad cylindrum, ut summa omnium quadratorum ab omnibus sinibus versis secundum æquales arcus sumptis, ad quadratum diametri toties sumptum. At hæc ratio est ut 3 ad 8, & additâ quartâ parte totius cylindri, hoc est annulo stricto de quo supra; fit ut totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituat, ut prius.

Et quidem ejusmodi ratio  $\frac{1}{2}$  de quâ jam egimus, geometricè vera est, ac prorsus accurata. At circa solidum quod fit ex conversione trochoidis circa axem, eadem certitudo non contingit, nec potest, nisi inventa fuerit ratio diametri rotæ ad ejus circumferentiam.

Neque etiam movemur quod Evangelista Torricellius asserat tale solidum ad suum cylindrum (qui scilicet altitudinem habeat axem trochoidis, at diametrum basis basim ejusdem trochoidis) rationem eandem habere quam undecim ad octodecim; hæc enim ratio  $\frac{11}{18}$  minor est quàm vera.

Ad hoc autem admittatur rursus sociâ trochoidis,   
cujus

ejus beneficio solidum trochoidis dividetur in alia duo solida. Primum duabus superficiebus curvis continebitur, eâ scilicet quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus fociâ describitur. Secundum vero, circulo basis & eâ superficie curva terminabitur, quæ à fociâ trochoidis describetur. Ratione autem initâ secundum Geometriæ regulas, primum solidum continebit quartam partem totius cylindri, ac præterea sphaeram rotæ, quæ ad ipsum cylindrum se habet ut sexta pars quadrati diametri ad quadratum semicircumferentiæ: secundum autem solidum continebit ejusdem totius cylindri partem quartam, ac præterea portionem quandam quæ juncta sphaeræ rotæ ad totum cylindrum se habebit, ut differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ &  $\frac{4}{3}$  quadrati radii, ad quadratum ipsius semicircumferentiæ.

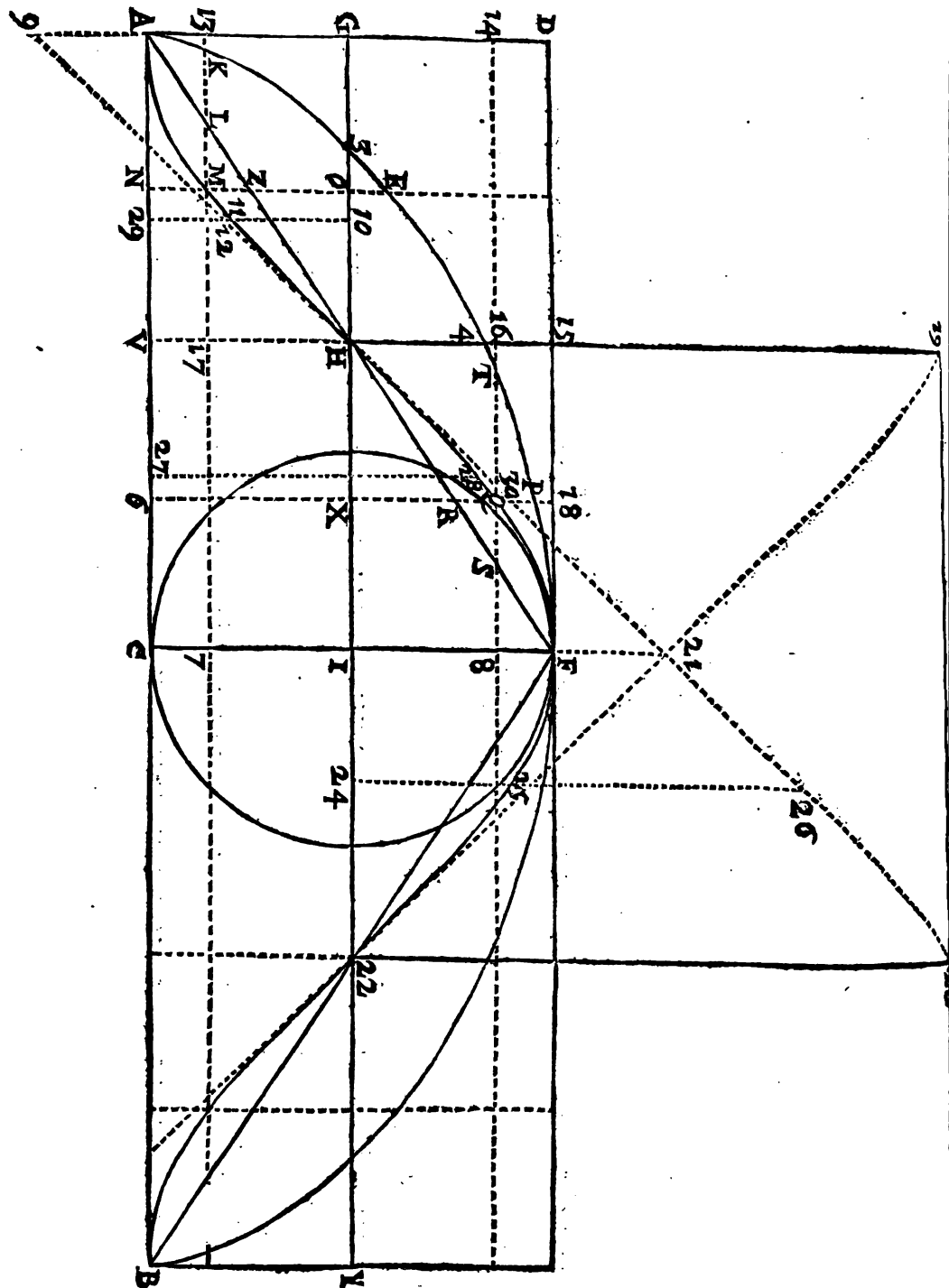
Ponatur radius partium

æqualium	3000000	
Erit semicircumferentia	9424778	paulo major.
Quadratum semicircumferentiæ	8882643960	paulo minus.
$\frac{2}{3}$ ejusdem quadrati	2220660990	minus.
$\frac{4}{3}$ quadrati diametri	4800000000	
Differentia hujus & quadrati semicircumf.	4082643960	
$\frac{2}{3}$ hujus differentiæ	1020660990	}
Semiquadratum semicircumferentiæ	4441321980	
Summa duorum ultimorum numerorum	5461982970	
Erit numerator rationis solidi ad totum cylindrum, cujus denominator quadratum semicircumferentiæ.		

Ratio Torricellii quadrati semicircumferentiæ	5428282420	$\frac{11}{13}$ seu $\frac{44}{71}$
ejusdem quadrati	5551652475	$\frac{1}{2}$ seu $\frac{41}{71}$

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

Ddd



Patet ergo rationem majorem esse eâ quæ à Torricellio assignatur; minorem tamen eâ quæ suprâ assignata est pro solido circa basim, quæ est  $\frac{1}{8}$ .

AK<sub>3</sub>E<sub>4</sub>TPFB est trochoides : AMHQFB est ejusdem trochoidis focia : G<sub>3</sub>OHXIY est iter centri : C<sub>7</sub>I<sub>8</sub>F est axis : ANV<sub>6</sub>CB est basis : F vertex : DB parallelogrammum circumscriptum; & ductæ sunt rectæ ALZHRSF, & BF : item ductæ sunt quæcunque rectæ NMZOE, VH<sub>4</sub>, & PQRX 6 axi parallelæ; ac tandem quæcunque rectæ 1<sub>3</sub> KLM 7, & 1<sub>4</sub> TQS 8 parallelæ basi.

Itaque pro solido circa basim, patet illud esse ad cylindrum circumscriptum, ut omnia quadrata NE, V<sub>4</sub>, 6P, CF, &c. in infinitum, ad totidem quadrata CF. Verum quadratum NE æquale est quadratis NM, ME, & duplo rectangulo NME; sicuti quadratum V<sub>4</sub> æquale est quadratis VH, H<sub>4</sub>, & duplo rectangulo VH<sub>4</sub>; & quadratum 6P æquale est quadratis 6Q, QP, & duplo rectangulo 6QP, & sic de reliquis. Ex illis autem, quadrata NM, VH, 6Q, CF & similia, sunt quadrata omnium sinuum-versorum secundum æquales arcus sumptorum, quæ simul constituunt  $\frac{1}{8}$  quadratorum diametri CF, & eadem constituunt rationem solidi focia trochoidis ad cylindrum: hæc ergo ratio est  $\frac{1}{8}$ . Reliqua quadrata ME, H<sub>4</sub>, QP, &c. unâ cum duplis rectangulis NME, VH<sub>4</sub>, 6QP, &c. ad quadrata CF collata efficiunt rationem quam habet ad eundem cylindrum duplus annulus qui fit ex figurâ AMHQFP<sub>4</sub>EA circa basim AB circumvolutâ, qui duplus annulus æqualis est annulo rotæ circa basim AB circumvolutæ, hoc est cylindro cujus basis sit rota, altitudo autem circumferentia rotæ, sive basis AB, qui cylindrus constituit  $\frac{2}{8}$  totius cylindri. Quare solidum rotæ ad totum cylindrum constituit rationem  $\frac{1}{8}$ .

Aliter pro solido quod fit à trochoidis sociâ. Omnia quadrata NM, ab A usque ad VH æqualia sunt omnibus quadratis NO, OM, minùs omnibus duplis rectangulis NOM. Item ab VH usque ad CF omnia quadrata 6Q æqualia sunt omnibus quadratis 6X, XQ, plus omnibus duplis rectangulis 6XQ: verum hæc dupla rectangula 6XQ æqualia sunt illis NOM, omnia scilicet omnibus; existentibus ergo contrariis signis plus & minùs, elidunt se invicem hæc & illa dupla rectangula, remanentque omnia quadrata NM, 6Q, æqualia omnibus NO, OM, 6X, XQ: horum autem NO, 6X, sunt quadrata semidiametri, quæ constituunt quartam partem quadratorum totius diametri CF, sive  $\frac{2}{3}$ . At quadrata OM, XQ, sunt quadrata omnium sinuum rectorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ idè constituunt dimidiam partem omnium quadratorum semidiametri, sive octavam partem quadratorum totius diametri. Patet ergo omnia quadrata NM, 6Q, constituere  $\frac{2}{3}$  &  $\frac{1}{3}$ , hoc est  $\frac{2}{3}$  omnium quadratorum totius diametri CF, quæ eadem est ratio solidi quod fit à sociâ trochoidis, ad cylindrum eidem circumscriptum; putà ratio omnium quadratorum NM, 6Q ad omnia quadrata CF.

Pro solido autem circa axem CF, admisâ rursùs sociâ trochoidis in eadem figurâ, manifestum est illud dividi in alia duo solida, quorum alterum instar annuli stricti terminatur duabus superficiebus, eâ nempe quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus sociâ describitur: alterum autem solidum duabus etiam superficiebus comprehenditur; eâ nempe quæ à sociâ trochoidis gignitur, & eo circulo cujus semidiameter est recta CA.

Ac primum quidem solidum ad totum cylindrum collatum, eam habet rationem quam omnia simul quadrata MK, H<sub>3</sub>, QT, & similia, unà cum omnibus duplis

rectangulis  $7MK$ ,  $IH_3$ ,  $8QT$ , & similibus, ad quadratum  $AC$  toties sumptum. At dupla illa rectangula æquivalent semel omnibus rectangulis sub  $713$  five  $CA$  &  $MK$ ; sub  $IG$  five  $CA$  &  $H_3$ ; sub  $814$  five  $CA$  &  $QT$ ; (propterea quod omnes rectæ  $7M$ ,  $IH$ ,  $8Q$ , &c. bis sumptæ æquivalent omnibus rectis  $713$ ,  $IG$ ,  $814$ , &c. semel sumptis, hoc est rectæ  $CA$  toties sumptæ) & hæc rectangula constituunt quartam partem quadrati  $CA$  toties sumpti, sicuti omnes rectæ  $MK$ ,  $H_3$ ,  $QT$ , constituunt  $\frac{1}{4}$  rectæ  $CA$  toties sumptæ. Omnia autem quadrata  $MK$ ,  $H_3$ ,  $QT$ , &c. ad quadratum  $CA$  toties sumptum eandem rationem habent quam sphaera rotæ ad totum cylindrum, hoc est, quam  $\frac{2}{3}$  quadrati semidiametri rotæ ad quadratum  $CA$ , five quam  $\frac{1}{3}$  trilinei  $HQFI$  seu  $AMHG$  quadrato  $IE$  seu  $IC$  æqualis, ad quadratum  $CA$ . Pater itaque primum solidum continere quartam partem totius cylindri, ac præterea portionem aliquam quæ ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem quam  $\frac{2}{3}$  quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ.

Jam ad secundum solidum. Manifestum quidem est illud ad totum cylindrum sic se habere ut omnia quadrata  $CA$ ,  $7M$ ,  $IH$ ,  $8Q$ , &c. ad quadratum  $CA$  toties sumptum. Hæc autem ratio ut detegatur, adverte omnia illa quadrata æqualia esse omnibus quadratis  $DF$ ,  $14Q$ ,  $GH$ ,  $13M$ , &c. quia singula singulis æqualia sunt ex natura trochoidis. Itaque si hæc & illa quadrata simul cum quadrato  $AC$  toties sumpto conferantur, res expeditur. Vide aliam demonstrationem secundi hujus solidi in Appendice quæ postea sequetur.

At hoc jam confectum est in universum in omni parallelogrammo quale est  $ACFD$ , ductâ primò utcunque lineâ qualis est socia  $AMHQF$  constituyente duo-trilinea primæ divisionis  $AHFC$ , &  $FHAD$  : rum ductâ

secundò rectâ  $VH_{415}$ , quæ & latera  $AC$ ,  $DF$ , & parallelogrammum simul bifariam dividat, secetque lineam ipsam  $AMHQF$  utcumque in  $H$ , ita ut constituentur duo trilinea secundæ divisionis  $AMHV$ , &  $HQF_{15}$ , & duo reliqua quadrilinea; si insuper intelligamus rectam  $AC$  dividi tertiò in quocumque partes æquales in infinitum, ex doctrinâ indivisibilium, & per puncta divisionis ductas esse rectas ipsi  $CF$  parallelas, quæ parallelogrammum dividant in totidem partes æquales, sed & lineam  $AMHQF$  in totidem punctis: constituent ergo ipsæ rectæ intra trilinea secundæ divisionis  $AMHV$ ,  $HQF_{15}$ , multa alia minora trilinea tertiæ divisionis; tot scilicet intra singula quot partes æquales in singulis rectis  $AV$ ,  $F_{15}$ , continentur. Puta si rectâ  $AV$  tertiâ divisione in 1000 partes æquales dividatur, constituentur 1000 trilinea tertiæ divisionis quorum maximum erit ipsum  $AMHV$ ; & omnia communem habebunt apicem  $A$ ; ac minimum quidem trilineum assumet ex rectâ  $AV$  primam partem ad  $A$  terminatam; sequens autem assumet duas priores partes ad idem  $A$  terminatas; tertium tres; quartum quatuor, & sic eodem ordine usque ad maximum; eritque forsan unum ex intermediis  $AMN$ . Sic intra trilineum  $HQF_{15}$  totidem constituentur minora trilinea tertiæ divisionis quorum unum ex intermediis erit forsan  $F_{18}Q$ . Præterea ex rectis  $CA$ ,  $713$ ,  $IG$ ,  $814$ ,  $FD$ , &c. quædam portiones intra prædicta trilinea secundæ divisionis continentur: putà intra  $AMHV$ ; portiones  $AV$ ,  $M_{17}$ , &c. intra  $HQF_{15}$  verò, portiones  $F_{15}$ ,  $Q_{16}$ , &c. atque ex doctrinâ indivisibilium demonstratur horum omnium portionum quadrata simul sumpta dupla esse omnium prædictorum trilineorum tertiæ divisionis simul sumptorum.

Hoc posito, illud inquam jam confectum est ex doctrinâ indivisibilium, diviso triplici divisione quovis

parallelogrammo CD, ut dictum est, siue prima divisio fiat in partes æquales, ut hîc, siue non; omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea AHFC, & FHAD primæ divisionis pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15; hoc est quadruplum omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis, quæ in iisdem AMHV, HQF 15 comprehenduntur, ut supra. Omnia enim quadrata omnium portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. simul sumpta dupla sunt omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis quæ in ipsis AMHV, HQF 15 comprehenduntur: hoc autem ex doctrina indivisibilium demonstramus in secunda Propositione Appendicis quæ postea sequetur. Et hoc quidem in universum in omni parallelogrammo: at hîc in specie trilinea quidem AHFC, & FHAD primæ divisionis æqualia sunt; sicuti æqualia sunt quoque AMHV, & HQF 15 secundæ divisionis: quare sumptis tantum AHFC, & AMHV quæ constituunt dimidiam partem omnium quatuor; tunc quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. quæ pertinent ad secundum solidum de quo agitur, constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, ac præterea quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV comprehensorum.

Si itaque hæc quarta pars cum eâ quartâ quæ ex primo solido inventa est, jungatur, habebimus solidum rotæ constituere dimidium sui cylindri, ac præterea duas portiones, quarum altera ad eundem cylindrum sic se habet ut  $\frac{2}{3}$  trilinei AMHG ad quadratum AC, ut supra: altera autem ad eundem cylindrum sic se habet ut qua-

druplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in AM, HV comprehensorum, ad idem quadratum AC toties sumptum quot sunt rectæ CA, 7 M, IH, 8 Q, &c.

Supereſt ergò ut oſtendamus duas illas portiones ſimul junctas, ad totum cylindrum eandem rationem habere, quam differentiam inter quadratum quadrantis circumferentiæ &  $\frac{4}{3}$  quadrati radii, ad quadratum ſemicircumferentiæ : & quidem de  $\frac{2}{3}$  trilinei AMHG nulla erit difficultas; de quadruplo autem trilineorum, ſic patebit.

Producatur recta DGA verſus A uſque in 9, ita ut recta G 9, ſit æqualis rectæ GH, hoc eſt quadranti circumferentiæ rotæ; & jungatur recta 9 H, hæc cadet extra trilineum AMHG, & cum curvâ AMH conſtituet ad punctum H angulum minorem omni angulo reſtilineo, etiamſi producta ſecet eandem curvam AHM-QF in ipſo puncto H, in quo, tali ſeſtione, conſtituentur duo anguli ad verticem oppoſiti æquales, ac ſinguli minores quovis angulo reſtilineo; quod tamen hic parum refert: ſufficit enim quod recta 9 H cadat extra trilineum AMHG; hoc autem ſic oſtendimus.

In ipſâ 9 H ſumatur quodvis punctum 12 ex quo ducatur recta 12 10 parallela ipſi AG atque occurrens rectæ GH in puncto 10, curvæ autem AMH occurrat ipſa 12 10 producta, ſi opus ſit, in puncto 11; itaque recta 10 12 æqualis eſt rectæ 10 H, recta autem 10 H æqualis eſt arcui cuidam quadrante minori, cujus ſinus reſtus erit recta 10 11 ex naturâ ſociæ trochoidis, quare 10 11 minor eſt quàm 10 H ſive quàm 10 12: unde punctum 12 eſt extra trilineum AMHG, quod idem de omnibus punctis rectæ 9 H oſtendetur. Quoniam autem trilineum HQF 15 ſecundæ divisionis, & omnia minora trilinea tertiæ divisionis in eo contenta, trilineo AMHU ſecundæ divisionis, & omnibus trilineis

neis tertiæ divisionis in eo contentis singula singulis ordine sumptis, æqualia sunt : quod de his ostendetur, de illis quoque verum erit.

Sumatur ergo QF 18 trilineum quodvis tertiæ divisionis assumens ex rectâ F 15, rectam F 18 quocunque partium æqualium ex iis in quas divisæ sunt rectæ CA, FD; tum rectæ F 18 sumatur æqualis ex HG recta H 10, ducaturque recta 10 11 12, ut supra. Est igitur F 18, sive H 10, sive 10 12 æqualis cuidam arcui cujus sinus versus est 18 Q; sinus autem rectus est 10 11, ex naturâ sociæ trochoidis; quare recta 11 12 est differentia inter arcum & ejusdem arcûs sinum rectum : & trilineum quidem QF 18 ad parallelogrammum FX sic se habet, ut omnes sinus versi omnium arcuum æqualium minorum tertiæ divisionis in arcu F 18 contentorum, ad radium IF toties sumptum, quot in arcu F 18 continentur arcus minores ejusdem tertiæ divisionis, ex doctrinâ indivisibilium. Ut autem omnes illi sinus versi ad omnes illos radios, ita recta 11 12 differentia arcus F 18 & sui sinus recti, ad arcum F 18, ex Corollario septimo Propositionis præmissæ : quia recta F 18 refert arcum, cujus sinus rectus est 10 11, & differentia inter hunc sinum & ipsum arcum F 18, sive 10 12, est 11 12; atque insuper alter sinuum ab extremitatibus arcûs F 18 cadentium, puta sinus FI cadit in centrum : quare trilineum QF 18 est ad parallelogrammum FX, ut recta 11 12 ad rectam F 18; sed parallelogrammum FX ad parallelogrammum FH se habet ut recta F 18 ad rectam F 15 : quare ex æquo, ut trilineum QF 18 ad parallelogrammum FH, ita recta 11 12 ad quadrantem F 15 sive GH.

Cùm ergo idem de singulis trilineis tertiæ divisionis verum sit, quod de QF 18 jam demonstratum est; sequitur omnia illa trilinea simul sumpta ad parallogram-

mum FH toties sumptum sic se habere, ut omnes differentię inter omnes sinus rectos secundum æquales arcus sumptos, & suos arcus, ad quadrantem G 9 toties sumptum. Ut autem hæ omnes differentię ad omnes quadrantes, ita trilineum AMH 9, quod differentias illas omnes continet, ad quadratum quadrantis G 9, quod omnes illos quadrantes continet, ex doctrinā indivisibilium: quare argumentis ex arte institutis quadruplum omnium trilineorum tertię divisionis in trilineo HQE 15, sive in trilineo AMHV contentorum, erit ad octuplum parallelogrammi FH toties sumpti quot sunt trilinea in AMHV, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadruplum quadrati quadrantis G 9, sive ut duplum trilinei ipsius AMH 9 ad quadratum semicircumferentię AC. At octuplum prædictum æquale est omnibus quadratis CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ex doctrina indivisibilium; quia tam ex octuplo illo, quàm ex omnibus his quadratis, constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet parallelogrammum AF, altitudinem autem rectam AC: sive, quod idem est, quod basim habet quadratum rectę AC, altitudinem autem rectam CF.

Itaque quadruplum omnium trilineorum tertię divisionis in trilineo AMHV contentorum, ad omnia quadrata CA, 7 13, IG, 8 14, &c. sic se habet, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadratum AC. Ut autem quadruplum illud ad omnia quadrata semicircumferentiarum, ita erat una ex duabus portionibus reliquis solidi rotę, ad totum cylindrum. Ut ergo talis portio ad cylindrum, ita duplum trilinei AMH 9 ad quadratum AC; sed & altera portio erat ad eundem totum cylindrum ut  $\frac{2}{3}$  trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 ad quadratum AC; sed  $\frac{1}{3}$  trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 simul differunt à quadrato quadrantis G 9.

tanto spatio quantum est  $\frac{4}{3}$  ipsius trilinei AMHG; (patet, ex eo quod triangulum HG, sit dimidium ipsius quadrati G.) Constat ergo propositum, nempe duas illas portiones reliquas ad totum cylindrum sic se habere, ut differentia inter quadratum quadrantis &  $\frac{4}{3}$  trilinei AMHG, quod quadrato radii æquale est, ad quadratum semicircumferentiæ.

*Nota.*

**E**X iis quæ exposita sunt de rotâ simplici, atque solidis quæ ab illius trochoide gignuntur, non difficile erit rotas alias tam prolatas quàm contractas contemplari: eadem enim in illis quàm in simplici valebit methodus, eademque vigeant argumenta, sed conclusiones erunt diversæ propter diversas rationes altitudinis cujuscunque trochoidis ad suam basim. Nos tamen iis præmissis nec absolutis, sed rudi tantum minervâ exaratis ne memoriâ exciderent, supersedebimus, donec operi extremam manum imponere per tempus licebit. Tunc autem & centra gravitatis tam plani trochoidis, quàm ejus sociæ, examini subjicientur, ac detegentur.

A P P E N D I X

*Ad solidum trochoidis circa axem conversa, continens aliam demonstrationem secundi solidi duorum illorum ex quibus totum componitur, putà illius quod à sociâ circa axem conversa describitur.*

**A**D hoc autem præmissis duabus Propositionibus Lemmaticis, illarumque Corollariis, accedant quæ sequuntur.

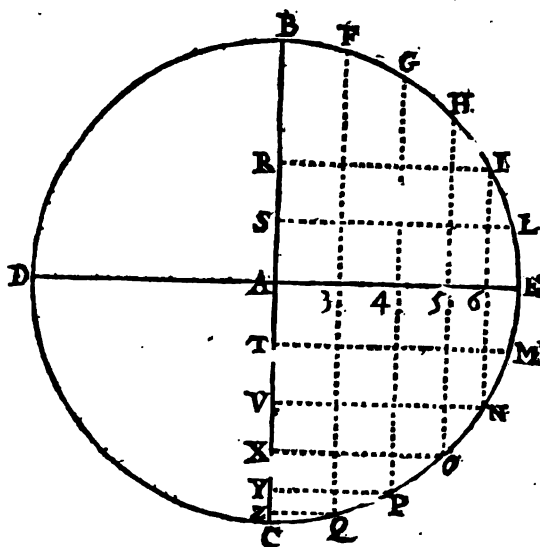
Corollario quidem septimo præcedenti demonstratum est in arcubus quadrante non majoribus, sic esse omnes sinus versos ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum & ipsius arcum ad ipsum eundem arcum. Hic verò demonstrabimus idem quoque verum esse de arcubus quadrante majoribus.

## PROPOSITIO PRIMA.

*Esto circulus cujus centrum  $A$ , diametri  $BC$ ,  $DE$  ad rectos angulos sese secantes, ita ut  $BEC$  sit semicircumferentia divisa in duos quadrantes  $BE$ ,  $CE$ , qui in quotlibet arcus aequales indefinitè dividantur in punctis  $B$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $L$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $C$ , &c. atque sumatur arcus quivis  $IEC$  quadrante major, & à punctis divisionis illius demittantur in diametrum  $BC$  perpendiculares  $IR$ ,  $LS$ ,  $EA$ ,  $MT$ ,  $NV$ ,  $OX$ ,  $PY$ ,  $QZ$ , &c. ut habeantur omnes sinus versi  $CZ$ ,  $CY$ ,  $CX$ ,  $CV$ ,  $CT$ ,  $CA$ ,  $CS$ ,  $CR$ , &c. ad arcum  $IC$  pertinentes: sinus autem rectus arcus  $IEC$  erit  $IR$ . Dico ergo sic esse omnes illos sinus versos ad radium  $AB$  toties sumptum, ut differentia inter sinum  $RI$  & suum arcum  $IEC$  ad ipsum eundem arcum.*

**D**EMITTANTUR in diametrum  $DE$  sinus recti  $F_3$ ,  $G_4$ ,  $H_5$ ,  $I_6$ , &c. qui pertinent ad divisiones arcus  $BI$  quadrante minoris ac semicircumferentiam perficientis. Itaque ex quarto Corollario, ut omnes sinus recti  $BA$ ,  $F_3$ ,  $G_4$ ,  $H_5$ ,  $I_6$ , &c. ad radium toties sumptum, ita sinus  $IR$  ad arcum  $IB$ . Ut autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu  $IB$ , ad ipsum radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu  $IC$ , ita arcus  $IB$  ad ipsum arcum  $IC$ : ergo ex æquo in tribus terminis, ut summa sinuum

BA, F<sub>3</sub>, G<sub>4</sub>, H<sub>5</sub>, I<sub>6</sub>, &c. ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita sinus IR ad arcum IC; & sumptis differentiis pro antecedentibus, ut differentia inter summam sinuum rectorum BA,



F<sub>3</sub>, G<sub>4</sub>, H<sub>5</sub>, I<sub>6</sub>, &c. radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ad ipsum radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum IR & suum arcum majorem IC, ad ipsum eundem arcum. Verùm differentia illa summæ sinuum & summæ radiorum æqualis est summæ sinuum verforum prædictorum, ut statim demonstrabimus: itaque constat Propositio.

*Lemma.*

**Q**UOD autem assumptum est, hoc ita demonstratur. Ex quadrante EC sumatur arcus NC æqualis arcui IB, & demittantur in diametrum DE sinus recti

Ecc ii.

$Q_3, P_4, O_5, N_6$ , &c. qui æquales erunt ipsis  $F_3, G_4, H_5, I_6$ , &c. illis autem ex radio  $AC$  toties demptis, remanent manifestò sinus versì  $CZ, CY, CX, CV$ : superest autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu  $IN$ ; sed hic perficit sinus versos reliquos  $CT, CA, CS, CR$ : nam radius bis sumptus perficit duos sinus versos  $CV, CR$ ; & idem radius rursus bis sumptus perficit duos sinus versos  $CT, CS$ ; sinus autem versus  $CA$  est idem radius. Reliqua patent. Ne aliquem moveat quod idem sinus versus  $CV$  bis assumptus est: ille enim cùm sit magnitudo quædam determinata, semel tantum, plusquàm par est, sumpta, atque indefinitis numero magnitudinibus addita, nihil officit in doctrinâ indivisibilium.

*Corollarium.*

**Q**UONIAM ergo in omni arcu, omnes sinus versì sunt ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum ipsius arcus, & arcum eundem ad ipsum arcum; ut autem radius toties sumptus ad eundem radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ: ita arcus propositus ad ipsam semicircumferentiam. Patet ex æquo in tribus terminis omnes sinus versos arcûs propositi, ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ, eandem rationem habere, quam differentia inter sinum rectum arcûs propositi & ipsum arcum, ad integram semicircumferentiam.



## PROPOSITIO SECUNDA.

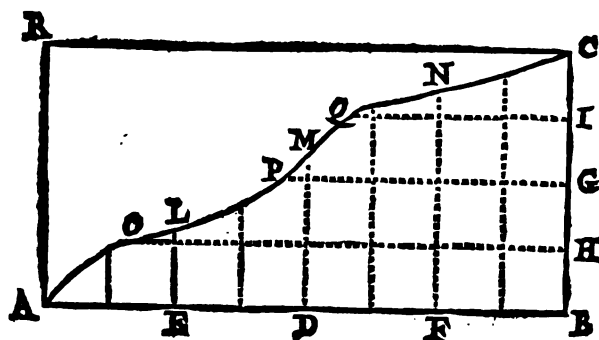
*Esto trilineum quodcunque  $ABC$ , cujus duo ex lateribus puta  $AB$ ,  $BC$ , sint lineæ rectæ, tertium verò  $AC$  utcunque rectum vel curvum; modo ipsum tale sit ut procedendo secundum ipsum à puncto  $A$  ad punctum  $C$ , idem fiat continuò propius ac propius rectæ  $BC$ ; remotius autem ac remotius à rectâ  $AB$ : ut sic nec rectâ  $AB$ , nec  $BC$ , nec quævis iisdem parallela, ipsi lineæ  $AC$  duobus in punctis occurrere possit. Perficiatur autem parallelogrammum  $ABCR$ ; atque intelligatur convertitam parallelogrammum quàm trilineum circa unum latus, putà  $BC$ .*

**M**ANIFESTUM est à parallelogrammo describi vel cylindrum, vel cylindræum cylindro æqualem; à trilineo autem solidum quoddam: atque si latus ipsum  $BC$  dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis  $H$ ,  $G$ ,  $I$ , &c. per quæ ducantur rectæ  $HO$ ,  $GP$ ,  $IQ$ , &c. ipsi  $AB$  parallelæ atque latere  $AC$  trilinei terminatæ, manifestum est quoque solidum trilinei ad cylindrum sic se habere ut omnia quadrata rectarum  $BA$ ,  $HO$ ,  $GP$ ,  $IQ$ , &c. ad trilineum pertinentium, ad quadratum  $BA$  toties sumptum. Ut autem in quâvis tali figurâ horum solidorum comparatio rectè institui possit, proderit sæpissimè hoc elementum ex doctrinâ indivisibilium annotasse.

Alterum latus rectum  $AB$  dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis  $E$ ,  $D$ ,  $F$ , &c. quæ quidem partes singulæ æquales sint singulis  $BH$ ,  $HG$ , &c. ducanturque totidem rectæ  $EL$ ,  $DM$ ,  $FN$ , &c. lateri  $BC$  parallelæ atque latere  $AC$  trilinei terminatæ, quæ quidem trilineum ipsum dividunt, constituentque intra

illud alia trilinea numero indefinita atque ad communem verticem A constituta, putà AEL, ADM, AFN, ABC, &c.

Nec est quod quis dicat rectas AB, BC longitudine posse esse incommensurabiles; atque ita non posse partes unius æquales esse partibus alterius: nam præterquam quod in divisione indefinitâ hæc objectio locum non habet; illud præterea manifestum est, posse in utrâque



partes omnes esse æquales, præter extremam quandam portionem alterius illarum; quæ quidem erit definita quædam portio, quâ additâ aut detractâ, vel additis aut detractis, quæ ab illâ dependent magnitudinibus omnino definitis, nullo modo mutatur indefinitarum ratio, ex doctrinâ indivisibilium.

Dico ergo omnia hæc trilinea in trilineo ABC constituta, simul sumpta omnium quadratorum BA, HO, GP, IQ, &c. simul sumptorum dimidiam partem constituere. Intelligatur enim ipsa omnia quadrata erecta super plano trilinei; quo pacto ex doctrinâ indivisibilium illa constituent solidum quoddam quinque figuris comprehensum, quarum prima erit ipsum trilineum;  
secunda

secunda est trilineum cujus basis ipsi rectæ AB parallela est & opposita, & vertex punctum ipsum C; tertia autem erit quadratum super rectâ BA erectum; quarta super rectâ BC erecta, erit trilineum ipsi ABC simile & æquale; quinta tandem super lineâ AC erecta, erit utcunque plana vel curva, prout ipsa AC recta erit vel curva. Intelligatur quoque planum quoddam secans planum trilinei ABC secundum rectam BC, atque ad idem inclinatum secundum angulum semirectum versum A: hoc ergo planum sic inclinatum dividet bifariam omnia & singula quadrata erecta ut supra; unde & idem planum dividet quoque bifariam solidum ex illis quadratis constans, eruntque partes duo solida instar pyramidum, singula quatuor superficiebus contenta: horum quod præcipuè nobis utile est, basim habet trilineum ABC, tres autem reliquæ superficies illius sunt, triangulum super rectâ AB erectum & dimidium quadrati constituens; figura supra lineâ AC erecta; ac figura ea quæ ex plano inclinato secante constituitur: tale autem solidum manifesto constat ex dimidiis omnium quadratorum erectorum, ex doctrinâ indivisibilium; estque vertex illius punctum extremum lateris illius quadrati, quod quidem latus ex puncto A erigitur, ipsique perpendiculariter imminet.

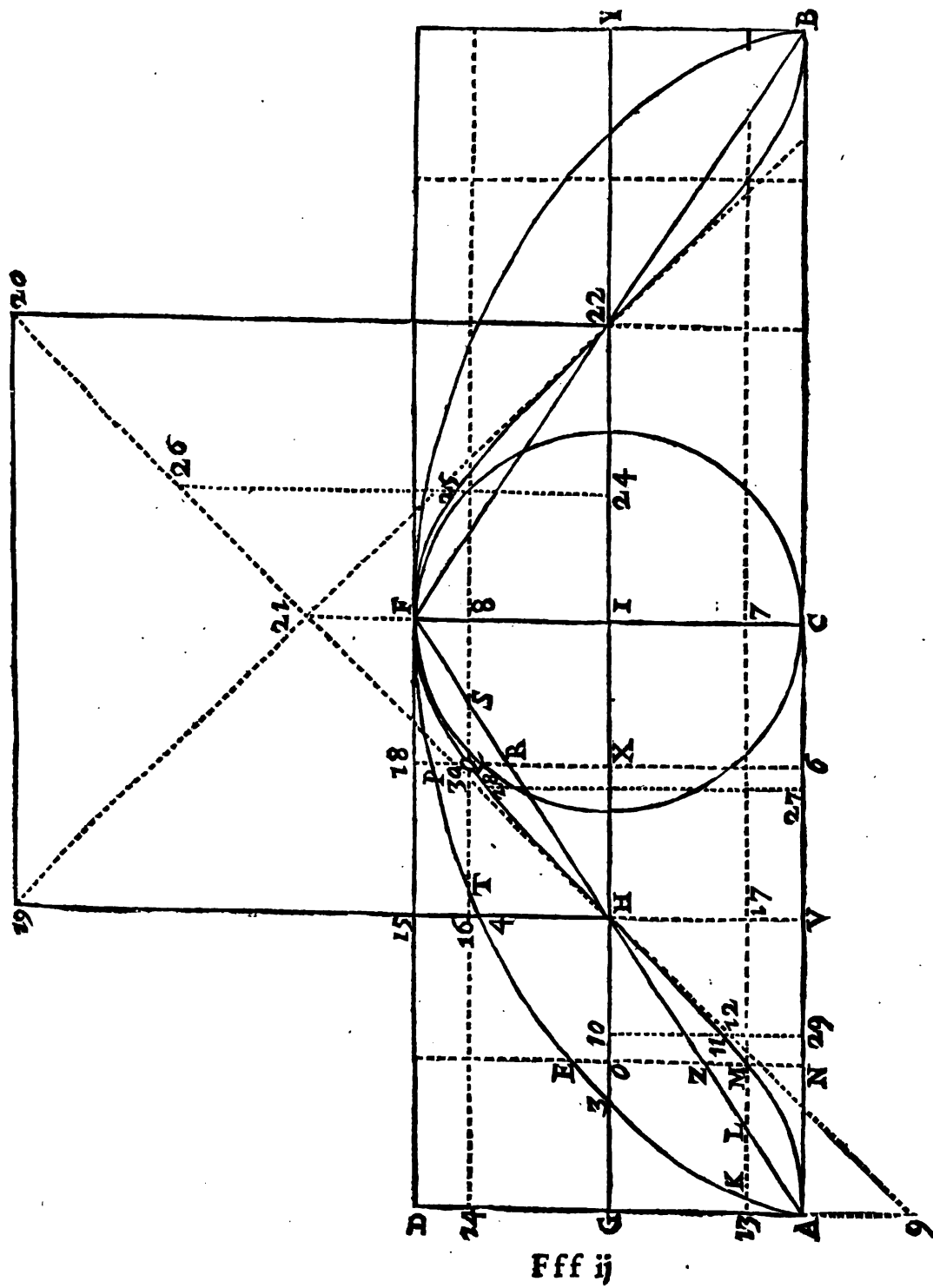
Ostendamus ergo tale solidum constare etiam ex omnibus trilineis AEL, ADM, AFN; ABC, &c. vel ex aliis his iisdem æqualibus; sic enim patebit omnia hæc trilinea dimidiis omnium quadratorum erectorum esse æqualia, quandoquidem tam ab his trilineis quam ab illis quadratorum dimidiis idem solidum constituetur, ex doctrinâ indivisibilium. Ad hoc autem altitudo talis solidi, puta recta illa quæ ex puncto A perpendiculariter ad planum ABC erecta, ad solidi verticem pertinet, estque rectæ AB æqualis, eodem modo indefinitè

dividatur quo divisa est ipsa AB, ut partes partibus multitudine & magnitudine sint æquales, atque per puncta omnia talis divisionis ducantur plana plano ABC parallela, quæ manifestò secabunt solidum propositum inter verticem & basim, & tali sectione constituent trilinea prædictis AEL, ADM, &c. singula singulis similia æqualia & parallela; ex quibus omnibus trilineis indefinite sumptis secundum doctrinam indivisibilium constituitur prædictum solidum quasi pyramidale, ut propositum est: reliqua patent.

## PROPOSITIO TERTIA.

*Nam ut ad solidum sociæ trochoidis circa axem conversæ veniamus. In figurâ trochoidis superius expositâ, intelligatur sociâ AMHQF 22 B circa axem CF conversâ. Dico solidum ex tali conversione ortum ad cylindrum cui inscribitur eandem rationem habere quam dimidium quadrati semicircumferentiæ rotæ dempto dimidio quadrati diametri, ad integrum quadratum semicircumferentiæ.*

**N**AM sicuti sociâ illa secat bifariam rectam GI in puncto H, sic eadem bifariam quoque secat rectam IY; esto in puncto 22: undè recta H 22: æqualis erit dimidio itineris centri GI, hoc est æqualis semicircumferentiæ rotæ. Super ipsâ H 22 ad partes verticis F, constituatur quadratum H 22 20 19, cujus diametri ducantur H 20, 22 19 secantes se invicem in centro quadrati, quod centrum sit 21 in axe CIF producto supra verticem F usque ad ipsum punctum 21. Patet autem diametrum ipsam quadrati H 20 esse rectam 9 H productam, ipsamque cadere extrâ curvam five sociam HQF, propter easdem rationes quibus probavimus suprâ, rectam H 9 cadere extrâ curvam HMA.



Jam utraque rectarum AC, CF in partes æquales indefinitè dividatur, & per puncta divisionis rectæ AC ducantur rectæ ipsi CF parallelæ, putà NM, VH, 6 Q, &c. usque ad sociam AMHQF; per puncta autem divisionis rectæ CF ducantur rectæ parallelæ ipsi AC, putà 7 M, IH, 8 Q, &c. usque ad eandem sociam. Quoposito solidum sociæ de quo agitur erit ad cylindrum integrum cui inscribitur, ut omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum: atqui illa omnia quadrata dupla sunt omnium trilineorum ANM, AVH, A6Q, ACF, &c. per secundam Propositionem hujus Appendicis, quare solidum illud ad cylindrum se habet ut omnia hæc trilinea bis sumpta ad quadratum CA sumptum ut jam dictum est, puta secundum numerum rectarum CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ex divisione diametri CF in partes æquales numero indefinitas, ortarum: hoc autem quadratum semicircumferentiæ toties sumptum æquale est rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes æquales in rectâ AC: quia tam ex tali quadrato CF toties sumpto quot sunt partes in rectâ CF, quàm ex rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes in rectâ AC constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempè quod basim habet rectangulum ipsum AF, altitudinem autem rectam AC; sive quod idem est, illud quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF, ex doctrinâ indivisibilium.

Itaque solidum sociæ trochoidis sic se habebit ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum AF toties sumptum quot sunt partes in rectâ AC, hoc est toties sumptum quot sunt omnia trilinea prædicta semel sumpta. Verum rectangulum AF duplum est rectanguli AI. Sumpto igitur hoc rectangulo AI bis toties, quoties rectangulum AF, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea

prædicta bis sumpta ad rectangulum AI toties bis sumptum; seu, sumptis tantum semel trilineis ac semel rectangulis, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea semel sumpta ad rectangulum AI toties sumptum. Est autem triangulum H 20 22 dimidium quadrati semicircumferentiæ H 22, & bilineum HQF 22 est dimidium quadrati diametri CF, quandoquidem hujus bilinei dimidia pars, nempe trilineum HQFI, sive ipsi æquale AMHG ostensum est supra æquale esse quadrato semidiametri AG vel CI; dempto autem hoc bilineo ex illo triangulo, remanet trilineum HF 22 20. Eò itaque res deducitur ut ostendamus omnia trilinea prædicta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habere ut trilineum HF 22 20 ad quadratum integrum H 20; sic enim demum patebit solidum sociæ trochoidis esse ad suum cylindrum, ut dimidium quadrati semicircumferentiæ dempto dimidio quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ.

Ad hoc autem assumatur quodlibet ex ipsis trilineis, puta A 29 11, assumens ex rectâ AC portionem A 29 forsan quadrante minorem, cui ex rectâ H 22 sumatur æqualis portio HX; ducaturque recta XQ 30 secans sociam trochoidis in puncto Q, rectam autem H 20 in puncto 30. Itaque ex naturâ trochoidis ejusque sociæ A 29 & HX exhibebunt arcus æquales: & arcus quidem A 29 sinus versus erit 29 11, arcus autem HX sinus rectus erit XQ: cùmque recta X 30 æqualis sit arcui HX, erit recta Q 30 differentia inter sinum rectum XQ & suum arcum X 30. Unde ex Corollario primæ Propositionis hujus Appendicis, erunt omnes sinus versus arcus HX sive A 29 ad radium toties sumptum, quot sunt divisiones in semicircumferentiâ AC, sive H 22; ut ipsa differentia Q 30 ad semicircumferentiam H 22, sive 22 20: atqui omnes sinus versus arcus A 29 constituunt tri-

lineum A 29 11, & radius AG toties sumptus quot sunt divisiones in AC constituit rectangulum AI ex doctrinâ indivisibilium. Ut ergò trilineum A 29 11 ad rectangulum AI, ita recta Q 30 ad rectam 22 20.

De reliquis trilineis eadem erit ratio; ut si sumatur trilineum AVH assumens ex rectâ AC quadrantem circumferentiæ AV; posito etiam quadrante HI cujus sinus rectus sit IF, differentia autem inter ipsum & suum arcum sit F 21; probabitur esse trilineum AVH ad rectangulum AI, ut recta F 21 ad rectam 22 20. Pariratione, si sumatur trilineum A 27 28 assumens ex AC rectam A 27 quadrante majorem, positâ rectâ H 24 æquali ipsi A 27, ductâque rectâ 24 25 26 parallelâ ipsi CF ac secante sociam quidem in puncto 25, rectam autem H 20 in puncto 26, ut recta 24 25 sit sinus rectus arcûs H 24 sive ipsi æqualis 24 26, recta autem 25 26 sit differentia ejusdem sinus & sui arcûs; probabitur esse trilineum A 27 28 ad rectangulum AI, ut recta 25 26 ad rectam 22 20; atque ita de omnibus trilineis.

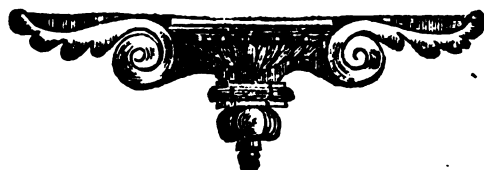
Itaque omnia trilinea simul sumpta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habent ut omnes differentiarum sinuum rectorum & suorum arcuum Q 30, F 21, 25 26, &c. ad semicircumferentiam 22 20 toties sumptam: omnes autem illarum differentiarum constituunt trilineum HF 22 20; & semicircumferentia toties sumpta constituit quadratum semicircumferentiæ, ex doctrinâ indivisibilium: unde patet Propositio.

### *Corollarium.*

**R**ECIDIT autem hæc ratio cum eâ quæ suprâ exposita est: siquidem trilineum HF 22 20 continet quadrantem totius quadrati H 20, ac prætereà duplum trilinei HQF 21, hoc est duplum trilinei HMA 9; un-

dè resumptis iis quæ ex primo solido oriuntur, putà quartâ totius parte, ac præterea eâ portione quæ ad totum cylindrum eam habet rationem quam  $\frac{2}{3}$  quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ, habebimus duos totius quadrantes, hoc est dimidiam partem totius, ac insuper duas portiones, quarum altera ad totum sic se habebit ut  $\frac{2}{3}$  quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ; reliqua autem ad totum sic se habebit ut duplum trilinei HQF 21, sive HMA9 ad idem quadratum semicircumferentiæ, ut suprâ.

Ut ergò unicâ enunciatione explicemus rationem totius solidi trochoidis circâ axem conversæ, ad suum cylindrum; sume duos quadrantes integros quadrati H 20, puta 20 21 22, & 19 21 H; tum ex tertio quadrante H 21 22 sume duplum trilinei HQF 21, hoc est totum trilineum HQF 25 22 21 H, ac præterea  $\frac{2}{3}$  quadrati semidiametri, hoc est  $\frac{2}{3}$  trilinei HQFI sive  $\frac{1}{3}$  bilinei HQF 22: tumque hæc omnia spatia simul sumpta confer cum toto quadrato H 20; atque ita satis eleganter hoc concludes. Ut se habent  $\frac{1}{4}$  quadrati semicircumferentiæ, demptâ tertiâ parte quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ; ita solidum trochoidis circa axem conversæ se habet ad suum cylindrum cui inscribitur.



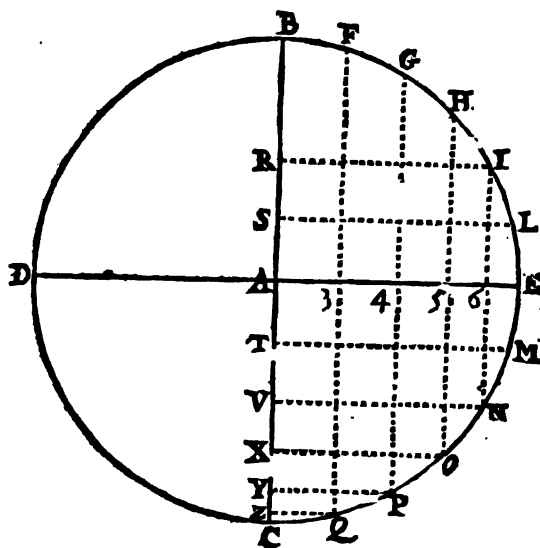
PROPOSITIO QUARTA.

*Quoniam supra in demonstrando solido trochoidis circa basim conversæ hoc tanquam verum sumpsimus, omnia quadrata omnium sinuum versorum semicircumferentia secundum æquales arcus sumptorum constituere  $\frac{3}{8}$  omnium quadratorum diametri toties sumpti: atque etiam omnia quadrata omnium sinuum rectorum semicircumferentia secundum æquales arcus sumptorum constituere  $\frac{1}{8}$  omnium quadratorum ejusdem diametri; lubet hîc utrumque assumptum unicâ demonstratione ostendere.*

**I**N figurâ primæ Propositionis hujus Appendicis, quadratum diametri BC æquale est quadratis, CZ, ZB, & duplo rectangulo CZB, sive duplo quadrato ZQ. Similiter idem quadratum BC æquale quadratis CY, YB & duplo rectangulo CYB sive duplo quadrato YP: atque ita de reliquis punctis divisionis diametri puta de punctis X, V, T, A, S, R, &c. at rectæ CZ, CY, CX, CV, &c. sunt omnes sinus versi: item rectæ ZB, YB, XB, VB, &c. sunt quoque omnes sinus versi qui prædictis singuli singulis, sed ordine converso sunt æquales; & horum quadrata singula singulis sunt æqualia; atque ita habemus duplum quadratorum omnium sinuum versorum. Sed & rectæ ZQ, YP, XO, VN, &c. per omnes arcus æquales semicircumferentiæ sunt omnes sinus recti; unde habemus duplum quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia ergo quadrata diametri æqualia sunt duplo omnium quadratorum sinuum versorum unâ cum duplo omnium quadratorum sinuum rectorum.

Ducantur jam radii AQ, AP, AO, AN, &c. Itaque quadratum radii AQ æquale est quadrato sinus recti

recti QZ unà cum quadrato AZ, sive unà cum quadrato sinus complementi Q<sub>3</sub>; similiter quadratum radii AP æquale est quadrato sinus recti PY unà cum quadrato sinus complementi P<sub>4</sub>, atque ita de reliquis: quo pacto habemus omnia quadrata radii æqualia esse omnibus quadratis sinuum rectorum unà cum omnibus quadratis sinuum complementorum. Verum omnes sinus recti omnibus sinibus complementorum singuli singulis



sunt æquales, si minores cum minoribus & majores cum majoribus conferantur, quia sumuntur secundum arcus æquales ex hypothesi: quare omnia quadrata radii æqualia sunt duplis quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia autem quadrata diametri quadrupla sunt omnium quadratorum radii; ipsa ergo omnia quadrata diametri quadrupla sunt dupli quadratorum omnium sinuum rectorum: unde omnia quadrata sinuum rectorum semel

sumpta, omnium quadratorum diametri octavam partem constituunt.

Quoniam ergo duplum omnium quadratorum sinuum rectorum constituit duas octavas partes omnium quadratorum diametri, relinquitur ut duplum quadratorum omnium sinuum versorum constituat sex octavas partes, atque ut ipsa quadrata omnium sinuum versorum semel sumpta tres octavas partes constituent ipsorum omnium diametri quadratorum, ut proponitur.

### PROPOSITIO QUINTA.

*Vide Fig. Sed & illud demonstrare lubet, quod pro solido sociæ trochoidis circa axem conversæ, priori modo demonstrando, assumptum est tanquam quid confectum ex doctrinâ indivisibilibus. Omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15.*

**I**LLUD autem statim conficitur, ex eo quod ductâ quâcunque rectâ 7 13 ex iis quæ rectæ AC parallelæ sunt, quæ secet trilinea primæ divisionis, ita ut ejus rectæ portio 7 M in uno trilineo, altera autem portio 13 M in altero contineatur; secet autem ipsa 7 13 lineam primæ divisionis AMHF in puncto M, & rectam secundæ divisionis V 15 in puncto 17: manifestum est, ex Geometriâ communi, ambo quadrata portionum 7 M, M 13 tantò majora esse dimidio quadrati totius 7 13, quantum est duplum quadrati portionis M 17, quæ ad trili-

neum secundæ divisionis AMHV pertinet : quod cùm de omnibus aliis rectis verum sit, patet Propositio.

## DE LONGITUDINE TROCHOIDIS.

### PROPOSITIO.

*Cujusunque assignatæ portioni trochoidis primariæ, æqualem rectam exhibere, atque exinde toti trochoidi.*

**Q**UID sit trochoides, quid rota ex qua illa nascitur, quæ sint tres illius præcipuæ species, & quomodo inter se distinguantur, hîc notum esse supponimus.

Utemur argumento ex motuum compositione desumpto, quo ex æquali motu puncti velocitate æquales describi lineas, ex inæquali inæquales, cæteris paribus necesse est, atque è converso.

Et si verò communiter rota progrediendo uniformi motu per iter rectum in plano, simul circa centrum suum convertatur, tamen hîc intelligemus rotam ipsam trahi tantùm recto itinere, non autem converti; sed punctum trochoidem describens, ferri secundùm circumferentiam rotæ motu uniformi, quod eodem quò suprà recidit, & Geometriæ aptius esse visum est.

F punctum contactus tam FG rectæ tangentis rotam, quàm FH tangentis trochoidem primariam, cujus dimidium est AFD, initium A, recta AIB dimidium basis, BD axis, AEC diameter rotæ initio motûs, CHD linea verticis.

IXHN rota est, cujus centrum L à principio motûs  
G g ij



per se ex ipsa figurâ satis ostenditur : præ cæteris notetur chorda IM.

† Ostendendum est portionem trochoidis AF ab initio A secundum longitudinem suam curvam mensuratam, æqualem esse quadruplo sinus versi IQ, sive duplo rectæ IT. Unde, quoniam AF est portio quæcunque dimidiæ trochoidis AFD, ostendetur ipsa curva AFD æqualis quadruplo semidiametri IL, seu duplo diametri IH. Hoc erit præcipuum hujusce Propositionis Corollarium.

Quoniam diametri rotæ ILH, AEC initio motûs congruebant, manifestum est tunc tria puncta I, A, F simul extitisse, & ambo E, L simul, & ambo C, H simul : exinde verò punctum I percurrisse rectam AI uniformi motu, sicuti & punctum L rectam EL, & punctum H rectam CH, & punctum F secundum rotæ circumferentiam percurrisse arcum IMF; quo factum est ut in trochoide primariâ quatuor illæ lineæ AI, EL, CH, & arcus IMF essent æquales : at propter implicationem recti motûs AI cum curvo IMF, punctum F tali motu composito descripsit portionem trochoidis AF, in quo ipsius F velocitas continuò mutata est augescendo sensim ab A in F. Examinemus ergò illam auctorem continuam per omnia puncta ejusdem AF; ac pro diversis positionibus puncti F, diversas ipsius velocitates in curvâ AF cum ejusdem uniformi velocitate in arcu rotæ IMF conferamus.

Incipiamus ab eâ positione quæ primum oblata est, in qua F est quodvis punctum in dimidiâ trochoide AFD ab A diversum. Patet ex motuum legibus, velocitatem puncti F in curvâ AF ad velocitatem puncti F in arcu IMF sic se habere, ut tangens FH ad tangentem FG in parallelogrammo FGHV : idem verò de singulis punctis in curvâ AF assumptis dicetur, mutatâ convenienti positione rotæ, & ductis congruis tangentibus; augetur

Ggg. iij.

autem ratio FH ad FG dum F fertur ab A in F, ergo & ipsius velocitas; & est velocitas uniformis per infinitas tangentes arcûs IMF, sicuti & ipsius puncti F in eodem arcu. Si igitur ipse idem IMF infinitè dividatur æqualiter, atque illi divisioni correspondeat infinita divisio curvæ AF (quod tamen fieri æqualiter non continget propter curvæ naturam, quod nihil interest) & singulis minoribus arcubus ipsius IMF assignentur sup̄ tangentes æquales, quibus etiam respondeant totidem tangentes curvæ AF, quanquam minimè æquales, erunt per vigesimam quartam Libri quinti Euclidis, quoties opus fuerit repetitam, omnes tangentes curvæ AF simul sumptæ ad omnes tangentes æquales arcûs IMF simul sumptas, ut omnes velocitates puncti F in curvâ AF, ad omnes velocitates ejusdem puncti F in arcu IMF: atqui ut velocitates inter se, ita sunt lineæ ab ipsis percursæ, putà curva AF & arcus IMF. Ut ergo omnes tangentes curvæ AF ad omnes tangentes arcûs IMF, sic ipsa curva AF ad ipsum arcum IMF; quod primò notetur,

Præterea quoniam recta FG tangit circulum IFH, & à contactu ducitur recta FSR ipsum circulum secans, erit per trigessimam secundam libri tertii Element. Euclidis, angulus GFR angulo FIR æqualis, & dimidius GFH dimidio FIS; unde triangula isoscelia FGH, FLI similia sunt. Ut ergo tangens FH ad tangentem FG, ita chorda IF ad radium FL; & divisis infinitè, ut sup̄rà, arcu IMF & curva AF; adjunctisque iisdem infinitis minoribus tangentibus, ducantur à puncto I totidem chordæ ad singula arcûs IMF puncta; probabimus ex Geometriâ, chordas illas omnes simul sumptas ad radium FL toties sumptum sic se habere, ut omnes tangentes curvæ AF simul ad omnes tangentes arcus IMF simul; hoc est per primum notatum, ut curva ipsa AF ad arcum ipsum IMF: quod secundò notetur,

Jam arcus IM qui ipsius IMF dimidius est, dividatur æqualiter infinitè; sed ita ut in ipso IM tot sint divisiones quot in toto IMF, hoc est quot sunt chordæ in ipso arcu IMF, sive quoties sumptus est radius FL; tum à singulis arcûs IM punctis in radium IS demittantur totidem sinus recti, quorum maximus est MQ; tot ergo sunt sinus recti ab arcu IM, quot chordæ in arcu IMF, & unusquisque sinus unius cujusque chordæ correlatæ dimidium est; unde ipsorum omnium sinuum summa dupla æqualis est summæ chordarum semel sumptæ. Erat autem ex secundo notato summa chordarum ad summam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF; ergo sinuum dictorum summa dupla se habet ad summam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF. At ut summa illa dupla sinuum ad summam illam radiorum, sic se habet duplum sinus versi IQ ad arcum IM, per Lemma ad id inventum & ad alia permulta ardua perutile; & ut duplum IQ ad arcum IM, ita quadruplum IQ ad duplum arcus IM, hoc est ad arcum IMF. Ut ergo hoc quadruplum sinûs versi IQ ad arcum IMF, ita curva AF ad eundem arcum IMF; quare hæc curva AF æqualis est quadruplo sinûs versi IQ: quod erat propositum.

*Corollarium.*

**C**OROLLARIUM manifestum est. Si enim pro trochoidis portione AF, ut suprâ, assumamus ipsam dimidiam trochoidem integram AFD, tunc rotæ diameter quæ erat IH, cum axe BOD congruet; & punctum I puncto B, & punctum H puncto D, & punctum L, puncto O, & punctum F punctis H, D, & punctum M puncto X, & punctum Q punctis seu centris L, O, & punctum T punctis seu verticibus H, D, &c. Unde arcus IMF fiet semicircumferentia rotæ IXH, & arcus

IM fiet quadrans IX, & sinus versus IQ fiet radius IL, &c.

Itaque per Propositionem, semi-trochoides AFD sinus versus IL erit quadrupla, seu diametri IH dupla; quod est Corollarium.

Hæc & multa alia, cum circa annos 1635 & 1640 vigente animi robore detexissem, & ferè omnia publice multoties patefecissem, tam in Cathedra Regia, quàm in multorum doctorum conventibus; immò & quibusslibet amicis literatis privatim, unicam hanc de longitudine trochoidis Propositionem semper reticui, sperabam enim eadem methodo (quam primus, ut puto, detexi) me multò majora detecturum, atque imprimis multas quadraturas. Nec me spes ex toto fefellit; innumeras enim adhuc teneo, non eas tamen quas præcipuè intendebam, de quibus viderint posterius quibus hæc nostra speculatio non erit forsan inutilis. Hoc tamen eos monebo, doctrinam de motuum compositione adeò universalem esse, ut nec analysi solâ coerceatur; nec adjunctâ infinitorum doctrinâ, cum rationalibus & irrationalibus, atque logarithmicis quantitatibus; quippe hæc omnia motus comprehendit, non ab ipsis comprehenditur: hinc latissimus patet exercitationibus Mathematicis campus, idemque plusquàm solidus.

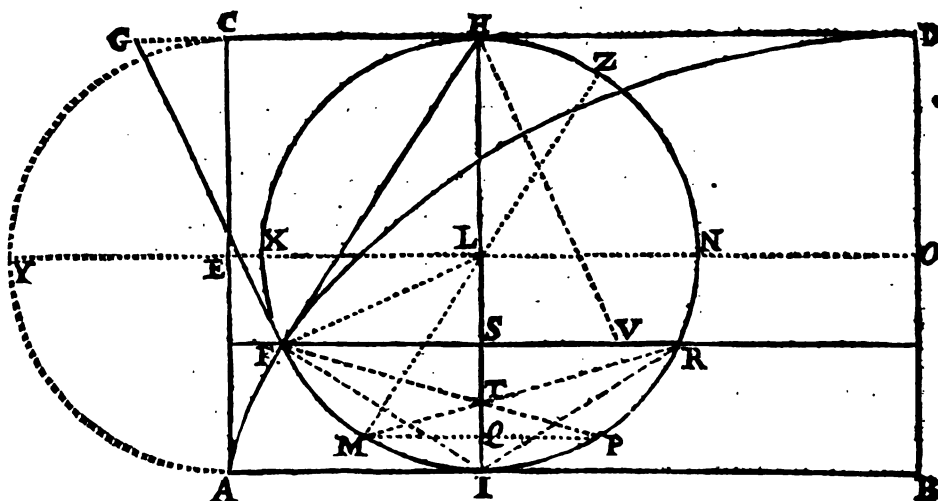
Negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum est ut quidam Extranei nationis nostræ æmuli, vel potiùs eidem invidi, ex eorum numero qui ut fuci, apum favos invadunt, & quòd elaborare non possunt mel, vi & injuriâ sibi vendicant, multa mea mihi eripere conarentur, eaque sibi tribuere. Sed & ad id adjuverunt ex Nostratibus quidam, mihi præ cæteris invidi; qui cum mihi nihil reliquum esse cuperent nec inventa mea sibi arrogare auderent, ne ridiculi apud Gallos

Gallos haberentur, ea cuilibet extraneo, (quamquam multis annis posteriori) quàm mihi suo civi & vero inventori, mallent addicere; & sic contra perfectam sibi veritatem, & verbis & scriptis impudenter mentiri.

•His artibus, ipsa trochoides, ejusque tangentes, & plana, sed & solida fermè omnia mihi erepta sunt; ac ne ad extrema fures penetrarent, solus obex obstitit, solidum circa axem, quod de industriâ cum Propositione præmissâ de longitudine reticueram. Sustinui, & expectavi donec circa ipsum solidum scdè errarent qui præcæteris sapere videri volebant, quorum ipsorum, super hac re, literas autographas etiamnum asservo, easque non unicas: tunc verò solidum ipsum vulgavi anno 1645, nostrisque atque illis extraneis patefeci, quorum (extraneorum inquam) responsum accepi mœroris atque indignationis plenum, ob errorem contra spem suam patefactum. Lætabar interim, & hæc illis subinde (arrogantiùs forsân) exprobrabam, Certè meæ quisquiliæ alicujus sunt pretii, in quas fures adeò cupidè involent, easque sibi retinere tantâ pertinaciâ contendant.

Possùm tamen cùm libuerit, mea à furibus recuperare. Habeo enim ad id instrumenta valida, scripta manu, annis & diebus suis munita à viris celeberrimis; nec deerunt testimonia prælis commissâ à quibusdam, prudentiùs quàm ego de futuro furto præsagientibus, idque multis annis ante furtum ipsum: his, dum adhuc vivo, utar, ex amicorum meorum judicio.

Redeo ad præmissam Propositionem de longitudine trochoidis, de qua nihil, nec publicò, nec privatim me communicasse jam testatus sum; eam tamen multis annis postea invenit Anglus quidam vir doctissimus, & prælo per se vel per amicos, suo nomine vulgavit. Methodus illius à nostrâ planè diversa est, sed conclusio vera & elegans. Ait enim portionem quamcunque semitro-



choidis AFD, (femicycloidem ille cum multis aliis vocat) putà portionem DF à vertice D incipientem, duplam esse tangentis HF. Hanc enuntiationem cum nostra coincidere, sic demonstramus.

Quoniam quatuor arcus FM, MI, IP, PR æquales sunt, secabunt se invicem chordæ æquales FP, RM in eodem puncto T diametri IH; & rectæ IQ, QT sunt æquales; & anguli TFI, TFS æquales; sed & angulus HFR sive HFS, æqualis est angulo HIF, quia insunt arcibus æqualibus HR, HF; ergo summa angulorum HFS, TFS, æqualis est summæ angulorum HIF, TFI; prior autem summa constituit angulum HFT, & posterior summa æqualis est angulo externo HTF in triangulo ITF; æquales sunt ergo anguli HFT, HTF; unde in triangulo HFT latera HF, HT sunt æqualia: sed HT cum IT constituunt diametrum; ergo & HF cum IT diametrum constituunt; & est IQ dimidia ipsius IT;

quare HF cum dupla IQ constituunt diametrum; & sic dupla HF cum quadrupla IQ, diametri duplum constituunt. Sed & ex Corollario, semitrochoides AFD ejusdem diametri dupla est; itaque ipsa AFD duplo tangentis HF, & quadruplo sinûs versi IQ æqualis est: demptis ergo utrinque æqualibus, hinc quidem quadruplo sinûs versi, illinc autem portione AF semitrochoidis, superest ut reliqua portio semitrochoidis FD duplo tangentis HF sit æqualis.

Potuit demonstratio directè institui per motuum compositionem, initio sumpto à vertice D, in curva DF portione quâcunque semitrochoidis; quo pacto, conclusio per se incidisset in duplum tangentis HF, ut mox dictum est. Ad hoc, ductâ diametro MLZ ipsi HF parallela, demittendi essent ab omnibus punctis arcûs rotæ HF infinites æqualiter divisi, totidem sinus recti in ipsam diametrum MLZ; & totidem tangentes ad ipsum arcum rotæ HF pertinentes; atque totidem ipsis correspondentes, pertinentesque ad curvam DF; omnino sicuti de arcu IMF, ac de curva AF superiùs dictum est, &c. adhibito tandem Lemmate, & congruis argumentis. Sed prior demonstratio prior etiam in mentem incurrit, in quâ ideò mens ipsa conquievit, quod & Propositionis, & ipsius trochoidis idem esset initium punctum A.

De longitudine trochoidum aliarum ac sociarum omnium, alias dicemus.



# EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

*A D R. P. MERSENNUM.*

**R**EVERENDE PATER,

Ex propositionibus Clarissimi Torricellii eas tantum examinandas censui, quas nonnisi ab egregio Geometrà profectas esse judicabam. Quapropter prætergressis octo primis circa sphæram, & solida eidem inscripta & circumscripta, quarum examen, quemvis vel mediocriter versatum fugere non posse existimavi, nonam aggressus sum quæ est de dimensione cochleæ, quam, ut ardua est, ita veram esse certissimâ demonstratione perspexi; ita ut ex ea unica Authorem inter præstantes hujus sæculi Mathematicos annumerare non verear. Quodque fortassis mirere nihil refert; magisne an minus inter se distent spiræ ipsius cochleæ, modo idem sit semper triangulum à quo describatur; sed & etiamsi ipsum triangulum moveatur tantum ad motum parallelogrammi, non autem motu progressivo, ita ut idem triangulum absolutâ conversione in se ipsum redeat: eodem modo seres habebit, nec mutabitur Propositio.

De centro gravitatis parabolæ inveniendò à priori, nullâ suppositâ ejus quadraturâ; si ipse sic proponit, ut se invenisse intelligat, laudamus: si verò à nobis querit, dabitur illi non solum in parabola conica, quam quadraticam appellamus, quia in ea quadrata ordina-

sim applicatarum inter se sunt, ut portiones diametri; sed etiam in parabola cubica, in quadrato quadratica, &c. atque in earum solidis; sive ipsæ parabolæ circa suos axes, sive circa tangentes ad extremitatem axis, sive circa aliquam ex ordinatis ad axem convertantur, & geniti inde solidi, sive fusi parabolici, dimidium plano ad ipsius axem erecto resectum proponatur: & multa alia de quibus, si aliquando res postulabit, fusiùs agemus. Nunc verò hoc indicasse sufficiat, in dimidio fuso parabolico quadratico centrum gravitatis axem dividere in duas portiones, quarum ea quæ ad verticem ad eam quæ ad basim se habet ut 11 ad 5; in cubico, ut 13 ad 7; in quadrato-quadratico, ut 15 ad 9; in quadrato-cubico, ut 17 ad 11; atque ita in infinitum, addendo semper 2 ad singulos præcedentis rationis terminos. Prætereo rationes solidorum ipsorum ad cylindros quibus inscribuntur, quas omnes invenimus, & quarum speculatio forsàn minimè spernenda viro clarissimo videbitur.

In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec rectè percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus. Quod si illa tanto viro placuerit, lætor. Spero autem brevi fore ut eadem in lucem emittatur, cum suis tangentibus, cumque solido ex conversione illius circa basim genito, forsàn & circa axem: neque id tantùm in prima trochoide cujus basis æqualis esse ponitur circumferentiæ rotæ genitricis; sed etiam in quavis alia trochoide sive prolata, sive contracta; atque in sociis earumdem.

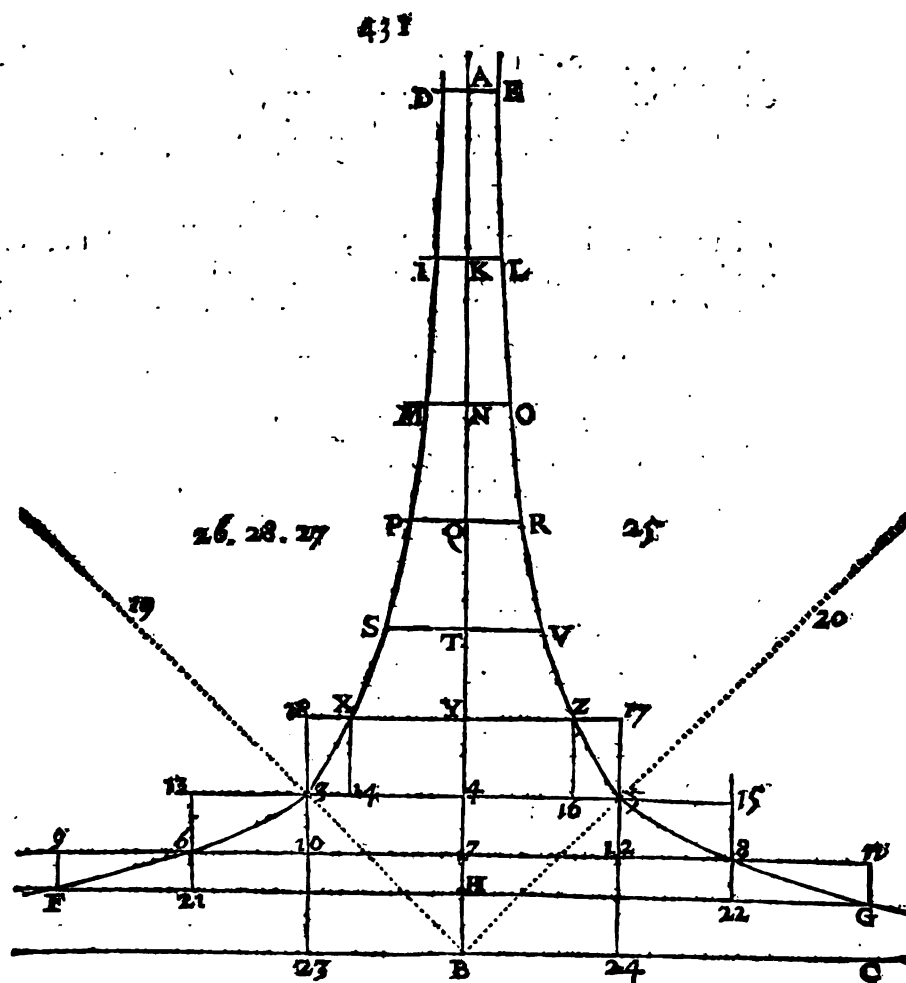
Propositio de solido à qualibet sectione coni circa axem circumvolutâ descripto, atque ad conum eisdem inscriptum unicâ enunciatione collato, elegantissima est & verissima, sicut demonstravimus: nec est inferior est ea quæ sub eadem figura habetur de centro

gravitatis ipsorum solidorum, quam etiam demonstravimus. Quod si ambas duabus tantum demonstrationibus ostenderit, nihil video quod in hac materia desiderari possit; sed vercor ne positis Authorum demonstrationibus, ipse inde propositiones suas deduxerit: quod etiam si ita esset, tamen non parum laudis mereretur; neque enim cuilibet contingit, aliorum inventis addere tanti ponderis propositiones.

Ejusdem fere argumenti est sequens Propositio de frusto sphaerico duobus planis parallelis secto, de quo nihil dicimus, quia in eo non immorati sumus.

*Vide Torricell. de solido Hyperb. pag. 313.*

Omnium elegantissima est decima quarta, cujus demonstrationem hic addere libet, cuperemque valde scire utrum in idem cum clarissimo viro medium inciderim, vel diversum. Igitur in figura cujus constructionem ex ipsius Torricellii Propositione notam esse suppono, existente B centro hyperbolæ, asymptotis BA, BC ad angulos rectos, solido autem quovis DEFG terminato, ut propositum est; primum ostendamus tale solidum medium proportionale esse inter duos cylindros ejusdem altitudinis cum solido, puta rectæ AH, quorum unius basis sit circulus DE, alterius vero FG; ex hac enim cætera demonstrabuntur. Inter BA, & BH, mediæ proportionalis sit BT; tum inter BA & BT, mediæ quoque proportionalis sit BN; atque inter BT & BH, esto B4. Item inter BA & BN, sit BK; inter BN & BT, sit BQ; inter BT & B4, sit BY; inter B4 & BH, sit B7 atque ita tot continuè inveniantur mediæ quot libuerit, sic enim erunt quoque continuè proportionales differentiæ ipsarum H7, 74, 4Y, &c. usque ad ultimam KA, & in eadem ratione primarum. Patet autem hac ratione eò deveniri posse, ut cylindrus cujus basis circulus FG, altitudo autem ultima differentia KA, minor sit quovis spatio solido dato. Jam per puncta 7, 4, Y, T, ducan-



tur plana ad rectam AB erecta, solidum secantia secundum circulos quorum diametri 68, 35, XZ, SV, &c. parallelæ ipsi FG; patet quoque ex natura hyperbolæ, proportionales esse rectas FH, 67, 34, XY, ST, & reliquas in eadem ratione, sed inversa, primarum BH, B7, B4, &c. Denique inscribantur & circumscribatur ipsi solido totidem cylindri quot sunt differentiæ, H 7, 7 4,

4 Y, &c. sintque inscripti 8 21, 5 10, Z 14, &c. circumscripti vero F 11, 6 15, 3 17, &c. constat ergo omnes circumscriptos simul superare omnes inscriptos simul, minori spatio quàm cylindro altitudinis K A, & basis FG; hoc est minori spatio quovis proposito. Præterea cylindrus basis SV, & altitudinis AH, est medius proportionalis inter cylindros ejusdem altitudinis, sed basium DE, FG. Dividatur ipse medius in cylindros ejusdem basis SV; sed altitudinum H 7, 74, 4 Y, YT, &c. usque ad ultimum altitudinis AK, qui ultimus major quidem est primo inscripto 8 21, sed minor circumscripto F, 11, quod sic ostendimus. Quoniam recta ST media proportionalis est inter DA & FH, major erit ratio circuli medii SV ad circumscriptum 6 8, quàm rectæ DA ad rectam 6 7: at idem circulus medius SV, ad circumscriptum FG minorem habebit rationem quàm eadem recta DA ad eandem 6 7; ut autem DA ad 6 7, ita H 7 ad AK: ergo circulus medius SV, ad basim quidem inscripti 6 8, majorem habet rationem; ad basim vero circumscripti FG, minorem quàm altitudo communis inscripti, & circumscripti H 7 ad altitudinem ultimi medii AK. Eodem modo demonstrabimus cylindrum altitudinis NK, basis verò circuli medii SV majorem quidem esse secundo inscripto 5 10, minorem vero secundo circumscripto 6 15; atque ita de reliquis ordine sumptis. Patet igitur tandem, totum cylindrum medium omnibus quidem inscriptis simul sumptis majorem esse; omnibus verò circumscriptis minorem. Cætera persequi apud vos inutile fuerit.

*Corollarium.*

*Corollarium.*

**P**A T E T autem manifestò positis rectis BH, B 7, B 4, BY, &c. continuè proportionalibus, & factâ constructione eâdem, dividi totum solidum hyperbolicum FG, ED in portiones continuè proportionales in eadem quidem, sed inversa ratione rectarum ipsarum BH, B 7, B 4, &c. quæ portiones erunt FG § 6, 6 8 § 3, 3 § ZX, &c. quia qui ipsis portionibus æquales erunt cylindri, proportionales erunt in ratione proposita, quæ proprietas eximia est.

Secundò intelligamus solidum hyperbolicum BA versus A infinitè productum esse, atque idem secari quovis plano 3 § ad rectam BA erecto in puncto 4, ac circum constituyente cujus diameter 3 §; tum super hac base, circulo 3 §, esto cylindrus 3 § 24 23, cujus altitudo sit B 4: dico talem cylindrum æqualem esse solido hyperbolico super basi 3 § constituto, atque infinitè versus A extenso.

Aliàs, vel cylindrus major est solido, vel minor. Esto primùm major, si fieri potest, & excessus esto magnitudo 2 §, ita ut solidum hyperbolicum unà cum spatio 2 § intelligatur æquale esse cylindro proposito 3 § 24 23. Jam intelligatur cylindrus quidam cujus altitudo B 4, semidiameter verò basis PQ, ita ut hic cylindrus minor sit spatio 2 §: sit autem PQ perpendicularis ad BA, atque interjecta inter hyperbolam, & asymptoton, hoc enim fieri potest. Tum fiat ut B 4 ad BQ, ita BQ ad BA, & terminetur solidum hyperbolicum circulo DAE. Erit ergo ex prædemonstratis solidum 3 § ED æquale cylindro altitudinis A 4, basis verò semidiametri PQ. Addantur inæqualia; solido quidem, spatium 2 §; cylindro verò, alter cylindrus altitudinis B 4, & ejusdem

basis semidiametri PQ. Fient ergo inæqualia : illinc solidum hyperbolicum  $3 \ 5 \ ED$ , unà cum spatio  $2 \ 5$ , majus; hinc verò, totus cylindrus altitudinis AB basis semidiametri PQ, minor. At totus hinc cylindrus æqualis est cylindro proposito  $3 \ 5 \ 24 \ 23$ , quia bases & altitudines reciprocantur ex natura hyperbolæ : ergo solidum hyperbolicum  $3 \ 5 \ ED$ , unà cum spatio  $2 \ 5$ , majus esset cylindro  $3 \ 5 \ 24 \ 23$ . Verùm solidum hyperbolicum infinitè extensum versus A, unà cum eodem spatio  $2 \ 5$ , positum est æquale eidem cylindro  $3 \ 5 \ 24 \ 23$  : hoc ergo infinitè extensum minus esset sua portione  $3 \ 5 \ ED$ , quod est absurdum. Esto secundo cylindrus  $5 \ 23$  minor solido hyperbolico infinitè extenso, si fieri potest : poterit ergo ex ipso solido detrahi portio quædam, puta  $5 \ ED$  major eodem cylindro  $5 \ 23$  ; ita ut planum DE, parallelum sit plano  $3 \ 5$ , constituatque circulum cujus centrum A. Inveniatur recta BQ media proportionalis inter BA & B4; seceturque solidum hyperbolicum plano PQR parallelo ipsi  $3 \ 5$ . Jam ut suprà, solidum  $3 \ 5 \ ED$  æquale est cylindro basis PQR, altitudinis verò A4 : cylindrus verò  $5 \ 23$  æqualis est cylindro ejusdem basis PQR, altitudinis verò AB : ponitur autem solidum  $3 \ 5 \ ED$  majus cylindro  $5 \ 23$  ; ergo cylindrus basis PQR altitudinis A4 major esset cylindro ejusdem basis & altitudinis AB, quod est absurdum.

Tandem proposito quovis solido hyperbolico ex prædictis, putà DEGF : oporteat ipsum dividere in duas portiones quæ datam servent rationem, ut magnitudo data 26 ad datam magnitudinem 27 : fiat ut recta FH ad rectam DA, ita magnitudo 26 ad aliam quampiam 28; dividaturque recta AH altitudo solidi in puncto T, ita ut portiones HT, TA eandem habeant rationem quàm magnitudo 28, ad magnitudinem 27 : & per punctum T ducatur planum STV parallelum plano FG vel

DE, quod quidem planum STV dividat solidum hyperbolicum in duas portiones FGVS, & SVED : dico has portiones eandem inter se rationem habere, quàm magnitudo 26 ad magnitudinem 27. Nam inter BT & BH media sit proportionalis B4 : item inter BT & BA media sit proportionalis BN; & per puncta 4, N ducantur plana prædictis parallela, atque solidum secantia secundum circulos quorum diametri 3 4 5, MNO. Quoniam ergo continuè sunt proportionales BH, B4, BT, erunt quoque proportionales in eadem sed inversa ratione rectæ FH, 3 4, ST propter hyperbolam : quare ex prædemonstratis, cylindrus altitudinis HT, basis verò diametri 3 5 æqualis est portioni solidi hyperbolici FGVS. Simili argumento cylindrus altitudinis TA, basis autem diametri MO, æqualis est reliquæ portioni SVED : sunt autem ipsi cylindri in ratione data magnitudinis 26 ad 27, ut jam demonstrabimus; quare & portiones solidi hyperbolici sunt in eadem ratione datâ.

Et quidem, quod cylindri sint in ratione data magnitudinis 26 ad magnitudinem 27, sic constabit. Quoniam ex constructione, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita recta FH ad rectam DA : ut autem FH ad DA, ita sumpta communi altitudine recta ST, rectangulum sub FH, ST ad rectangulum sub DA, ST, hoc est, ita quadratum 3 4 ad quadratum MN; sive circulus diametri 3 5 ad circulum diametri MO. Ergo, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita circulus diametri 3 5, ad circulum diametri MO. Addatur hinc quidem ratio altitudinis HT ad altitudinem TA; illinc autem ratio magnitudinis 28 ad magnitudinem 27, quæ rationes sunt eædem; ex constructione igitur, ratio composita ex rationibus circuli 3 5 ad circulum MO, & altitudinis HT ad altitudinem TA, hoc est ratio cylindrorum, componitur ex rationibus magnitudinis 26 ad magnitudinem 28,

& 28 ad 27; quæ ambæ rationes constituunt rationem 26 ad 27, ut propositum est.

Hic mirabilis quædam proprietas accidit circa plana spatia hyperbolica hujus constructionis, illa nempe FG 86, 68 5 3, 3 5 ZX, XZVS, &c. quæ omnia sunt æqualia, positis continuè proportionalibus rectis BH, B7, B4, BY, &c. ut supra cujus quidem proprietatis demonstratio non erit difficilis eique animadverterit omnia parallelogramma iisdem spatiis inscripta, esse æqualia; sicuti & circumscripta æqualia.

Tandem si asymptoti hyperbolæ non sint ad angulum rectum, vel eadem erunt ex se demonstrationes omnes præcedentes; vel additione, aut detractiōe conorum quorundam, fient eadem.

Cæterum, REVERENDE PATER, hoc scias velim, me magnificere adco Excellentem Virum, etiam ultra quàm verbis aut litteris exprimere possim. Fac etiam, obsecro, ut ipse innotescat nostris Geometris; præsertim D. D. *De Fermat*, & *Desiartes*, quorum utrumque, meo quidem judicio, nec ipsi Archimedi jure quis postposuerit; hoc enim apud me recipio, fore ut & his & illi gratissimum quid facturus sis.

CLARISSIMO VIRO ROBERVALLIO

EVANGELISTA TORRICELLIUS S. P.

**L**OQUAR apertè tecum sine alio interprete, VIR CLARISSIME, quis enim dissimulare possit? Et quanquam litteræ tuæ ad Clarissimum Mersennum missæ sint, cohibere tamen non possum animi mei impetum, quin ad te currat, tibi que totum se dedicet tanquam

Epollini Geometrarum. Fortunatas certè jam existimare debeo nugas meas, atque illas non jam ampliùs nihilificare, quandoquidem dignæ habitæ sunt, quæ iudicium tuum subirent, & animadversionibus tuis nobilitarentur. Principio, ex me quæris an centrorum gravitatis parabolæ à priori, ut inventum à me proponatur, aut quærat ut ignotum: erubescerem certè ignotum theorema inter alias propositiunculas meas à me demonstratas collocare. Ostendimus illud unicâ, brevique demonstratione; sed eâ occasione admiratus sum fecunditatem ingenii tui circa tot parabolas atque earum solida, non solùm Geometricè, sed etiam Mechanicè considerata, & ad mensuram scientiamque redacta. De his nihil ego habeo quod proferam, & fortasse non habebo; siquidem difficillimæ, nisi fallor, contemplationis censeo huiusmodi theoremata. Præterea immorari non soleo circa figuras non vulgatas, & circa solida quæ si nova sint, saltem ab antiquis & receptis figuris planis ortum non habeant; atque hoc eâ præcipuè ratione, ut laborum fructus, quando res ex animi voto succedet, communem litteratorum applausum foriatur, neque sit qui invidet figuras à me ipso fabricatas. Mensura cycloidis, (hoc enim nomine Clarissimus Galilæus appellavit 45 jam ab hinc annis figuram quæ fortasse tibi nunc trochois est) mihi sese ultrò obtulit non speranti, penè dixi non quærenti. Illam deinde quinque diversis semper principiis demonstravi. Quoad solida nihil habeo: tangentem prædictæ lineæ jam ostenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clarissimi Galilæi alumnus, etiam nunc adolescens. Quoad auctorem hujus figuræ, credo ego ingenium tuum acutissimum & feracissimum, illam ex se observare potuisse nemine indicante; huiusmodi enim lineæ natura familiaris erat, constatque ex compositione duorum

motuum, recti & circularis. Attamen vivunt adhuc testes quibus olim Galilæus irritas lucubrationes suas communicavit circa hanc figuram; imò supersunt paginæ aliquot clarissimi Mathematici, in quibus & picturas & aggressiones suas nonnullas circa hoc subjectum jam adolescens delineaverat. Pluribus abhinc annis theorema hoc proposuit ille mirabili Geometræ Cavalerio nostro, ipsique dixit idem quod & mihi, & pluribus aliis confirmavit, nempe se olim experimentum fecisse, appensis ad libellam spatiis figurarum materialibus, quantuplum esset cycloidalis spatium ad circulum suum genitorem, & semper illud invenisse, nescio quo fato minus quàm triplum; ideo incœptam contemplationem deferuisse, ob incommensurabilitatis suspicionem. Quod si aliquando, inconstanti fallaciâ, reperisset minus quàm triplum, aliquando verò majus, tunc asserebat Lincæus Mathematicus ulteriorem contemplationem profecturum fuisse; rejectâ scilicet variationis causâ in materiæ inæqualitatem atque rasuræ.

Propositionem illam de solido à qualibet coni sectione circa axem revoluta descripto, atque de ejusdem solidi centro gravitatis, unicâ simul brevique demonstratione ostendimus, suppositâ tantum modicâ Apollonii cognitione. Verùm duplex hoc theorema inter neglecta à me rejicitur; nullum enim habebit locum in opusculis, quæ nunc propalare cogor, in quibus præcipuè profiteor materiæ unitatem.

Quoad solidum hyperbolicum, jam non meum sed tuum, dispeream si jam ampliùs spero me visurum tam sublimem & tam doctam demonstrationem quæ cum tua conferri mereatur. Optimum equidem maximumque nunc percipio laborum meorum fructum, eo tantum nomine, quod tu, Vir Clarissime atque Ingeniosissime, tam acutis demonstrationibus, tantâque doctrinæ affluen-

tiâ , unicam ineptiolam meam illustrare dignatus sis, Gratias primùm ago maximas. Deinde ut desiderio tuo satisfaciam, methodus mea circa demonstrationem hujus solidi diversissima est à tuâ. Altera quidem ex meis aggressionibus per doctrinam indivisibilium procedit, quæ si cum erudito lectore semper ageretur, paucissimis verbis expediri posset : altera verò per inscriptionem & circumscriptionem, more Veterum, non adeo expedita est, sed facilis, & fortasse curiosa. Hoc unum reperi in tua scriptura, quod conveniat cum meis, nempe constructio illa pro secundo frusto solidi hyperbolici in data ratione; demonstrationes verò ab eadem constructione dissimillimæ emanant.

Cæterùm evidentiores agnosco hyperbolas in laudibus quibus me exornas, quàm in demonstrationibus quibus hyperbolicum solidum ipse metiris. Utinam illis aliquando dignus fiam, ut in lectione operum tuorum, quæ avidissimus expecto, illa intelligere valeam, fructusque scientiæ suavissimos, & divitias ingenii inæstimabiles inde colligere possim, & intellectum meum ditare. Vale VIR CLARISSIME, tuorumque Operum, editionem accelera, in publica litteratorum omnium utilitatem.

Florentiæ Kal. Octob. 1643.

## EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

VIR CLARISSIME,

Si me unum respicerem ; si nullâ existimationis nostræ, si nullâ cæterorum hominum, si nullâ ipsius, quam præ cæteris diligo, veritatis habitâ ratione, internâ animi tranquillitate conquiescerem: non me moveret profectò, quòd vos Deûm atque hominum fidem invocetis, quòd celeberrimorum hominum testimonium in me adducere conemini, quòd denique nullum non moveatis lapidem, ad hoc ut ego meorum ipsius operum plagiarius habear: quippe qui planè mihi conscius sum, ex iis quæ ad vos scripsi, nihil non verum esse; sed fateor ingenuè; longè absum à præstanti illo vitæ philosophicæ statu, tantamque beatitudinem si optare nobis licet, non etiam sperare statim licet. Ego enim inter multos natus, inter multos educatus, cum multis vivere atque conversari assuetus, cum multis etiam necessitudines contraxi; ita ut rebus externis non moveri huc usque nondùm didicerim. Itaque admonet nos existimatio nostra, quam tueri, quamque, si quo id labore liceat aut impendio, promovere tenemur; postulant amici, collegæ, Mathematici Galliarum præstantissimi, quibus omnia me debere fateor; cogit ipsa cui totum me dicavi veritas: ne tam gravem vestram accusatio-

nem

nēm prorsus negligam, præsertim quam nullius negotiū fuerit refellere; cū præter rationes nostras, quæ per se sufficiunt, iisdem ambo testibus utamur. Erit etiam quod de vobis expostulem, & ut spero non injuriâ, qui cū festucam in nostris oculis quærat, trabem in vestris non animadvertatis. Nolim tamen ob id tolli inter nos litterarum commercium; quod vos nimium rigidè, meo quidem judicio, quasi aliquid nobis timendum minati estis: quin potius optarim tales iras, suavissimi commercii redintegrationem esse. Quod si inter nos, per nos ipsos conveniri non potest, judicent amici: nos judicio ipsorum stare promittamus. Ad rem venio.

De propositione Rotæ atque Trochoidum illius, primum audiui Parisiis anno 1628. (eo enim demum anno ab expeditione Rupellana reversus, statui in maxima illa atque omni studiorum genere excultissima urbe, firmas sedes stabilire; cū antea vagus, incertis sedibus, diversis in regni Gallici partibus degissem) asseruitque qui proponebat celeberrimus vir Pater Merfennus, talem quæstionem per multos jam annos à pluribus tentatam, eousque insolutam permanisse: cui ego respondi, hoc ei commune esse cum multis aliis vetustissimis nobilissimisque Propositionibus; neque ideo quicquam in illa magis quàm in his mirandum videri, si unà cum illis solutione careret. Ac tunc ipse, cū difficillimam existimarem, certè supra vires meas, intactam ita dimisi, ut per sex annos de illa ne quidem somniarim. Atque ut verum fatear, ego tunc annum agens vigesimum septimum, etiamsi continuo decennii antea acti exercitio, discendo, docendoque, atque agendo in rebus Mathematicis, in primis verò in Analyticis, quibus etiamnum maximè delector, non mediocriter profecissem; tamen neque cum adhuc habitum mihi comparaveram, neque eas ingenii vires susceperam,

quæ ad ejusmodi quæstiones sufficerent. Interea, cùm mecum ipse sæpius cogitarem, quâ potissimum ratione possem in suavissimæ Matheseos adita penetrare, statui divinum Archimedem, quem ferè unum inter antiquos Geometras suspicio, attentius considerare; ex qua consideratione sublimem illam & numquam satis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi: sic enim tunc vocabam eam quæ à Clarissimo Cavallerio vocatur doctrina indivisibilium. Ridebis forsan; &, Hic ergo Gal-  
 lus, inquires, non solùm trochoidum dimensionem ante nos, si Diis placet; non solùm parabolarum omnium, non solum solidorum ad has & illas pertinentium, non solùm planorum ab helicibus cujuscunque gradus aut dignitatis compræhensorum, non solum earumdem helicum secundùm longitudinem cum prædictis parabolis comparationem, non solùm curvarum omnium tangentes per motuum compositionem, non solùm doctrinam centrorum gravitatis invenerit, sed & præstantissimi nostri Cavallerii indivisibilia quoque? atque illa omnia nobis; hæc illi, plagiarius ille impunè eripuerit? Verumtamen, rideatis licet, & talia, aut iis pejora de nobis putetis, aut vociferemini, Ego trochoides, parabolas, helices, tangentes, & centra ante vos; imò & multò plura non solùm inveni, sed & vulgavi: an vultis ut verum reticeam quod partes nostras adjuvat, falsum autem proferam quod nobis nociturum sit? nos ætate aut tempore saltem priores, ætatis aut temporis beneficia respuemus, & junioribus aut saltem tempore posterioribus, vivi adhuc relinquemus? Apage stultam illam in nosmetipsos injustitiam. Quòd si cuncta ego unicâ epistolâ quam ad vos scripsi, non enumeravi, nihil mirum; illa enim aliunde satis prolixa extitit, nec id necessarium, aut operæ pretium judicavi. Deinde etiam; quid de paucis aliquot propositionibus enumeratis gloriari attinet?

*Pauperis est numerare pecus.*

Sed de vobis plura postea : nunc de Indivisibilibus , quoniam illa ad rem faciunt , dicamus. Illa ergo , an ante nos Clarissimus Cavallerius invenerit , nescio : certè illud scio , me integro quinquennio antequam in lucem emiserit , eâ doctrinâ usum fuisse in solvendis multis , iisque planè arduis propositionibus. Attamen , abstinere moveri ; ego tanto viro , tantæ ac tam sublimis doctrinæ inventionem non eripiam ; nec possum ; nec si possum , faciam. Ille prior vulgavit : ille , hoc jure , suam fecit : ille , hoc jure , habeat atque possideat : ille tandem , hoc jure , inventoris nomine gaudeat. Absit ut in posterum , quod nec prius feci , in tali causa , intercessoris ridiculi provinciam mihi suscipiam ; præsertim cum nequidem inter amicos quicquam unquam de tali doctrina vulgaverim , quam neque publici juris facere , nisi post aliquot annos , juvenili quodam mei ipsius amore , decreveram. Quippe sperabam interim , fore ut solutione questionum quas quotidie nullo negotio tali instrumento adjutus vulgabam , doctrinæ famam facile consequerer : neque sanè hæc spes ex toto me fefellit. Postquam enim ingenti ardore doctrinam ipsam excoluissem , eandemque ad puncta , ad lineas , ad superficies , ad angulos , ad solida præcipuè ; postremò etiam ad numeros extendissem , haud fuit difficile ea exequi propter quæ amici lætarentur , invidi disrumperentur. Exultabam ergo nimium juveniliter , ac tanto diligentius doctrinam ipsam reticebam ; dignus planè in quem Poëta dixerit ,

*Nec ferre videt sua gaudia ventos ;*

qui detectâ auri fodinâ ditissimâ , dum grana quædam ex ea decerpta ostento , ut ex divitibus ac beatis qui-

dam habear; interim alius eandem à se quoque detestam, palàm, plaudentibus omnibus, ostendit, ac publici juris facit; ita ut exinde periculum sit ne ridear; si à me quoque inventam fuisse affirmavero. Est tamen inter Clarissimi Cavallerii methodum & nostram, exigua quædam differentia. Ille enim cujusvis superficiei indivisibilia secundum infinitas lineas; solidi autem indivisibilia secundum infinitas superficies considerat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique; sed & quidam ex superbis illis sciolis qui soli docti haberi volunt, quique si nihil aliud, certè hoc unum satis habent, ut in magnorum Virorum opera insurgant, quòd à se minimè profecta esse invideant, occasionem carpendi Cavallerii arripuerunt, tanquam si ille aut superficies ex lineis, aut solida ex superficiebus reverà constare vellet. Quamquam autem illi coram eruditis nihil aliud lucrentur quàm ignorantiz aut invidiz titulum, tamen iidem coram imperitis, suâ authoritate, de doctorum famâ non mediocriter detrahunt; nec ab iis illæsus evasit Cavalerius. Nostra autem methodus, si non omnia, certò hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita nostra seu indivisibilia sic consideramus, Lineam quidem tanquam si ex infinitis seu indefinitis numero lineis constet, superficiem ex infinitis seu indefinitis numero superficiebus, solidum ex solidis, angulum ex angulis, numerum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concipimus, atque ita de altioribus; singula enim suas habent utilitates. Dum autem speciem aliquam in sua infinita resolvimus, æqualitatem quandam, vel certè notam aliquam progressionem inter partium altitudines aut lätitudines ferè semper observamus. Sed de hoc satis superque: nunc ad vos redeo. Cùm itaque ope indivisibilium multa protulissem, tandem anno 1634-

celeberrimus P. Mersennus trochoidem in memoriam revocavit, non sine gravi expostulatione quasi propositionem haud quaquam ignobilem, de industriâ præterire difficultate illius perterritus. Ego sic castigatus cœpi sedulo ipsam inspicere; ac tunc quidem, quæ absque indivisibilibus difficillima visa erat, ipsis opitulantibus, nullo negotio patuit. Modus autem noster ab aliis omnibus quos huc usque videre contigit, longè diversus est; & nisi me nimium amo, idem illis omnibus longè antecellit; quia omnium simplicissimus, brevissimus, universalissimus, & ad solida detegenda aptissimus existat, ut sponte à natura productus, cæteri per vim ab arte effecti videantur. Habes annum quo trochoidem invenimus; diem etiam si ita expediret adjicerem. Cætera jam ad te scripsi, & horum omnium testem locupletissimum ( præterquam plurimos alios, quorum epistolas de hac re etiamnum apud me asservo ) ipsum eundem habeo quem laudas, celeberrimum P. Mersennum. Vide ergo num sit cur doleam, cum vos per exprobrationem objicitis propositionem illam forsan ante obitum Galilæi nondum fuisse inventam, qui tamen vixit usque ad annum 1642. præcipuè, cum jam ad vos scripserim me anno duodecimo jam elapso invenisse. Ut sic mihi tot testes haberetis, & cui una sufficere debuit veritas, fidem omnem denegatis. Inventâ infiniti doctrinâ ( liceat adhuc eo nomine uti in hac epistola; posthac, absit ) eaque, pro tempore satis probè excultâ; ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primum, vi Analyseos, methodum quandam reperi, quæ, etiamsi longè postea universalis esse deprehensa sit, tamen recens inventa, talis non apparuit: quærebam verò universalem; & particulares methodos ( ut adhuc ) ubique dedignabar. At trochoides nostræ occasionem dederunt cur ad motuum compositionem respicerem. Occasio satis fuit, ac propo-

fitionem universalem tangentium inde deductam vulgavi-  
 vimus circa annum 1636. Extant adhuc, & circumfe-  
 runtur hac de re lectiones nostræ à nobilissimo *du Verdu*  
 nostro discipulo collectæ, atque à multis exscriptæ. Ita-  
 que jamdudum fide publicâ nobis asserta est talis do-  
 ctrina, nec aliî testes quærendi, qui omnes habeamus.  
 Circa hæc tempora nempe anno 1635, mediante am-  
 plissimo senatore Domino *de Carcany*, cœpi per Episto-  
 las commercium litterarum habere cum amplissimo se-  
 natore Tholosano Domino *De Fermat*, de quo quid sen-  
 tiam habes in ea Epistola quam ad R. P. Mersennum  
 direxi super solido vestro hyperbolico infinito. Is ergo  
 vir præstantissimus, primus omnium, duas propositiones  
 nobilissimas ad nos misit sine demonstratione: alteram  
 de parabolis, alteram de planis helicum, utrisque per  
 omnes dignitatum gradus sumptis. (Ne ergo dubites  
 ampliùs, quis primus tales quæstiones proposuerit; illæ  
 meæ non sunt; quanquam illas ego proprio Marte, in-  
 ventâ ad id peculiari nostrâ methodo, demonstraverim)  
 immò universalius multò quàm ipse proponas: quippe  
 non solùm potestates in helicibus proposuit, sed etiam  
 potestatum radices. Exempli gratiâ: Si in helice semi-  
 diametri omnium revolutionum ordine sumptarum, se  
 habeant ut radices quadratæ, aut cubicæ, &c. nume-  
 rorum ordine naturali progredientium 1, 2, 3, 4, 5, 6,  
 7, 8, &c. quarum primam (quadraticam putâ) reperies  
 in prima revolutione dimidiam partem sui circuli con-  
 stituere. Cùmque ipsum arduarum (ut tunc) propo-  
 sitionum demonstrationes rogarem, ille in hæc verba  
 rescripsit, *Ego, inquit, ut invenirem laboravi; labora-  
 & ipse: in hoc enim labore præcipuam voluptatis par-  
 tem consistere deprehendes.* Quid facerem à tanto viro  
 incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita nostra  
 advocavi; (nondum enim tunc nostra ampliùs non esse

resciveram ) eaque tum primùm ad numeros extendi. Animadverti enim & parabolarum plana , ad sua parallelogramma ; & earundem solida , ad suos cylindros ; & spatia helicum , ad suos circulos feliciter comparari posse , si innotesceret in numeris ratio summæ potestatum omnium ejusdem generis , ordine , atque indefinitè sumptarum , ad earum maximam toties sumptam ; idque in omni genere potestatum. Quod quidem non difficulter assecutus sum. Illicò idem patuit summam omnium numerorum quadratorum , ordine naturali atque indefinitè sumptorum 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , &c. ad eorum maximum toties sumptum quot sunt illi quadrati ; hoc est ad cubum ejusdem radices cum maximo illo quadrato collatam , se habere ut 1 ad 3 , sive constituere  $\frac{1}{3}$  ; summam cuborum eodem modo sumptorum , ad eorum maximum toties sumptum , sive ad quadrato-quadratum ejusdem radices cum maximo cubo , se habere ut 1 ad 4 , sive constituere  $\frac{1}{4}$  ; summam quadrato-quadratorum , eodem modo constituere  $\frac{1}{5}$  ; atque ita in infinitum. Ex hac propositione quæ sola sufficit , innumera deduxi corollaria , qualia sunt hæc : Summa radicum quadratarum numerorum omnium , ordine naturali , atque indefinitè sumptorum , ad earundem radicum maximam toties sumptam , collata ; putà summa radicum quadratarum horum numerorum 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , &c. eam habet rationem quam 2 ad 3 ; summa radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum , ordine naturali , atque indefinitè sumptorum , ad earundem radicum maximam toties sumptam , se habet ut 2 ad 4 ; summa radicum quadratarum omnium numerorum cuborum , ad maximam toties sumptam , ut suprà , se habet ut 2 ad 5 ; atque ita in infinitum , radices quadratæ numerorum quadrato-quadratorum , quadrato-cuborum , cubo-cuborum , &c. ad earum maximam toties sumptam , ut suprà , sic

comparabuntur, ut antecedens rationis sit semper 2 exponens quadrati; consequens verò sit summa ex ipso exponente 2 & alio exponente ipsius gradus ad quem pertinent numeri quorum sumuntur radices quadratae. Ut si sumantur radices quadratae numerorum quadrato-quadrato-cuborum qui sunt septimi gradus cujus exponentens est 7, erit consequens rationis 9, conflatum ex 2 & 7, & ratio erit ut 2 ad 9. Similiter, summa omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc est in primo gradu, atque indefinite sumptorum, ad earundem radicum maximam toties sumptam, se habet ut 3 exponens cubi, ad 4 compositum ex eodem 3 & 1 exponente primi gradus; summa omnium radicum cubicarum omnium quadratorum, ad earundem radicum maximam toties sumptam ut supra, se habet ut 3 ad 5; atque ita in infinitum, radices cubicae omnium graduum, ad earundem maximam sumptam ut supra, comparabuntur; eritque in omnibus antecedens 3, consequens verò componetur ex eodem 3 juncto cum exponente gradus cujus radix cubica sumpta fuerit. Nec aliter radices quadrato-quadratae omnium graduum, ad earum maximam sumptam ut dictum est, comparabuntur, eritque antecedens 4; & sic in infinitum infinities, ut satis ex praedictis patet. Hæc cum ad amplissimum virum scripsissem, dubitavit num eorum demonstrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi eam esse facillimam, per duplicem positionem more Veterum, incipiendo ab unitate, & procedendo ordine per omnes potestates. Quo pacto, facile est concludere in quadratis, exempli gratiâ, summam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, sed finite, sumptorum, ad eorundem maximum toties sumptum, collatam, majorem esse quàm  $\frac{1}{3}$ ; at dempto ab eadem summa, seu ab antecedente rationis, ipsorum quadrato-

torum

torum maximo tantum, remanente integro consequente, reliqui rationem minorem quam  $\frac{1}{3}$ . Nec ad id demonstrandum, aliò recurrendum est quam ad genesim quadratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus componatur ex proximo quadrato minore, ex duplo radice ejusdem minoris, atque ex unitate; quemadmodum etiam quivis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore, ex triplo quadrati minoris, ex triplo radice minoris, atque ex unitate. Qui quidem cubus est ipsum maximum quadratum toties sumptum quot sunt numeri quadrati ab unitate incipientes, atque ita de singulis potestatibus, secundum uniuscujusque genesim. Corollaria, quomodo ab iis deducantur, aliàs, si ita expediat, explicabimus. Neque etiam fortassis spernendum videbitur corollarium aliud quod ex tali numerorum inspectione deduxi: illud autem tale est. Propositis quotcunque numeris multitudine finitis, qui ab unitate, secundum naturalem numerorum seriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. usque ad 1000000000 exempli gratiâ; exhibere summam quadratorum, aut cuborum, aut quadrato-quadratorum, aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum, &c. omnium talium numerorum: quæ sanè regula, pro quadratis, & cubis, reperitur specialis apud Authores; at pro omnibus potestatibus, nullam apud illos reperimus universalem. Hæc ergo fuit nostra pro parabolæ planis ac solidis, simulque pro planis helicis, methodus. Post hæc proposuit vir amplissimus (quod & ipse jamdiu in omnibus figuris universaliter quærebat) prædictarum figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem ad analysim recurrit, nos ad nostra infinita; unde methodus illius, ut plerisque inventis analyticis accedit, abstrusissima est, subtilissima, atque elegantissima: nostra aliquot mensibus posterior, simplicior evasit, & universalior; quò fit ut cæteris collata, magis nobis arri-

deat. Ut tamen alicui possit esse universalis, debet is omnibus numeris absolutus esse Geometra, qualis huc usque nullus apparuit. Quoniam verò hoc nostræ hujusce dissertationis præcipuum caput est, ac vos non oblique aut occultè, sed directè & apertè innuistis methodum nostram, quam tamen huc usque nondum vidistis, illius quam circa finem anni 1644. ad R. P. Mersennum à vobis missam legimus, esse inversam, ac proinde nostram à vestra fuisse desumptam; quo posito tanquam vero, adeo indignamini, ut tres maximas epistolas ad amplissimos celeberrimosque viros, adjectis etiam ad id magnis Appendicibus, gravissimis querelis impleveritis; quòd nos nihil tale meritos, acerbissimâ plagiarii contumeliâ afficeretis: idcirco & locus & res postulat, ut tam atrocem injuriam, quandoquidem & licet & facilè possumus, à nobis propellamus. Ad hoc autem satis superque futurum speravi, si nostram illam methodum ad vos cum demonstratione mitterem; non quidem suis omnibus numeris absolutam, nimis enim longa est, sed sic digestam, ut à vobis, aliisque non vulgaribus Geometris nullo negotio intelligatur; præcipuè ab iis qui indivisibilia non oderint: alios enim nihil moror, & Geometrarum nomine indignos puto, qui viâ apertâ, tutâ, atque facili relictâ, longuos ac difficiles anfractus sequi malint. Hoc pacto, cum illa nostra à vestra planè diversa sit, ac diversis omninò fundamentis innitatur, non erit ampliùs quòd vobis ereptam conqueri jure possitis. Eam ergo seorsim cum suis figuris conscripsimus, ne hujus epistolæ lectionem interturbaret.

Facile autem erit animadvertere methodum illam eodem modo quo proposita est, universalem quidem esse absolute Geometræ, attamen eandem à priori rarò procedere (universalem autem à priori invenire, hoc est ex sola figuræ aut lineæ definitione, nullâ ejus cum aliâ

quavis figurâ , aut lineâ comparatione factâ , vix sperandum puto : quæ tamen si haberetur , & circuli & hyperbolæ , aliarumque numero infinitarum figurarum quadratum simul haberetur ) siquidem illa in figuris , vix solâ plani cum plano aut solâ solidi cum solido comparatione contenta , utramque simul & plani & solidi aut etiam altioris speciei comparationem persæpe requirit. Immò , illâ methodo , solidorum centra vix directè , sed plerumque indirectè tantùm , putà mediante aliquo plano congruo deteguntur. Sed nec illa linearum centris inservit , nisi ipsæ lineæ , earumque proprietates quædam ex præcipuis ac specificis examinari geometricè possint : quæ omnia ex adjectis exemplis post ipsam methodum seorsim videre licet. De methodo Domini *De Fermat* , nisi eam adhuc videris , hoc scies , ipsam trianguli , atque planorum parabolicorum omnium & solidorum ab iis ortorum centra à priori elegantissimè ostendere. Verùm eandem aliarum figurarum centris accommodare , hîc labor ; cum ne quidem à posteriori , reliquis figuris hucusque inservierit ; quanquam forsân , quominus id fieri possit , nihil repugnet. Jam quòd ad tempus attinet , meministi opinor , Vir Clarissime , methodum vestram non ante annum 1644. Parisios missam fuisse , atque eandem tunc admodùm recens inventam : siquidem , ut ex vestris literis patet , vobis eâ adjutis , solidi trochoidis circa basim mensura paulò ante demùm patuerat , quam sub finem anni 1643. nondum habebatis : hæc enim sunt vestra verba in primâ vestrarum ad me epistolâ , *Quoad solida , nihil habeo*. Ego verò meâ methodo usus sum jam ab anno 1637 , atque illius ope , & planorum parabolicorum omnium & solidorum centra jam tum invenieram ; quorum centrorum quæ ad dimidios fusos parabolicos pertinent , enuntiavi eâ epistolâ quam ad R. P. Mersennum de vestris inventis scripsi anno 1643 ,

quo primùm annò de Torricellio Parisiis auditum est. Hæc, inquam, enuntiavi anno plusquàm integro priusquàm vestra illa methodus appareret; quæ vestris forsitan, & nostris, unà cum aliorum inventis (ingeniosè procul dubio) collatis, tandem apparuit. Sed finge id quod non est, ipsam vestram ante annum 1644. fuisse inventam. Finge etiam id quod multò magis non est; ipsam cum nostrâ prorsus convenire, ac planè eandem esse: quid tum? An nos nostram statim ut minime nostram repudiabimus, qui eâ septennio integro ante prædictum illum annum 1644. tanquam nostra, immò verè nostrâ nemine reclamante usi fuerimus? Num potius præscriptionis jure nos tutabimur? & quibuscunque intercedentibus, nostram ut nostram lege asseremus, cum in talium rerum possessione, vel unius diei præscriptionem valere, nemo inficiari possit? Multò ergo potiori jure nunc, quandoquidem nostra & tempore longè prior est, & penitèns diversa, intercessoribus valere jussis, & nostra tota manebit, qualiscunque tandem illa sit; & nostram ubique asserere, & fructibus ab ea productis tanquam nostris uti ubique licebit. Sed neque argumenta quæ produxisti, ejus ponderis esse videntur, ut illa quemquam ex iis qui nos vel mediocriter norunt, in tam sinistram de nobis opinionem pertraherent. Primùm enim, dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis trochoidis; cum interea tantoperè, & quidem meritò gloriarer de omnibus aliis, quadraturâ, (comparationem cum circulo dicere voluisti) tangentibus, solidis, &c. nec verisimile esse, cum reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse; si illud tantùm speravissem; quod quidem problema, tuo judicio, nulli reliquorum posthabendum videtur: dum hæc ais, inquam, Vir Clarissime, ex tuo genio loqueris; nos, dum scripsimus, ex nostro etiam

genio scripsimus. Tu, cùm magnificeres centra, quia ex iis solida deducere posse confidebas, solida autem præcipuè intendebas; ideò centrorum inventionem magnificè extulisti, nec cæteris posthabendam, immò præhabendam judicasti. Ego contrà, quia sine centris solida & quæsi & viâ Geometricâ inveni; datis autem solidis, statim, & absque labore centra sequebantur. Ideò centra ne respexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui; certus omninò ex præmissa nostra methodo, dato plano quod dudum habebam, sola solida mihi quærenda superesse; centra autem simul cum plano & solidis haberi. Quòd si apologo uti liceat: ego sum Æsopi illius Phrygis statuarius: plani trochoidis mensura, esto mihi summi Jovis statua, mensura solidi, statua Neptuni; centrum autem, esto statua Mercurii. Jam adsit nobis è cælo sub forma hominis ignoti Mercurius ipse, Jovis & Maiæ filius; interrogetque, Quanti statua Jovis? Indicabo sanè ego alicujus pretii. Interroget deinde de statua Neptuni: ego & ipsam alicujus precii indicabo. Tandem interroget de sua ipsius Mercurii statua, quid ego? quid autem aliud nisi hoc? Amice, si priores illas duas emeris, tum tertiam hanc auctarium tibi dabo. Itaque, Vir Clarissime, quæ tibi Jovis aut Neptuni statua meritò fuit, illa nobis Mercurii tantùm statua extitit. Ignosce, si placet, stylo; hoc usum sumus ut mentem nostram aperiremus. De R. P. Mersenno, quid scripserit in ea epistola cujus verba toties repetita contra me adducis, nescio: quid autem illi dixerim ego planè memmini, nec ipse omninò oblitus est; nec etiam illa quæ dixi malè congruunt cum iis quæ sæpius pro te citasti. Sed rursùs, nos ex mente nostra locuti sumus; ille, ut intellexit, sic scripsit: vos ex mente vestra interpretati estis; ac illa vestra interpretatio à nostra mente alienissima est. Omnibus tamen at-

centè consideratis, pace tuâ dixerim, Vir Clarissime; censui præcipuam malæ interpretationis culpam in vos recidere: neque enim verba illius, quæ ipse adducis, à nostro sensu adeo aliena fuerunt, quin ab iis verum illum nostrum sensum faciliè perspexisses, si æqui interpretis personam tibi assumere voluisses. Scripseras ad ipsum te utrumque trochoidis solidum beneficio centrorum priùs inventorum detexisse: ac illud quidem quod circa basim, ut se habet reverà, enuntiaveras ut 5 ad 8; quod ille cùm verum sciret (jam dudum enim ego illi tale indicaveram) non ægrè persuasus est, & alterum quoque circa axem tale esse quale affirmabas ut 11 ad 18. Lætus itaque statim ille mihi per litteras significavit habere se quod mecum communicare vellet. Adivi; epistolam tuam legi, ac circa illud postremum solidum tantùm quod circa axem, immoratus sum; quippe quod nondum habebam, nisi in terminis vero admodùm proximis, extra quos excurrerat ratio illa à vobis assignata 11 ad 18. Hinc ergo, quia de nostris terminis nullum nobis supererat dubium, illicò animadvertimus, rationem illam vestram 11 ad 18 verâ esse minorem. Cùm igitur super hâc re cogitabundus hærerem, tum R. P. ad me prior, Quid ergo, inquit, dicēs de Clarissimo Torricellio? nonne insignium adeò theorematum cognitionem ipsi te debere fateberis? Faterer, respondi, si vera essent; at talia non esse certus sum: miror sanè quod vir talis falsum pro vero nobis velit obtrudere, nec aliud suspicari possum, nisi quod ille Mechanicâ quâdam ratione, per approximationem, huiusmodi rationem à vero non admodum-longè aberrantem invenerit, existimaveritque veram rationem non posse detegi; ac proinde suam haud veram esse, à nemine posse demonstrari. Hæc, inquam ego tum, oratione, fateor, planè scyticâ; quam ille suâ ad vos epi-

*stolâ lenivit, pro suo genio qui omninò mitis est, ut ex stylo ejus satis perspicere potuistis. Jam, cùm dixi, Faterer me debere, si vera essent; planum est me non intellexisse de solido circa basim quod jamdiu ante vos habebam, & habere me ad vos scripseram; neque de centro trochoidis, quod dato tali solido, unà cum plano latere non poterat. Intellexi ergo de solido circa axem ac de centro hemitrochoidis quod ab eo dependet, quæ etiamsi brevî habiturum me confidebam, tamen jure præscriptionis, vestra fuissent, si vestra illa enuntiatio cum vero congruisset. Hinc sanè nemo non videt minimè difficile fuisse, ex verbis epistolæ R. Patris quæ vos toties citavistis, verum sensum qualem jam attulimus, elicere: sed nescio quo fato aliter accidit unde lis hæc pro re nullius fere momenti, putà pro nugis nostris, ut ipse sæpe loqueris, inter nos suscepta est. Itaque, ne quid in posterum simile accidat, si tale commercium inter nos continuetur, oro vos ubicunque agatur de propositione Mathematica cujus discussio ad me pertinebit, ne cujuscunque literis fidem habeatis, nisi manu meâ illæ obsignatæ sint: sic enim fiet ut ego me tantum, non etiam aliorum scripta, ex meo sensu interpretari teneam. Nam, pace amicorum hoc dictum esto, hac in materia, soli mihi fidere effuevi, jamdudum expertus, interpretes plerosque, vel dum amicis blandiri appetunt, vel dum rem non satis intelligunt, omnia literis obscurare ac prosùs deformare. Unde qui tales literas accipiunt, illi, dum vel placitis laudibus ac blanditiis avidè sese ingurgitant, vel quod obscurum est ad placitum sibi sensum detorquent, fit necessariò ut & scribentis & primi authoris verum sensum longè relinquant. Ac hujusmodi quidem allucinationis exemplum afferam ex tuis ipsius litteris, ex proprio tuo sensu, sine interprete ad R. P. Mersennum scriptis, in quibus hæc habes: *Tibi**

verò, vir clarissime, corollariolum mitto ex ipsis hyperbolis deductum. Quadratura quadam est, quarum centenas, immò infinitas poteram mittere, nisi vidissem satis superque esse unam, ut statim omnes emergant. Deinde in iis quas ad nos scribis, quas ipse R. P. etiam ante nos legerat, hæc habes : *Si unius hyperbolæ primaria quadratura tam diu quasita est, nos pro una infinias damus.* Ex quibus verbis statim existimavit R. P. primariæ hyperbolæ quadraturam à te inventam fuisse. Itaque cum aliquo post tempore, de ipsis quadraturis cum eo colloquerer, diceremque non difficulter illas affectum esse me : Habes ergo tandem, inquit ille, hyperbolæ conicæ quadraturam ? Nequaquam, respondi ; neque enim legitima hæc, & nothæ illæ iisdem legibus addictæ sunt. Me misellum, inquit, quantâ spe decido, qui ubi Cleopatraz aut etiam majoris prætii unionem speravi, ibi vitreas tantum ampullas reperio ! Sed de hoc ipse forsân rescribet : ego verò ideò scripsi, ut tali exemplo monerem hac in materia non esse tutum interpreti uti ; cum etiam absque hoc tantæ eveniant alucinaciones. His ergo nostris rationibus, acerbissimæ vestræ accusationis argumentis luculenter respondisse, atque cumulatè satisfecisse speramus. Nunc verò.

*Aspice num image sit nostrum penetrabile telum ?*

Videamus, inquam, nunc, num sit quod de vobis multò potiori jure queri possim. Ac primùm. Nonne vos trochoidem nostram, postquam & à R. P. Merfennio & à nobis moniti estis, jam à multis annis eam nostram esse, eamque brevi à nobis in lucem emittendam, postquam vestris ad ipsum R. P. & ad me literis polliciti estis vos talem messem nobis relicturos intactam ; tamen omni jure, ac vestrâ etiam fide violatis, tanquam vestram non literis modo manuscriptis (quanquam neque hoc ferendum

ferendum fuerit) sed libello ad id praelis commisso, vulgavistis? idque interim, ac eodem prorsus tempore quo continuis vestris literis contraria promitteretis? Hæcine vestra religio? hæc consuetudo? Quòd si ego huc usque de tali injuria pro rei acerbitate questus non sum, fateor, soli ne id facerem evicerunt communes amici. Quid autem lucri feci illis obtemperando? nempe crevit vobis fiducia, quia me bardum, qui illatarum injuriarum nihil sentirem, existimavistis. Attamen si ad paucula verba quæ super hâc re ad vos scripsi animum adverteritis, facilè ex iis percipietis de me dici posse:

*Vultu simulat : premit altum corde dolorem.*

Nonne ergo ipse prior idem quod vos, sed non absque causa clamare debui, *Vim patior; incredibile est quanto desiderio expectem responsum super hac re.* Quibus sanè verbis, ac multò etiam pluribus cùm ad R. P. Mersennum tum ad amplissimum D. de Carcavy scriptis, non obscurè significavistis vos, nisi coràm vobis purgati fuerimus, in nos acerbius quidpiam omninò statuisse; ut sic & injuriâ, & multâ simul afficeremur. Sed de hoc satis: nunc ad alia capita transeamus.

Rursus igitur, nonne primus omnium parabolas ego cum helicibus comparavi secundum longitudinem? Nonne jam annus quintus excurrit, ex quo theorema vulgavi, idemque meo nomine praelis mandavit R. P. Mersennus? Nonne vos ab amicis rescivistis, ac tum demum anno 1645. ad id animum applicuistis? Habeo sanè super hâc re vestras ad vestros amicos Romanos literas vestrà manu ac vestro idiomate scriptas. Quid tum? Jam vos palam, omnibus ferè vestris literis gloriamini, non solùm parabolam conicam cum helice Archimedeâ comparasse, sed & reliquas parabolas cum propriis suis helicibus, immò & quemlibet helicis arcum vel partem,

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

Mmm

sive ex centro incipat sive non, & sive primam revolutionem excedat sive non, demonstrasse cuidam lineæ parabolicæ esse æqualem. Quid hoc rei est? Gloriaris de rebus nostris tanquam si tuæ illæ sint; atque id postquam nostras esse sic rescivisti, ut nisi rescivisses, nequidem de illis forsan unquam somniasses. Nec est quod fingas existimasse te nos solam helicem Archimedeam considerasse; nimis enim frigidum fuerit figmentum, & absque ullo fundamento; cum una eademque sit illius & cæterarum, demonstrationis via & methodus, quam qui invenerit, omnia procul dubio invenerit, si modo voluerit, nempe hæc, Quævis parabola unà cum helice sibi propriâ sic se habet, ut si portio axis parabolæ, comprehensa inter ordinatim applicatam, ad axem, & tangentem à termino applicatæ ductam, æqualis esse intelligatur circumferentiæ circuli primæ revolutionis in helice: (intellige helices planas; nos enim conicas quoque cum parabolis comparavimus) applicata autem æqualis semidiametro ejusdem circuli: tum, quæ inter verticem & applicatam interjicitur parabola, æqualis sit longitudine helici primæ revolutionis. Quod si in eadem parabola sumatur à vertice quævis portio; à principio autem helicis propriæ sumatur etiam portio, à cuius termino ducta recta ad helicis centrum, æqualis sit rectæ à termino sumptæ portionis parabolæ ad axem applicatæ: erunt & hæc portiones æquales. His sic à nobis inventis, si quis quidpiam addiderit; aut si imitando similia effecerit, habeat sanè quam ipse laudem merebitur. In helicibus conicis existente cono recto, omnia se habent ut suprâ; modò tantum loco semidiametri circuli primæ revolutionis, qui circulus in ipso cono existit, sumatur recta à vertice coni ad circumferentiam ejusdem circuli terminata. Hic autem, centrum helicis erit vertex coni; & quæ à centro ad puncta helicis du-

cuntur rectæ, erunt portiones laterum conï ejusdem. At equidem rescivisse me fateor, dices. Verùm demonstrationem proprio Marte adinveni. Esto: quid inde? Sanè si quæstionem proposuisssem tantùm, non etiam solvissem, illa tua fuisset, qui prior solvisses: nunc quando prior solvi ego, & solutam vulgavi, mea est; nec mihi, etiamsi omnes conentur, verè eripi potest. An, quæso, meæ aut etiam vestræ sunt parabolæ Domini *De Fermat* quadraturæ? aut spatiorum helicum cum circulis comparationes, quas ambo proprio Marte invenimus? Quid de ipsis speretis vos, nescio sanè: ego certè, quanquam mea multò quàm vestra potior sit causa, ipsam tamen prorsùs defero. An meum est solidum vestrum hyperbolicum? an mea hyperbolarum vestrarum novarum quadratura? minimè verò; attamen amborum ipsorum theorematum demonstrandorum una eademque est methodus, quam nos invenimus, & jampridem ad vos misimus vestro solido accommodatam, quamque iisdem hyperbolis accommodare non admodum difficile est. Reperi quoque in illarum singulis, ex parte unius tantùm ex asymptotis, resècari posse spatium planum acutum & versùs acumen infinitum, quod tamen spatio finito atque undique clauso sit æquale. Obiter autem, ut verum fatear, nonne istis hyperbolis occasionem dedere parabolæ illæ Domini *De Fermat*? Nonne etiam illa nostra propositio de helicibus & parabolis longitudine æqualibus ansam præbuit illi alteri de qua adeò magnificè gloriaris? de illo, inquam, helicum genere quæ describuntur, dum recta uniformiter quidem circa manens centrum circumvolvitur, at punctum interim secundùm illam rectam fertur proportionaliter, quam quidem helicem rectæ cuidam asseris æqualem? Quæ autem sit illa recta, & quomodo ad datas se habeat, tanquam si Cereris Sacrum sit, planè reticuiisti. Non ta-

men nos latet, eam æqualem esse hypotenusæ cujusdam trianguli rectanguli, cujus unum laterum æquale sit rectæ à centro ad terminum helicis ductæ: sedenim, quis triangulum istud dabit, ex hypothesi quod dentur positione & longitudine duæ ex iis rectis quæ à centro ad helicem terminantur? vel contrà, quis triangulo dato, dabit helicem? Utrumque si dederis, Vir Clarissime, vel alterutrum tantum, ego munus id eo munere compensabo, quod vel ipse duplo pluris facias. Sed cave: hîc via præceptus est & lubrica; ac talis, ex qua ad parallogismum lapsus sit facillimus: nisi tamen quod petimus datum fuerit, propositio nullius pretii remanebit. Illud etiam non videris animadvertisse, propositionem hanc non esse novam, sed ipsam prorsus eandem esse cum antiqua illa, quâ quæritur linea per quam pondus ad centrum terræ laberetur secundum uniformem ad suum horizontem inclinationem; talis enim linea ad tale genus pertinet. Quàm verò minimè nova sit propositio, testabitur ipse R. P. Mersennus. Verùm, quia datâ inclinatione, hoc est, dato specie triangulo rectangulo, datoque centro helicis in centro terræ, dato insuper uno ejusdem helicis puncto, putà in ipsius terræ superficie; non poterat geometricè, nec etiam suppositâ circuli quadraturâ, assignari aliud in ea punctum; idèd illa inculta permansit, ac ferè ex toto neglecta est. Neque rursus, idem solum aut primum genus est earum helicum, quæ finitæ cum sint, infinitas tamen circa punctum quoddam revolutiones absolvunt: tales enim & longè antiquiores sunt illæ quæ in globis terrestribus atque in mappis mundi, loxodromias seu ventorum vias referunt, quæque præter has illud habent peculiare, quòd ex utraque parte finitæ sint; & tamen circa utrumque polum infinites circumvolvuntur. Cumque sic imitando, res Geometricæ in infinitum plerumque abeant,

quidni etiam linea recta circa manens centrum æqualiter vel proportionaliter circumvolvitur, ac simul punctum mobile vel æqualiter vel inæqualiter secundum rectam eandem legibus quibusdam feretur vel à centro, vel versùs centrum, ad describenda infinitiès infinita helicum genera? Ex iis autem, genus illud novimus, cujus helices hyperbolis conicis demonstrantur æquales, quidni rursùs licebit, pro infinitis hyperbolis effingendis, imitari vigesimam primam propositionem libri primi Conicorum Apollonii, sicuti pro infinitis parabolis vigesimam propositionem imitatus est D. *De Fermat*? Verùm hìc omnia persequi nec lubet nec vacat. Superest unum expostulationis nostræ caput circa novas nostras quadratrices lineas, quas non ita pridem, vix scilicet ante biennium invenimus, nec multò post ad vos misimus. Possèm hìc, & sanè potiori jure, eadem verba adjicere quæ vos circa centra gravitatis: *Utinam non misissem*; sed illa nimis acerbam, prorsùsque contumeliosam præ se ferunt exprobrationis speciem: quin contrà, & misisse lætor; quandoquidem ita vobis placuerunt; & nisi tunc misissem, nunc utique mitterem. Illas, inquam, lineas ex quibus fiunt spatia plana longitudine infinita, quæ tamen spatiis finitis undique clausis sunt æqualia; vos lineas Robervallianas, ab inventoris nomine, vocavistis; ego voco quadratrices, ab earum officio, & inventionis fine; ego enim figurarum quadraturæ intentus, dum nihil negligo eorum quæ ad propositum illum finem conducere videntur, præcipuè verò ipsarum figurarum in alias figuras transmutationem experior; in tales lineas incidi hac ratione.

Esto in figura, trilineum ABC quale requiritur, cujus punctum B sit vertex; recta AB altitudo; recta AC basis; & linea BC sit quæcunque curva: nihil enim refert qualiscunque accipiatur. Verùm, ut ex infinitis

M m m iij.

*Supple re-  
ctam lineam  
BC à puncto  
B ad pun-  
ctum C duc-  
tam.*

generibus aliquod hîc eligamus, quod vobis instat om-  
nium sit, esto illa curva BC ad easdem partes cava, pu-  
tâ ad partes ductæ rectæ BC, ita ut ipsa tota sit extra  
triangulum ABC, & eadem à puncto B ad punctum C,  
continuè recedat à recta BA, & ad rectam CA propius  
accedat; sumpto utroque, recessu scilicet & accessu,  
secundùm perpendiculares à curva BC ad rectas BA,  
AC ductas. Tum in ipsa curva BC, sumantur continuè  
à vertice B, quæcunque & quotcunque puncta D, E,  
&c. à quibus ductæ intelligantur rectæ DF, EG, &c.  
tangentes curvam BC in iisdem punctis D, E, &c. at-  
que occurrentes axi AB producto ultra verticem B, in  
punctis F, G, &c. Intelligatur quoque per punctum C  
recta CK tangens eandem curvam BC in puncto C; quæ  
quidem recta CK vel eidem axi AB occurrerit ultra ver-  
ticem B, vel eadem CK eidem AB erit parallela, coin-  
cidetque cum recta CR, quam ipsi AB ponimus esse pa-  
rallelam. Præterea, à punctis D, E, &c. ducantur re-  
ctæ DI, EH axi BA parallelæ, atque occurrentes basi  
AC in punctis I, H, &c. & per punctum A, ipsis tan-  
gentibus DF, EG, &c. ducantur totidem rectæ ordine  
parallelæ, AM quidem ipsi DF, AL autem ipsi EG,  
&c. occurratque recta AM rectæ DI productæ in M,  
atque ita habebimus punctum M: occurrat quoque re-  
cta AL rectæ EH productæ in L; atque ita rursus ha-  
bebimus punctum L & sic de cæteris. Quo pacto habeo-  
bimus à puncto A infinita alia puncta continuo ordine  
disposita M, L, &c. Per hæc intelligatur ducta linea  
continua AML &c. illa erit primaria nostra quadratrix:  
primariam vocamus, quia ipsa prima occurrit, & prima  
à nobis vulgata est; cæteræ autem ab illa primaria, sal-  
tem per occasionem, dependerunt. Quod si tangens CK  
occurrat axi AB, ductâ rectâ AN parallelâ eidem CK,  
& productâ rectâ RC donec ipsi AN occurrat in N,



spatium  $ABC$  in infinita trilinea resolvi concipiatur: quæ quidem trilinea totidem rectis  $AD$ ,  $AE$ , &c. ac portionibus interceptis curvæ  $BC$  comprehendantur; spatium autem  $ABCN$  in totidem quadrilinea resolvatur, quot sunt trilinea quæ quadrilinea à parallelis  $DM$ ,  $EL$ , &c. ac portionibus interceptis curvarum  $BC$ ,  $AN$  constituentur: erunt ergo singula trilinea cum singulis quadrilineis, super eadem basi constituta ad puncta  $D$ ,  $E$ , &c. propter tangentes, (absque tangentibus enim falsum esset) atque in iisdem parallelis; putà trilineum ad  $AD$  cum quadrilineo ad  $DM$ , in iisdem parallelis  $DF$ ,  $MA$ ; trilineum autem ad  $AE$ , cum quadrilineo ad  $EL$  in iisdem parallelis  $EG$ ,  $LA$ , atque ita de reliquis. Quapropter singula quadrilinea singulorum trilineorum erunt ut dupla, ex legibus infiniti; & omnia omnium, hoc est totum spatium  $ABCN$  quod ex omnibus quadrilineis constat, duplum erit totius spatii  $ABC$ , quod constat ex omnibus trilineis. Patet autem eodem ratiocinio, quadrilaterum  $ABDM$ , trilinei  $ABD$  duplum esse; & quadrilaterum  $ABEL$ , trilinei  $ABE$ , & sic de cæteris. Si ergo trilineum  $CAMLN$  totum extra trilineum  $ABC$  existat, ut in assumpto exemplo, erunt duo illa trilinea æqualia, siue punctum  $N$  in infinitum abeat, siue non. Quodd si prætereà, eo casu quo curva  $AMLN$  tota extra trilineum  $ABC$  existit, ex punctis  $D$ ,  $E$ , &c. ducantur rectæ  $DX$ ,  $EV$  basi  $CA$  parallelæ, atque axi occurrentes in punctis  $X$ ,  $V$ , &c. fient spatia  $BDX$ ,  $BEV$ , &c. spatiis  $AIM$ ,  $AHL$ , &c. singula singulis æqualia. Quoniam enim, ex demonstratione universali præmissa, totum quadrilineum  $ABDM$ , totius trilinei  $ABD$ , duplum est; & ablatum parallelogrammum  $AXDI$ , ablati trianguli  $AXD$  est quoque duplum, erit & reliquum reliqui duplum; reliquum autem primum constat ex duobus trilineis  $BDX$ ,  $AIM$ ; secundum verò est  
 solum

solum trilineum BDM : quare duo illa trilinea BDX, AIX simul, hujus solius BDX dupla sunt, ac proinde æqualia sunt inter se trilinea illa BDX, AIM. De cæteris eadem est demonstratio. Sed & trilineum BDF bilineo AM, & trilineum BEG bilineo AL, æquale esse facile demonstrabitur; & multa alia quæ consultò omitimus. Potest quoque ad solida extendi hoc nostrum inventum; si scilicet, prædictæ omnes figuræ circa axem AB utrinque productum quantum satis, convertantur; ac spatia quidem solida ad rectas AD, AE, &c. constituta, pro pyramidibus; spatia autem solida ad parallelas DM, EL, &c. pro parallelepipedis accipiantur. Quo pacto solidum descriptum à quadrilineo ABCN, sive illud versùs N infinitum sit, sive non, triplum erit solidi à trilineo ABC descripti : & solidum à trilineo ACN in assumpto exemplo descriptum, duplum erit solidi à trilineo ABC descripti; & hinc habentur innumera species solidorum infinitè finitorum.

Possunt etiam rectæ MI, LH, &c. produci versùs puncta D, E usque ad puncta T, S, &c. ita ut rectæ IT, HS, &c. æquales sint rectis DM, EL, &c. & per puncta B T S, &c. potest intelligi curva quadratrix B T S: hæc autem illa erit quam ad vos misimus; de qua ideo nihil est quod hîc addamus : quòd autem illa secundaria sit, manifestum est.

Tandem, ductis tangentibus DF, EG, &c. ut suprà; potuit loco puncti A assumi aliud quodcunque punctum B vel C, vel quodvis in plano trilinei ABC quantumvis producto existens, per quod ducerentur rectæ tangentibus illis parallelæ; quemadmodum hîc ductæ sunt AM, AL, &c. & per puncta D, E, &c. duci quoque potuerunt totidem aliæ rectæ inter se & cuivis datæ parallelæ, quæ cum tangentibus & tangentium parallelis parallelogramma constituerent, qualia sunt AFD M,

AGEL, &c. unde alia infinita generabuntur quadratrices : sed hæc nunc indicasse sufficiat. Vides itaque, Vir Clarissime, quàm latus hoc loco ad imitandum pateat campus. Vides etiam alia prorsus à tuis hyperbolicis diversa genera solidorum, & multitudine innumerable, & illis forsan, magis miranda ; eo quòd hæc nostra de externa sua latitudine nihil unquam remittant, ut vestris necessario accidit. Neque tamen nostra nos ad vestrorum imitationem effinximus ( quod si factum fuisset, quantumcunque abstrusa, vobis tamen tribueremus ) sed hæc à nostro linearum quadraticarum invento sic dependerunt, ut ab illis scungi non potuerint. Vides denique nos nec plana, nec solida infinite finita præcipuè intendisse ; sed nostras quadratrices, quæ ex figurarum in alias transformatione nascuntur, ex quarum origine talia spatia necessario consecuta sunt ; & nobis aliud animo agitantibus, sese ultro obtulerunt.

Jam, quadratura parabolæ quomodo ex prædictis faciliè deducatur, sic ostendimus. Intelligatur in hoc nostro exemplo, curva BC esse quævis parabola, sive conica illa sit, sive alia : ( unica enim omnibus inservit demonstratio ) cujus axis sit AB ; vertex B ; basis AC ; & recta BY ipsam tangat in vertice, occurratque rectæ NC productæ in puncto Y, ut sit parallelogrammum ABYC spatium trilineum parabolico ABC circumscriptum. Ducantur etiam, vel duci intelligantur à singulis punctis curvæ AMLN, putà à punctis M, L, N, &c. rectæ MQ, LP, NO, &c. basi AC parallelæ occurrentes axi BA producto in punctis Q, P, O, &c. quo pacto, constituetur aliud quoddam trilineum ANO, cujus axis erit AO, vertex A, & basis NO. In hoc trilineo, rectæ ad axem ordinatim applicatæ erunt MQ, LP, NO, &c. quæ ordinatim applicatis in parabola, DX, EV, CA, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis, erunt æqua-

les; at portiones axis AO inter verticem A, & applicatas interceptæ, putà AQ, AP, AO, &c. æquales erunt rectis FX, GV, KA, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis: quæ omnia ex constructione manifesta sunt. Est autem in quavis parabola, ut FX ad XB, sic GV ad VB, & sic KA ad AB, propter tangentes DF, EG, CK. Quare erit quoque, positâ in nostro exemplo quavis parabolâ BDEC, ut AQ ad BX, ita AP ad BV, & ita AO ad BA, &c. Est ergo curva AMLN parabolâ ejusdem speciei cum parabolâ BDEC; cùmque AC, ON sint æquales, erit spatium AON ad spatium ABC, ut axis AO ad axem AB. Ostensum autem est spatium ABC æquale esse spatio ACN; quare spatium AON ad spatium ACN est ut AO ad AB: & componendo parallelogrammum ACNO ad spatium ACN, sive ad spatium ABC, se habet ut recta OB ad rectam BA. Sed ut parallelogrammum AY ad parallelogrammum AN, ita recta AB ad rectam AO; ergo, ex æquo, in ratione perturbata, erit parallelogrammum AY ad spatium ABC, ut recta OB ad rectam AO. Data autem sunt rectæ illæ OB, AO, quia AO ipsi AK data æqualis est, ex constructione: ergo data est ratio parallelogrammi AY ad spatium trilineum parabolicum ABC, ut propositum est; & est talis ratio ut recta composita ex AK & AB, ad rectam AK.

Simili ratiocinio, in solidis ipsarum parabolarum circa axem AB conversarum, concludemus universaliter sic esse cylindrum AY ad solidum ABC, ut recta composita ex AK & dupla ipsius AB, ad ipsam eandem AK.

Quomodo ergo in ejusmodi quadratrices inciderim, jam tenes: quàm verò ingenuè ad vos miserim, ipsi scitis: sciunt & Academiæ nostræ procures, qui omnes epistolam nostram, antequam ad vos mitteretur, perlegerunt; sciunt & multi alii cum quibus eandem ego, vel amici communicavimus; sciunt, inquam, illi omnes,

N n n ij

me expressis verbis, veluti florem quemdam ex horto illo delectum, vobis indicasse quadraturam parabolæ primariæ seu conicæ. Quis igitur meo loco constitutus, fore speravisset ut Clarissimus Torricellius, inde per imitationem, cæteras parabolæ quadrandi arreptâ occasione, (quod nullius fuit negotii, quia una eademque est omnium methodus) hæc verba subjiceret: *Praedictæ methodi, tum pro quadraturis, tum pro tangentibus, sunt quas minimi præ cæteris ego facio; non tamen patiar mihi illas eripi.* Et hæc: *Linea Robervalliana, si ortum ducat ex aliqua parabolæ, semper parabola evenit ejusdem speciei; quod ego novum esse scio, licet fortasse turpe videatur hoc fateri.* Et rursus in alia epistola: *Quadraturas ad Clarissimum Robervallium mitto, fortasse ad subeundam eandem fortunam cum meo centro gravitatis cycloidis, hoc est trochoidis.* Atque ita, sicuti palam nos accusaverat Torricellius, tanquam si centrum illud nostræ trochoidis, à nobis illi surreptum fuisset, sic timere se simulavit, ne eodem fato illæ suæ (si Diis placet) parabolæ quadraturæ sibi à nobis eriperentur. Quis, inquam, hoc speravisset? Nam, Deum Immortalem! quid illis in quadraturis aut novum est aut ad Torricellium pertinet, ut ei possit eripi? An in universum quadraturæ illæ sunt Torricellii? Nequaquam. Primariæ enim sive conicæ parabolæ quadratura Archimedis est; cæterarum autem, D. *De Fermat*: dico D. *De Fermat*; quia cæterarum illarum medium à medio Archimedis planè diversum est, & diversum esse debuit, quandoquidem ad illas, medium Archimedeum omnino ineptum est. Quòd si omnibus illud aptum fuisset; tunc, quantumvis ab eo diversum esset medium D. *De Fermat*, omnes tamen illas quadraturas uni Archimedi tribueremus, ac cæteras per imitationem inventas ad primariam remitteremus. Si quidem facile est in-

ventis addere : authorem verò sese præbere , hoc opus hîc labor est. Non igitur aut Torricellii , aut nostræ sunt parabolæ quadraturæ in univèrsū ; nec illæ aut ipsi aut nobis eripi possunt. Superest igitur ut de medio decertemus. Sed ad quid hoc ? Quandò , sive ego vice-ro sive Torricellius , ipsa res vel Archimedi cederet , vel *D. De Fermat*. Attamen quod in eo mediò præcipuum est , nostrum est , ipso Torricellio concedente , nempe nostra quadratrix , quam ipse Robervallianam vocat. Quid igitur ipsi relinquitur ? Forfan , inquiet aliquis , vult Torricellius suum esse , quòd usus fuerit complementis æqualibus parallelogrammorum , eaque prædictis Robervallianis quadratricibus accommodaverit , ut duplici positione inscriptorum & circumscriptorum uteretur more Veterum. Atqui ob tantillum , quod nec ipsum univèrsale est , adeo sollicitum esse , adeoque invigilare ne sibi eripiat , pauperis cujusdam est , qui hoc unum possideat , non autem ditissimi Torricellii , qui infinitos rerum multò pretiosiarum possidet thesauros. At , dicet alius : Robervallius unicam parabolam primariam seu conicam , Torricellius verò omnes omninò quadravit. Robervallius scilicet unicam ! Quis autem nos usque adeo cæcos existimaverit ? præcipuè cùm una eademque sit omnium methodus quam suprà ostendimus ? Ego ne in eo quod difficilius fuit , si tamen quid ibi difficile dici potuit , nempe in quadratricibus ipsis detegendis , atque in primariæ parabolæ quadratura prespicax ; in facillimis repentè cæcutiero ? Quin ergo saltem enuntiavisti ? Satis fuit unam enuntiare ; cæteræ sponte sequebantur. Quid hoc rei est ? An tandem ego ea omnia ignorasse censebor , quæcunque unicâ quam ad Torricellium scripsi epistolâ expressis verbis non comprehendi ? Respiciat ille ad verba nostra , ut quid voluerimus intelligat ; florem mittebamus , non arborem. Ac jam

decennium est ex quo absolutis nothis illis parabolis, vix animo occurrit, nisi urgeat occasio, ut illas amplius nominem; Torricellio verò ipsæ novæ sunt, adeoque ipsarum ille non obliviscitur, ut magnum quid putet, si centum modis illas quadraverit, cum tamen infinitis id fieri possit. Rursus ergo, quid in illis quadraturis novum est quod ad Torricellium pertineat? Non video sanè: attamen scire gestio, ne quod illius est, quodque sibi eripi minimè passurum esse minatur, imprudenter auferamus.

Jam perspiciat quicumque Torricellii legerit epistolas, quàm multa præteream legitimæ expostulationis capita. Enimverò, illud ne viro ingenuo ferendum fuit, quod nobis comminando scripsit super aliâ quâdam methodo centrorum gravitatis inveniendorum, quam habere se gloriatur? *Oro vos*, inquit, *ne inter vestra hanc etiam habeatis: nam hoc esset tollere penitus omne litterarum, scientiarumque commercium.* Quid aliud ad manifestum furem scribi potuit? Interim tamen, de illa methodo callidè ac de industriâ tacuit Torricellius: ita ut si aliquam ego aut alius quispiam proferamus, jam ipsi liberum sit illam astutiis ejusmodi, atque in longum prospicientibus verbis, sibi asserere, ac de ea locutum esse se, suâ fide affirmare.

Quis rursus feret quod ad R. P. Mercennum scribit, cum de centro nostræ trochoidis loquitur? *Quod certè (ait) immò certissimè scio non habuisse Robertvallium, antequam demonstrationem meam videret; ut P. V. vel ipsemet, vel tandem universa Europa testis esse poterit.* De centro illo jam satis suprâ, immò usque ad nauscam, nec circa illud universa Europa testis nobis formidanda; quin, si fieri posset, præ cæteris optanda. Verùm, quid tale centrum ad universam Europam? Crede mihi, Clarissime Torricelli; esto (quod tamen sine arro-

gantia dici non potest) quòd in rebus Mathematicis ambo sumus egregii ita ut paucos pares, nullos agnoscamus superiores: nequaquam tamen, hoc pacto, tales erimus quos universa respiciat Europa; nempè misellos Geometras de nescio quo puncto disceptantes. Simus potius ambo, ego triginta millium peditum nostrorum veteranorum dux, tu totidem vestrorum: adsit utrique equitatus tali numero debitus, nihilque desit armorum, annonæ, aut fidei militum erga duces; ac tunc universa forsàn nos respiciet Europa.

Hoc loco, Vir Clarissime, cogitare subiit quid fieret, ut cùm semel ad te scripserim (prima enim alia nostra de te epistola ad R. P. Mersennum directà fuerat) idque stylo qui meo & amicorum iudicio, nihil omninò acerbi, quanquam post ereptas à te nobis nostras trochoides, redolet; ipse tamen è contrario, acri adeò stylo rescripseris; nec mihi soli, quo pacto faciliùs res componerentur, sed tribus (nescio num etiam pluribus) literis ad amplissimos celeberrimosque viros de me scriptis, haud alio argumento quamquòd existimares (nimis tamen leviter) centrum trochoidis ipsius tibi fuisse ereptum. Tantusne Torricellio earum quas suas putat, nugarum zelus (liceat eo tibi familiari nugarum vocabulo uti) ut statim atque eas sibi ereptas putaverit,

*Irruat & frustra ferro diverberet umbras,*

ne quidem cogitando quantas ille, cùm directè, tùm indirectè, ab aliis sumpserit, ob quas periculum sit ne quamvis placidos acriùs irritando, ipse vicissim pœnas luat? Atqui consentaneum erat, vir prudens cùm sit, ut meminisset hujus præcepti, quod qui dedit, is procul dubio fuit ad unguem factus homo; videlicet,

*Qui, ne tuberibus propriis offendat amicum  
Postulat, ignoscat verrucis illius.*

Equidem, inter plurimas hujusce tam acris styli causas, hæc nobis videtur probabilior, quod tu, Vir Clarissime, spatium Mathematicum ingressus, seu fato seu sponte, viam à nostris jam à ante plures annos tritam inieris, à qua huc usque parùm deflexeris; unde non mirum est si in easdem stationes, littora, portus, fluvios, & regiones incidas, quibus illi dudum detectis nomina indiderunt, eaque omnia in chartas intulerunt: ipse autem, cùm illa à te primùm detecta existimes, sit ut postea indigneris si quis contrarium asseruerit, atque id quod verum est candidè enarraverit. Memineris ergo spatium illud infinites infinitè infinitum esse, idemque solidum, immò etiam plusquàm solidum, tibi verò nec pedes, nec pennas, nec alas deesse: deflectas ergo paululùm vel ad dextram, vel sinistram, vel suprà vel infra: curre, nata, vel etiam vola: hæc enim potes omnia, quæ sanè

*pauci, quos equus amavit  
Jupiter, aut ardens evexit ad aethera virtus,  
potuere;*

sic enim fiet, ut, quod non semel, immò pluries jam præstitisti, & novas regiones detegas, & viros doctos non solum adeò feliciter imiteris, quanquam nec ipsum laude caret; sed, quod multò laudabilius est, teipsum viris doctis præbeas imitandum.

Huc usque pro nobis plura diximus: nunc pro divino Archimede pauca liceat. Bis, ut tua excuses, tantum virum in discrimen adducis, Vir Clarissime; semel pro libris tuis de motu projectorum; iterum autem, pro illâ tuâ minimè verâ ratione solidi trochoidis circa axem, ad suum cylindrum ut 11 ad 18. Ac primùm quidem; pro libris de motu projectorum hæc ais: *Archimedes supposuit olim projecta, non per parabolas sed per lineas spirales*

*Spirales suas procedere.* Hanc Archimedis suppositionem nullibi videre licuit in ejus operibus : commentarios autem, forsan, non omnes legi; sed nec eorum authoribus licuit tanto viro absurdas ejusmodi suppositiones affingere. Deinde, pro excusando vestro illo fictitio trochoidis solido, hæc scribis ad R. P. Mersennum : *Habemus apud Archimedes, prop. 2. de circuli dimensione, circulum ad quadratum diametri esse ut 11 ad 14 : quæro ab ipso (Robervallio, supple) undenam putet me habuisse rationem quam ad numeros 11 & 18 reducebam?* Quæ post verba illa sequitur linea, solitam totius epistolæ redolet acerbiter. Equidem Archimedes hæc habet : at non dissimulavit statim (nempe propositione tertiâ, quæ manifestò lemma est ad illam secundam) talem rationem 11 ad 14 non esse accuratam, sed tantum veræ proximam : apud vos autem nihil tale habetur; sed vestram illam rationem 11 ad 18 tanquam accuratam proposuistis, ex invento prius centro tanquam accurato deductam : immò, illam pro accurata exceperunt quicunque existimaverunt vos adeò candidos esse, ut nefas existimaretis ea enuntiare quæ vera non essent. Enimverò, Vir Clarissime, plerique ex nostris vix persuaderi potuissent, Torricellium nobilem adeò Geometram, aliquid purè Geometricum sine demonstratione affirmare voluisse. Sed nec illa vestra ratio 11 ad 18 ex terminis vero proximis ab Archimede assignatis pro circuli dimensione deducta est, cum eadem extra ipsos terminos longè evagetur; unde non video quid vobis hinc proficiat Archimedis autoritas, præcipuè in materia purè Geometrica, ubi pro errore accipitur quidquid accuratè verum non est, quantumcunque illud ad verum proximè accedere deprehendatur.

Hic fieri posse video, ut aliquis hujusce nostræ epistolæ stylum idèò carpat, quòd ille nec amico, nec ad-

versario convenire videatur ; ut potè qui pro amico, acrior, pro adversario contrà, lenior quàm par sit appareat. Equidem, Clarissimum Torricellium adversarium habere absit ut unquam optaverim ; adversarius sanè illi ego ero nunquam, nisi ipse prior talem me effecerit. Quòd autem amicum & cupierim & adhuc eupiam, argumentum certissimum est, quòd prior amaverim, ac nomen ejus celebre per Galliam, quàm maximè potui, reddiderim. Siccine ergo (urget censor) cum amicis tuis te gerere solitus es? Primum quidem, apologiam contra acerbam ipsius accusationem mihi debui; deinde metui ( fateor ), ne ipse quem summo opere amicum mihi cupio, exillis esset qui aliena veluti perspicillis cavis respiciunt; sua, convexis aut iis forsàn quæ plurimis faciebus distinguuntur, unde fit ut iidem aliena contractiora, sua verò ampliora aut numerosiora, aut etiam pulchris coloribus ornatiores quàm sint reverà videre videantur. Itaque admonere eum volui officiosè, ut amorem proprium alieno temperaret. Ac, ne ad excitandum duriusculus haberetur, stylum adhibui utcumque acutum & mordacem : sic enim fore speravi ut sapiens cum sit, se ab amante pungi sentiret, atque ita ad redamandum acriùs incitaretur. Quanquam autem tot paginas minime inutiles fore spero, doleo tamen quòd illas in tractando ejusmodi ingrato ac planè tædiofo argumento infumere oportuerit; cùm alia ferè innumera longè suaviora, ac viris doctis, ut puto, acceptiora, cùm ex nobis, tum ex nostris habeamus; qualia sunt quæ sequuntur. Circa analysim quidem, de æquationum recognitione, & emendatione, novâ prorsus methodo, de earundem determinatione ac de ipsarum per locos proprios resolutione, atque compositione. Circa Geometriam, de locis planis, solidis, atque ad superficiem; ubi in specie, restituta habemus loca solida ad tres &

quatuor lineas: de cylindris, & conis isoperimetricis, cum demptâ base, tum additâ: de iisdem sphaerae inscriptis, & circumscriptis, seu spatiorum solidorum, seu etiam superficierum tantum habeatur ratio; ubi mirabere forsitan quâ ratione à nobis concludi potuerit, positâ sphaerae diametro 3 2 partium, axem conii inscripti cuius superficies comprehensa base sit maxima, esse hanc apotomen  $23 - \sqrt{17}$ ; si sphaerae superficies uno, duobusve, vel tribus aut pluribus circulis, in quocunque & quacunque portiones secta sit, quamcunque ex illis portionibus cum alia ac cum tota comparamus, ac uniuscujusque centrum gravitatis assignamus. Circa cylindricas & conicas superficies scalenas, tum etiam circa rectas, mira habemus. Inter illa perpende qualenam sit hoc problema: Portionem superficiei cylindri recti exhibemus, quae superficiei datae cylindri scaleni sit aequalis. Sed & istud: Dato quadrato, aequalem damus cylindricae superficiei portionem, idque absolute, nullâ suppositâ circuli quadraturâ, & exclusis cylindri basibus. Problemata atque theoremata innumera habemus soluta, cum circa conicas sectiones, tum circa alia fere omnia Geometriae huc usque notae tam theoreticae quam practicae capita. Circa Arithmeticam, Musicam, Opticam, Astronomiam, Gnomonicam, & Geographiam,

*Plura quidem feci, quàm quae comprehendere dictis  
In promptu mihi sit;*

sed illa omnia vulgaria aestimo. Attamen, dic quibus in terris Luna minori spatio quàm 24 horarum nostrarum communium, bis oriatur, aut bis occidat ejusdem horizontis respectu. Facile quidem theorema, sed quod primâ fronte impossibile multis videatur. At Mechanicam à fundamentis ad fastigium novam extruximus, rejectis omnibus, præter paucos admodum, antiquis la-

pidibus quibus illa constabat; ita ut nunc octo contignationibus, hoc est totidem libris, absolvatur. Primus est de centro virtutis potentiarum in universum, an detur tale centrum, & quibus potentiis conveniat, quibus verò minimè; secundus de libra, ubi de æquiponderantibus; tertius de centro virtutis potentiarum in specie; quartus de fune mira continet; quintus de instrumentis & machinis; sextus de potentiis quæ in diversis mediis agunt; septimus de motibus compositis; octavus denique, de centro percussionis potentiarum mobilium. In his omnibus nulla admitto nova postulata, sed tantum ea quæ vulgò recepta sunt apud Authores: quod sanè exequi, quàm non facile opus sit, testes sunt quotquot huc usque de gravibus super planis inclinatis existentibus egerunt; inter quos & ipse habetis, Vir Clarissime, qui propositione prima libri primi de motu gravium descendentium, ad id demonstrandum novo postulato usus es, quod quivis non facilè concesserit, quia pondera quæ proponis, non librâ rigidâ & rectâ, ut fieri solet, sed fune molli ac perfectè plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc, librâ utimur modo usitato dispositâ, cujus beneficio propositionem illam non aliter demonstramus, quàm aut vectem aut axem in peritrochio: eam autem jam ante quindecim annos invenimus; atque anno 1636. tanquam Mechanicæ nostræ prodromum, prælo commisimus atque vulgavimus, sed Gallico idiomate. Neque etiam eum tantum casum consideravimus qui solus ab omnibus attenditur; cum scilicet potentia pondus in plano inclinato positum retinens, agit per lineam directionis ipsi plano parallelam; sed & dum eadem linea directionis aliam quamcunque positionem obtinuerit: quo pacto, ratio ponderis ad potentiam infinitè mutatur. Ibi autem quiddam demonstravimus quod multis omnino paradoxum visum est; nem-

pe, si intelligatur prælum aliquod duobus planis parallelis perfectè rigidis constans, quod ita disponatur ut ejus plana horizonti non sint parallela: tunc, quantâcunque potentiâ prematur prælum illud, planis semper perfectè planis ac parallelis inter se remanentibus, illa nullum pondus inter se retinebunt; sed illud pondus propriâ gravitate statim labetur inter ipsa plana, atque idem à prælo sese liberabit, nisi aliunde retineatur. Hæc quidem ad quintum nostrum librum pertinent. Libet autem ex quarto quoque hæc addere. Si tres potentiz totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, (nodus est quodvis punctum in fune) æquilibrium constituent: tunc describi poterit triangulum cujus centrum gravitatis sit nodus ipse, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem describerentur triangula, sed omnia similia) erunt autem tunc tres potentiz in eadem ratione cum tribus rectis à centro trianguli ad tres angulos terminatis; ita ut quælibet potentia homologa sit ei rectæ quæ in fune ipsius existit. Si quatuor potentiz non existentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, æquilibrium constituent: tunc quod supra de triangulo dictum est, de quadâm pyramide tetragona verum erit. Hinc aliud paradoxum, funis horizonti minimè perpendicularis quantâ vi tendatur, si perfectè plicabilis, nullo modo autem rigidus ex se existat, imposito quocunque vel minimo pondere, aut si ipse ex se gravis esse intelligatur, flectetur necessariò, vel rumpetur, nec viribus ullis fieri poterit ut rectus evadat. Similiter, tres vel quocunque funes ad communem nodum religati, totidem potentiis in eodem plano existentibus, quod planum horizonti non sit perpendiculare, quibuscunque viribus tendantur, imposito quocunque vel minimo pondere, vel si ipsi funes per se graves esse intelligentur,

nunquam tamen poterunt eò adduci ut in eodem plano consistant. Tandem etiam, ex octavo libro illud habebis : Omnis sectoris circuli semicirculo non majoris circa centrum circuli circumvoluti, existente axe motus ad planum ejusdem circuli sive sectoris, perpendiculari, centrum percussionis sive impetus in recta angulum sectoris bifariam dividente quæsitum, sic reperietur : Ut chorda arcus sectoris ad ipsum arcum, ita tres quadrantes semidiametri circuli ad rectam inter ipsius circuli centrum, & centrum percussionis sectoris interceptam. Ex tali centro quod extra sectorem aliquando existet, si impetus sectoris eo modo moti quo dictum est, excipiat, productâ ad id rectâ angulum bifariam dividente, si centrum illud extra sectorem excurrerit, erit impetus ille maximus omnium qui ex quovis puncto in eadem recta existente excipi possunt.

De his & aliis agemus in posterum, si ita tibi placuerit, Vir Clarissime, postquam litibus valere jussis, solidam inierimus amicitiam, quam, ut spero, non recusabis. Illius autem leges, quod ad litterarum commercium attinet, tales sunt. Nihil tentandi gratiâ scribam. Quicquid scripsero, nisi de eo dubitare me, aut illud quærere scripsero, verum existimasse censear. Quoties per otium licuerit alicujus enuntiati demonstrationem mittere, mittam : nisi misero, si cupias, quàm citò mittere teneam. His legibus, si quid addere, aut detrahere, immò, si ipsas prorsus tollere, & alias ferre voles, licet. Memineris tamen, quæstionibus agere tentandi gratiâ odiosum esse atque amico indignum ; neque enim omnia possumus omnes : tum etiam amicum delectare oportet, non torquere. Hæc si observaverimus, tunc procul dubio, & durabit amicitia ; & dum uterque nostrum vicissim & reciprocè docebit & docebitur, uterque amborum scientiam, salvâ tamen inventoris laude, possidebit.

DE LA PRATIQUE

D E S

GRANDS CADRANS

PAR LE CALCUL.



D I V E R S  
O U V R A G E S  
D E  
M. L'ABBÉ PICARD.

*Tome VI.*

O o o iij

CHINA

2 H D A S V U O

1911

1911



E LA PRATIQUE  
DES  
GRANDS CADRANS  
PAR LE CALCUL.

*Par M. PICARD.*



I l'on voit peu de grands cadrans qui soient bons, cela vient autant de la difficulté qu'il y a de bien pratiquer en grand, & sur un mur les regles vulgaires de la Gnomonique, que de l'ignorance de ceux qui ont, pour ainsi dire, cette curieuse & utile partie des Mathematiques. On dessein n'est pas de parler contre les pratiques Geometrie, ni de prendre à tâche de m'en passerrement; principalement lorsqu'elles sont simples & embaras de lignes : mais toutes choses bien confis, on demeurera d'accord que la meilleure ma-  
*de l'Acad. Tom. VI.*

P p p

niere pour bien réussir à la construction d'un grand cadran, est de le calculer; ce qui se peut faire à loisir & commodément dans le cabinet.

C'est cette maniere que je me suis proposé d'expliquer à ceux qui ont déjà quelque entrée dans la Gnomonique, & qui d'ailleurs savent la pratique des triangles sphériques & l'usage des logarithmes.

## CHAPITRE PREMIER.

### *Des préparations.*

**J**E suppose que l'endroit où l'on a dessein de faire un grand cadran soit bien plan, enforte qu'une regle y convienne par tout & en tout sens. Ce n'est pas qu'on ne puisse faire des cadrans sur toutes sortes de surfaces, quoiqu'irrégulieres; mais cela demande des pratiques particulieres, & souvent mécaniques.

On pourra commencer par un faux style qui sera de longueur à discretion & qui ne servira que pour connoître la position du plan à l'égard du ciel; le plus long sera toujours le meilleur, pourvû que son ombre puisse être terminée dans le plan: mais si on en veut mettre d'abord un qui soit pour demeurer, il sera bon d'avoir fait en petit sur le papier un dessein du cadran proposé; & pour cet effet il suffira d'avoir sçu à peu près par la Bouffole ou autrement la déclinaison du plan. Nous avons mis à la fin de ce Traité des Tables, où l'on trouvera tout ce qui est nécessaire pour faire promptement un cadran vertical, supposé la déclinaison du plan.

Par le moyen de ce dessein ou modele, on connoitra suffisamment la forme que l'on devra donner au cadran, & les heures que l'on y pourra ménager; comme aussi le lieu & la hauteur convenable du style. Sur quoi on peut remarquer en passant, que supposé deux

plans verticaux d'égale grandeur , mais de différente déclinaison ; celui qui déclinera le plus demandera une plus grande longueur de style , suivant la raison des sinus de complément des hauteurs du Pole sur ces plans. La raison est , que par ce moyen le rayon équinoxial fera d'une même longueur à tous.

La broche qui tiendra lieu de style sera recourbée & de figure propre , pour faire que le point qui répond perpendiculairement à l'extrémité du style , & que nous appellerons simplement le pied du style , soit dégagé du pied de la broche. On prendra garde aussi que le pied de cette broche n'embarrasse pas la ligne soustylaire. Tout cela se sçaura assez bien par le petit dessein que nous avons supposé.

Le style sera terminé par une plaque ronde dont le bord sera abattu par-dessous tout au tour en chanfrain , afin que l'ombre soit toujours causée par la surface supérieure de la plaque , au centre de laquelle il y aura un point frappé , qui puisse arrêter la pointe du compas. Le diamètre de cette plaque pourra être environ la 36<sup>me</sup> partie de la plus grande distance à laquelle l'ombre devra être portée.

On fera en sorte , en plantant la broche , que la plaque soit bien parallèle au plan du cadran , ce qui se pourra faire facilement avec une équerre présentée tout au tour ; ou bien simplement par le moyen de l'ombre , qui lorsqu'elle ne sera pas beaucoup éloignée du pied du style , devra être ronde. Je mets cette condition ; car bien qu'il soit vrai qu'une plaque ronde considérée sans épaisseur , & parallèle à un plan , fit sur le plan un ombre qui seroit toujours ronde si le soleil n'étoit qu'un point ; néanmoins à cause de la grandeur du disque du soleil , si cette ombre est reçue obliquement , elle se trouve étressie tout au tour par une infinité d'el-

lipfes de lumiere , dont les grands diamètres tendent vers le soleil , & font tous paralleles entr'eux ; deforte que cette ombre ne peut demeurer ronde que tandis que les ellipses de lumiere peuvent passer pour des cercles.

*De l'ombre qu'une plaque ronde exposée au soleil fait sur un plan parallele à la plaque.*

**S**I une plaque que je considere sans épaisseur est parallele à un plan , l'ombre du soleil reçu sur ce plan , à quelque obliquité que ce fût , seroit semblable & sensiblement égale à la plaque , si le soleil n'étoit qu'un point , à cause de la distance du soleil presque infinie. Mais pour comprendre ce qui doit arriver à l'ombre d'une plaque ronde , à cause de la grandeur du disque entier du soleil , il faut considerer qu'au lieu que le rayonnement du centre du soleil par le contour d'une plaque ronde parallele à un plan , enfermeroit toujours sur le plan un cercle d'ombre égal à la plaque ; au lieu de cela , dis-je , le rayonnement du disque entier du soleil , au travers du centre de la plaque , étant reçu obliquement sur le plan terminant , y feroit une ellipse de lumiere ; car il se feroit alors deux cônes de lumiere droits , & opposez l'un à l'autre , ayant leur sommet commun au centre de la plaque , & dont l'un auroit sa base droite dans le soleil , & l'autre seroit coupé obliquement par le plan terminant.

Nous appellerons cercle du milieu celui que l'on s' imagine fait du rayonnement du centre du soleil par le contour de la plaque ; comme aussi ellipse du milieu celle que nous avons imaginée faite par le rayonnement du disque entier du soleil au travers du centre de la plaque.

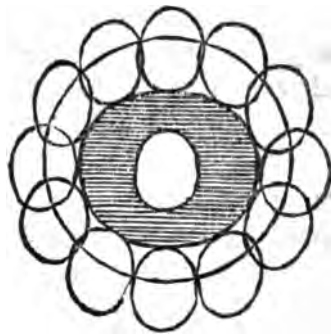
Cela supposé , il faut s'imaginer. 1°. Que le cercle

d'ombre, tel qu'il seroit si le soleil n'étoit qu'un point, est diminué par une infinité d'ellipses de lumière faites du rayonnement de tout le disque du soleil au travers de chacun des points de la circonférence de la plaque, lesquelles ellipses nous appellerons laterales.

2°. Que tous les grands diamètres des ellipses laterales sont paralleles & égaux à celui de l'ellipse du milieu; car il faut s'imaginer des cônes égaux, dont les axes qui sont des rayons venans du centre du soleil, sont tous paralleles, & par conséquent également inclinés au plan terminant qui les coupe tous à une égale distance de leur sommet.

3°. Que dans toutes les ellipses le point qui représente le centre du soleil, & auquel aboutit l'axe du rayonnement n'est pas le centre de l'ellipse; mais coupe inégalement le grand diamètre en raison des côtes du cône, ou des secantes des hauteurs des deux bords supérieurs & inférieurs du soleil considéré à l'égard du plan terminant, ou en raison réciproque des sinus des mêmes hauteurs.

4°. Que ces mêmes points qui représentent le centre du soleil dans les ellipses laterales, sont tous rangez dans la circonférence du cercle du milieu; parce que les mêmes rayons qui viennent du centre du soleil, & qui passant par le contour de la plaque vont aboutir à la circonférence du cercle du milieu, sont aussi les axes des cônes lateraux, d'où il s'ensuit que l'ombre est plus diminuée du côté du soleil qu'à la partie opposée, d'autant que la plus grande portion du grand diamètre



de chaque ellipse laterale se trouve dans le cercle du côté du soleil, au lieu que de l'autre côté est la moindre : de sorte que l'ombre est rétrécie comme en ovale, mais plus d'un côté que d'autre, jusques à ce qu'elle se perde enfin à mesure que les ellipses croissent, & cette maniere d'ovale d'ombre sera contreposée à l'égard des ellipses de lumiere.

5°. Que de même qu'on s'est imaginé une infinité d'ellipses de lumiere rangées à l'entour du cercle du milieu qui demeure toujours égal à la plaque, on peut aussi s'imaginer une infinité de cercles égaux à celui du milieu, qui auront leurs centres dans les bords de l'ellipse du milieu, lesquels cercles seront faits par le rayonnement de chaque point du bord du disque du soleil, par le contour entier de la plaque.

6°. Que si au lieu d'une plaque qui fait ombre, on considere un trou rond & parallele au plan terminant; il y aura une infinité de cercles de lumiere égaux au trou, qui venant du rayonnement de chaque point des bords du soleil par le trou tout entier, ont leurs centres dans les bords de l'ellipse qui représente le soleil: ou bien on aura une infinité d'ellipses de lumiere rangées dans la circonférence d'un cercle égal au trou, de la maniere que nous avons dit à la quatrième remarque.



## CHAPITRE II.

*Des préparations.*

## PREMIER PROBLEME.

*Trouver le pied du style.*

**A**YEZ un grand compas à verge, dont les pointes soient recourbées en dedans : faites tenir une des pointes de ce compas appliquée au centre de la plaque du style, pendant qu'avec l'autre pointe vous décrirez sur le mur ou sur le plan du cadran un cercle qui soit le plus grand qu'il se pourra commodément. Le centre de ce cercle sera le pied du style requis.

On trouve communément le centre d'un cercle par trois points pris dans sa circonférence ; mais la pratique la plus expeditive, sera d'ouvrir premièrement le compas de la grandeur du diamètre entier du cercle, puis l'ayant transportée sur une échelle de parties égales, en prendre la moitié pour servir à trouver le centre requis.

Il faut prendre garde en traçant le cercle, de ne pas faire plier le compas, & supposé que le plan sur lequel on travaille soit bien dressé, on sera assuré que l'on aura bien fait, si la hauteur du style, le demi-diamètre du cercle, & la première ouverture du compas qui a servi à décrire le cercle, sont les trois côtes d'un triangle rectangle, ce qui se connoîtra facilement par les quarez, en posant pour son hypoténuse l'ouverture du compas qu'on a prise d'abord. On voit par là qu'il auroit suffi d'avoir deux de ces grandeurs pour en conclure la troisième ; joint que si la première ouverture du compas pour

décrire le cercle, a été faite exprès de 1000 parties, & que le demi-diamètre du cercle se soit trouvé, par exemple, de 643 parties, lequel nombre cherché dans les Tables des sinus est celui de 40 degrés 1 minute; son sinus de complément 766 sera la hauteur du style. Il est vrai que dans les Tables le sinus de 40<sup>d</sup> 1<sup>m</sup> est 7658754; mais à cause que les quatre figures que j'ai retranchées valent la fraction  $\frac{8754}{10000}$ , qui approche de l'entier, j'ai dû prendre le nombre 766 au lieu de 765.

On doit aussi retrancher les quatre dernières figures des nombres naturels des sinus, des tangentes & des sécantes, lorsque l'on fait le rayon de 1000 parties, ou de quatre figures seulement, parce que dans les Tables il est ordinairement de huit figures. Mais à l'égard des logarithmes, parce qu'ils sont faits comme si le rayon étoit de onze figures, il s'ensuit que lorsqu'on voudra faire le rayon de 1000 parties, il faudra déprimer de sept unitez la caractéristique des logarithmes des sinus & des tangentes; quoique leurs nombres naturels n'ayent été déprimez que de quatre figures, ce qui soit dit seulement en passant pour servir d'avertissement.

### Définition.

**L** *A ligne verticale* est la section d'un plan perpendiculaire au plan du cadran, & qui passe par le centre de la plaque du style, ou bien par son pied, ce qui est la même chose.



## SECOND PROBLEME.

*Trouver la ligne verticale.*

**S**USPENDEZ un plomb au centre de la plaque du style, ou bien au côté d'une petite équerre dressée sur le pied du style, puis bornoyant par le pied du style, marquez sur le mur un autre point qui soit caché sous le fil du plomb : la ligne tirée par le pied du style, & par le point que vous aurez marqué, sera la verticale que l'on cherche.

## REMARQUE.

**O**N pourra encore trouver cette verticale par le moyen d'une ligne horizontale ou de niveau tracée sur le mur en quel endroit on voudra ; car la ligne que l'on mènera par le pied du style, & perpendiculaire sur cette ligne horizontale, sera la verticale que l'on cherche.

## TROISIÈME PROBLEME.

*Trouver l'inclinaison du mur, ou du plan du Cadran à l'égard de l'horizon.*

**C**ETTE opération se fera par le moyen de l'instrument qu'on appelle *Inclinatoire* ou *Réclinatoire*, qui aura pour cet effet quelques degrez & leurs minutes marquées sur un petit limbe qui doit être au bas : mais au défaut de cet instrument, & principalement lorsqu'il ne fait point de vent, on pourra se servir d'un plomb & d'une grande règle, observant de combien sur certaine hauteur de la règle le plomb s'éloigne ou s'appro-

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

Qqq

che du plan du cadran, en appliquant un des côtez de la regle contre le mur sur la verticale, le plomb étant attaché au haut de cette règle. Si le plomb s'approche plus du mur par le bas que par le haut, le mur sera en talus; au contraire, s'il s'éloigne plus du mur par le bas que par le haut; le mur sera surplombé.

On trouvera l'angle de l'inclinaison du mur à l'égard de l'horison, c'est-à-dire, l'angle que le mur fait avec le vertical, si l'on fait comme la longueur du fil du plomb sur la règle, à la difference d'entre les deux distances perpendiculaires au mur, depuis les extrémités du fil du plomb sur la règle; ainsi le rayon ou sinus total au sinus de l'angle de l'inclinaison.

### CHAPITRE III.

#### *Des observations pour un grand cadran.*

**P**OUR être assuré de réussir à faire un bon cadran, il ne faut point épargner les observations. Car quoique dans la theorie, comme on verra ci-après, un point d'ombre observé soit suffisant pour trouver ce qui est nécessaire pour sa construction; on ne doit pas pour cela negliger dans la pratique d'en observer plusieurs pour operer avec plus d'exactitude. Il ne faut pas aussi prétendre se passer des choses que l'on peut sçavoir d'ailleurs, comme de la hauteur du pole du lieu où l'on est, & de la déclinaison du soleil: elles sont si faciles à sçavoir, que nous les supposérons toujours connues lorsqu'on pourra s'en servir, puisque l'on ne sçauroit avoir trop de choses données.

Il faut premierement considerer que les cadrans qui sont faits autour de la terre font aussi bien leur effet, que si l'extrémité du style étoit posée à son centre, &

que dans un même lieu on peut faire servir toute sorte de cadrans. De plus, on doit aussi considérer tout plan comme un horizontal pour quelque lieu de la terre, puisqu'en effet, il est toujours parallèle à quelque horizon; de sorte qu'il a son zenith, son méridien, & sa hauteur de pole particuliere. D'où il est facile de voir que si le méridien du plan convient avec celui du lieu, un cadran sur ce plan se fera tout simplement à la maniere d'un horizontal pour une certaine hauteur de pole. Mais si les méridiens sont differens, les heures du plan seront aussi differentes de celles du lieu, & il sera necessaire d'en faire la réduction; tout de même que si étant sous un méridien different de celui de Paris, on vouloit avoir un cadran horizontal qui montrât les heures de Paris, c'est-à-dire, les heures, comme on les compte à Paris dans le même temps.

## PREMIER PROBLEME.

*Trouver par observation la ligne soustylaïre.*

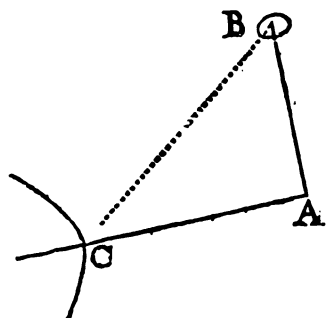
**L**A ligne qu'on appelle soustylaïre est proprement la ligne méridienne du plan du cadran. Marquez plusieurs points d'ombre correspondans devant & après la soustylaïre, comme on fait ordinairement pour trouver la ligne méridienne sur un plan horizontal. Car comme je suppose que l'on sçache à peu près l'heure à laquelle l'ombre devra être aux environs de la soustylaïre; on sçaura assez les temps convenables pour les observations devant & après. Cette pratique hors les solstices a besoin de quelque correction que nous donnerons à la fin de ce Traité.

## S E C O N D P R O B L E M E.

*Trouver par observations la hauteur du pôle sur le plan.*

**D**E même qu'on trouve la hauteur du pôle d'un lieu par la hauteur méridienne du soleil, supposé sa déclinaison ; on trouve aussi la hauteur du pôle sur le plan, par l'observation de l'ombre la plus courte & la plus proche du pied du style. Pour cet effet il faut dans un même jour, avoir marqué assez de points d'ombre aux environs de la soustylaire pour être assuré que celui de la plus courte ombre y est compris. La plus petite distance entre le pied du style & la trace d'ombre observée, sera ce que j'appelle la plus courte ombre.

Maintenant il faut faire comme la hauteur du style AB est à la plus courte ombre AC, ainsi le rayon est à la tangente de l'angle ABC, qui est la distance entre le



soleil dans le méridien du plan & le zenith du plan. De sorte que si le plan regarde vers le midy, il faudra ôter la déclinaison septentrionale, ou bien ajouter la méridionale, pour avoir la distance entre le zenith du plan & l'équinoxial, laquelle distance est égale à la hauteur du pôle. Mais si le

plan regarde le Septentrion, il faudra ôter la déclinaison méridionale, ou bien ajouter la septentrionale à l'angle ABC pour avoir la hauteur de pôle du plan.

## REMARQUE.

**I**L faut entendre par ces mots de plan qui regarde le midy, que c'est lorsque la soustylaie depuis le pied du style jusqu'à la trace de l'ombre, tend vers le midy; & au contraire, par les mots de plan qui regarde le Septentrion.

Il faut aussi remarquer que lorsque le zenith est entre le lieu du soleil & l'équateur, il faut ôter l'angle ABC à la déclinaison méridionale ou l'ajouter à la septentrionale, de même qu'il est marqué ci-dessus, pour ôter ou ajouter la déclinaison à l'angle ABC. Par exemple, si le plan regarde le Septentrion, c'est-à-dire, si la soustylaie depuis le pied du style jusqu'à la plus courte ombre, tend vers le Septentrion, & que le zenith soit entre l'équateur & le lieu du soleil, il faudra ôter l'angle ABC à la déclinaison méridionale pour avoir la hauteur du pôle; & au contraire, l'ajouter à la déclinaison septentrionale.

A l'égard de la plus courte ombre, qui sera quelquefois acourcie par la réfraction, il y aura quelque correction à faire dont nous parlerons à la fin.

## L E M M E.

*Mesurer sur un plan un angle donné, ou bien en faire un de telle grandeur qu'on voudra.*

**D**E la pointe de l'angle, comme centre, & de l'intervale de 1000 parties, décrivez un arc & prenez-en la corde; la moitié de cette corde cherchée dans les Tables des sinus, fera le sinus de la moitié de l'angle requis; comme si la corde est 518, dont la moitié est

Qq q. iij.

259, l'angle sera de  $30^{\text{d}}, 2^{\text{m}}$ . Car ayant cherché dans les Tables le nombre 259 dans la colonne des sinus, on trouve l'angle qui lui répond de  $15^{\text{d}}, 1^{\text{m}}$ , en supposant toujours le rayon de 1000 parties.

Suivant cette pratique on fera facilement un angle droit en prenant une corde de 1414 parties ; ce qui sera commode pour les perpendiculaires.

## R E M A R Q U E.

**M**onsieur Picard suppose que l'on a toujours une règle divisée en parties égale, desquelles on se sert dans toutes les opérations qu'il faut faire pour déterminer quelque longueur ; & que 1000 de ces parties valent le rayon.

## T R O I S I È M E P R O B L È M E.

*Deux points d'ombre étant donnez par observation, trouver la hauteur du pôle sur le plan & la ligne soustylaire, supposé la déclinaison du soleil.*

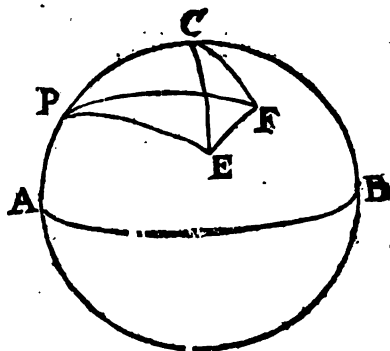
**I**L faut premièrement mesurer les distances entre chaque point d'ombre observé, & le pied du style, dont je suppose la hauteur connue ; & par ce moyen trouver la distance entre le soleil & le zenith du plan pour chaque point d'ombre.

Il faut ensuite mesurer l'angle enfermé entre les deux lignes que l'on doit avoir menées du pied du style aux deux points d'ombre.

Cela supposé, la solution de ce probleme est la même que quand on cherche la hauteur du pôle du lieu, & la ligne méridienne par le moyen de deux hauteurs de soleil & de l'angle compris entre les deux azimuths qui passoient par le soleil au temps de l'observation des

points d'ombre. Voici l'explication de l'opération qu'il faut faire.

AB est sur la sphere un horison parallele au plan du cadran. C est son zenith. P le pole élevé sur le plan; & par conséquent APCD sera le cercle meridien de ce même horison. CE, CF sont les distances du zenith jusqu'aux lieux du soleil en E & F dans les observations des points d'ombre; & l'angle ECF est celui qui est compris par les deux lignes d'ombre, qui représentent les azimuths du plan CE, CF.



Au triangle spherique ECF, on connoît les deux côtez CE, CF & l'angle ECF qu'ils comprennent; c'est pourquoi on trouvera par les règles de Trigonometrie la valeur du côté EF, & l'angle EFC. Ensuite au triangle PEF, supposé la déclinaison du soleil, les côtez PE, PF seront connus, EF vient d'être trouvé dans le triangle CEF; on trouvera donc aussi l'angle EFP, qui étant ôté de EFC connu, il restera l'angle PFC. Mais les côtez PF, FC sont donnez; c'est pourquoi dans le triangle PFC, les deux côtez & l'angle compris étant connus, on trouvera le côté opposé qui est l'arc PC du méridien compris entre le zenith & le pole, qui est le complément de la hauteur du pole sur le plan. On trouvera aussi dans le même triangle, l'angle PCF ou son supplément à deux droits ECB, qui est l'angle que doit faire la soustylaire avec la ligne d'ombre, dont le point a été marqué lorsque le soleil étoit en F. On aura donc par ce moyen la position de la soustylaire sur le plan & la hauteur du pole.

Ce probleme comprend les deux premiers ; mais quand il ne seroit pas embarrassé de calculs , il ne s'en faut servir qu'au besoin : car c'est de même que si l'on vouloit trouver la hauteur de pole d'un lieu autrement que par les hauteurs méridiennes ; & la ligne méridienne autrement que par des observations correspondantes faites devant & après midy.

## R E M A R Q U E S.

**S**UR le premier article de ce probleme, on doit remarquer que pour trouver la distance en degrez entre le zenith du plan & le lieu du soleil au temps où l'on a marqué les points d'ombre , il faut résoudre un triangle rectangle & rectiligne, dont l'un des côtez autour de l'angle droit est la hauteur du style, & l'autre est la longueur de l'ombre ; car l'angle qu'on trouvera opposé à ce dernier côté sera l'arc de l'azimut, comme CE ou CF compris entre le zenith C & le lieu du soleil E ou F au temps où l'on a marqué les points d'ombre.

Sur le second article, pour mesurer l'angle compris entre les deux lignes d'ombre, il le faut faire par le moyen d'un Rapporteur sur le plan, ou bien par la Trigonometrie rectiligne, ayant mesuré exactement la longueur des deux lignes d'ombre & la distance entre les deux points d'ombre : car par le moyen des trois côtez connus dans le triangle rectiligne on trouvera l'angle opposé au côté entre les deux points d'ombre, qui est celui de la sphere marqué ECF.

Sur le dernier article, il faut remarquer que sur un très-grand nombre de plans, on ne sçauroit trouver la sonstylaire par observation ni la plus courte ombre ; c'est pourquoi on est très-souvent obligé de se servir de ce probleme.

## QUATRIEME

## QUATRIÈME PROBLÈME.

*La ligne soustylaire & un point d'ombre étant donnez ;  
trouver la hauteur du pole sur le plan , supposé  
qu'on sçache la déclinaison du soleil.*

**I**L faut avoir mesuré l'angle que la ligne menée du pied du style au point d'ombre, fait avec la soustylaire ; comme aussi la distance entre le zenith du plan & le soleil, supposé, la hauteur du style & la longueur de l'ombre, comme au troisième problème.

Cela supposé, soit dans la figure précédente du problème troisième, le lieu du soleil au point F sur la sphère. Par les choses qu'on suppose connues, on aura dans le triangle sphérique CPF les côtez CF, PF & l'angle azimuthal FCP ; c'est pourquoi on trouvera PC qui sera le complément de la hauteur du pole sur le plan.

## REMARQUES.

**L**A déclinaison du soleil doit être connue au temps où l'on a marqué le point d'ombre, comme dans toutes les opérations où l'on se sert de la déclinaison du soleil, à cause qu'elle change continuellement.

On remarquera aussi, comme on a fait dans le problème précédent, que pour mesurer l'angle que fait la soustylaire avec la ligne de l'ombre menée du pied du style jusqu'au point d'ombre, il faut se servir du Rapporteur, ou bien de la Trigonometrie rectiligne, en prenant un point où l'on voudra sur la soustylaire duquel on menera une ligne jusqu'au point d'ombre ; car par la mesure on connoîtra les trois côtez de ce triangle, d'où l'on viendra à la connoissance de l'angle que l'on cherche.

Rec. de l'Acad. Tom. VI.

R r r

*Pour la distance entre le zenith du plan & le lieu du soleil au temps où l'on a marqué le point d'ombre, on se servira de ce que j'ai dit dans la remarque sur le premier article du troisième problème.*

## CINQUIÈME PROBLÈME.

*La hauteur du pole sur le plan, un point d'ombre, & la déclinaison du soleil étant donnez, trouver l'angle que fait la soustylaire avec la ligne de l'ombre.*

CETTE proposition est la converse de la précédente. Car par l'hypothese les trois côtes du triangle  $CPF$  étant donnez, on trouvera l'angle  $PCF$  ou  $FCB$  que la soustylaire fait avec la ligne de l'ombre donnée.

## R E M A R Q U E S.

Par la hauteur du pole donnée on aura son complément, qui sera l'arc  $CP$  : la longueur de l'ombre depuis le pied du style jusqu'au point d'ombre servira à trouver l'arc azimuthal  $CF$ , comme j'ai dit dans la première remarque sur le troisième problème ; & la déclinaison du soleil étant ajoutée ou ôtée à 90 degrez, donnera l'arc  $PF$ .

Il faut ôter la déclinaison boréale à 90 degrez, & ajouter la méridionale, si  $P$  est le pole boréal ; mais au contraire, il faudra ajouter la boréale & ôter la méridionale si  $P$  est le pole austral.

## Définitions.

I. LA déclinaison d'un plan est proprement l'angle que la section de ce plan & de l'horison du lieu fait avec la ligne du levant & du couchant équinoxial : mais c'est

aussi l'angle qui se fait au zenith du lieu entre son méridien & un vertical, qui joint le zenith du lieu avec le zenith du plan, & qui pour ce sujet sera appelé vertical commun, dont la section sur le plan, est la ligne verticale.

I I. Plan oriental ou occidental, est celui qui décline vers l'orient ou vers l'occident, & dont le zenith est dans la partie orientale ou occidentale de la sphère, laquelle est partagée en deux hemisphères par le méridien du lieu.

I I I. Plan méridional ou septentrional, est celui dont le zenith est dans la partie méridionale ou septentrionale de la sphère, laquelle est partagée en deux hemisphères par l'équateur. Le pole méridional est élevé au-dessus des plans méridionaux, & le pole septentrional est élevé au-dessus des plans septentrionaux.

## SIXIÈME PROBLEME.

*L'angle de la soustylaire avec la verticale, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan, s'il y en a, étant donnez, trouver la hauteur du pole sur le plan, la différence des meridiens & la déclinaison du plan.*

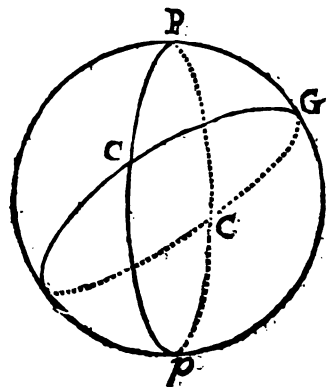
**P** est le pole septentrional, G le zenith du lieu ; donc PG le méridien du lieu, qui partage le globe en deux hemisphères, l'un oriental qu'il faut imaginer en devant, & l'autre occidental en arriere dans la partie opposée. C est le zenith du plan : PC une partie du méridien du plan, & GC le vertical commun.

Au triangle PGC le côté PG est le complément de la hauteur du pole du lieu que je suppose septentrional. PC étant moindre que  $90^d$  sera aussi le complément de la hauteur du pole du plan, lequel sera septentrional :

Rrr ij

mais PC étant plus grand que  $90^d$ , son supplément à deux droits sera la hauteur du pôle méridional du plan.

GC est la distance entre le zenith du lieu & celui du plan, laquelle est de  $90^d$  si le plan est vertical ou à plomb :



mais elle sera moindre que  $90^d$  si le plan est en talus ; & enfin elle sera plus grande que  $90^d$  s'il est panché en devant ou surplombé ; enforte que le défaut ou l'excès à l'égard de  $90^d$ , est égal à l'inclinaison du plan. Cela se comprendra facilement en considérant que le zenith d'un plan, qui est en talus, est élevé sur l'horizon du lieu ; mais si le plan est sur-

plombé, son zenith est abaissé au-dessous de l'horizon.

Au triangle GPC, les côtez GP, GC c'est à sçavoir le complément de la hauteur du pôle du lieu, & le complément de l'inclinaison du plan, sont donnez par l'hypothèse, aussi que bien l'angle GCP, qui est égal à celui que la soustylaire fait avec la verticale : on connoitra donc toutes les autres parties de ce même triangle ; c'est à sçavoir CP complément de la hauteur du pôle sur le plan, GPC la difference des méridiens, & CGP la déclinaison du plan ou son supplément. Surquoi il faut remarquer que pour trouver la difference des méridiens, l'angle PCG de la soustylaire avec la verticale étant donné, il ne faut qu'une simple proportion. Car comme le sinus de complément de la hauteur de pôle du lieu, est au sinus de complément de l'inclinaison du plan, s'il y en a, ou au rayon, si le plan est à plomb ou vertical ; ainsi le sinus de l'angle que fait la soustylaire avec la verticale, au sinus de la difference des méridiens.

## REMARQUE.

**J**'Ai trouvé à propos d'ajouter à ce problème & aux suivans, quelques exemples pour les rendre plus faciles. Soit donc l'angle de la soustylaire avec la verticale de  $30^{\text{d}}, 25^{\text{m}}$ , lequel angle est compris sur la sphere par les arcs de cercle CP, CG. La hauteur du pole du lieu soit comme à Paris,  $48^{\text{d}}, 50^{\text{m}}$ ; & par conséquent l'arc PG, qui est compris entre le pole & le zenith, sera le complement de cette hauteur  $41^{\text{d}}, 10^{\text{m}}$ . Supposons aussi que le plan du cadran ou le mur sur lequel on doit faire le cadran soit incliné en talus, c'est-à-dire panché en arriere par le haut, & que cette inclinaison soit de  $5^{\text{d}}$ , dont le complement  $85^{\text{d}}$ , est marqué sur la sphere par l'arc de cercle CG. Ces trois choses étant données, on trouvera par la Trigonometrie sperique le trois autres parties de ce même triangle; à sçavoir l'arc CP de  $54^{\text{d}}, 52^{\text{m}}, 35^{\text{f}}$ , qui sera le complement de la hauteur du pole sur le plan du cadran; & par conséquent la hauteur du pole sur ce plan sera de  $35^{\text{d}}, 7^{\text{m}}, 25^{\text{f}}$ . On aura par ce moyen le centre du cadran, qui est l'endroit où l'axe rencontre la soustylaire, ce qui se peut trouver par la resolution d'un triangle rectiligne & rectangle dont l'un des côtez autour de l'angle droit, est la hauteur du style, & l'angle complement de la hauteur du pole qu'on a trouvé est opposé à la distance, depuis le pied du style jusqu'au centre du cadran, qui est l'autre côté de ce triangle autour de l'angle droit & lequel on cherche. L'angle CPG qui est la difference entre les meridiens, se trouvera de  $50^{\text{d}}, 0^{\text{m}}, 50^{\text{f}}$ , ce qui peut servir à déterminer la rencontre de la meridienne du lieu avec l'équateur. Enfin l'angle PGC sera de  $38^{\text{d}}, 58^{\text{m}}, 55^{\text{f}}$ , qui est la déclinaison du plan: cette déclinaison se prend sur l'horison depuis la verticale, qui rencontre toujours la ligne horizontale du plan à angles droits.

Rrr iij

## S E P T I È M E   P R O B L È M E .

*La plus courte ombre ou la hauteur du pôle sur le plan ; la hauteur du pôle du lieu , & l'inclinaison du plan étant données ; trouver la soustylaire , la difference des meridiens , & la déclinaison du plan.*

**L** Es mêmes choses étant exposées que dans le problème précédent , on aura les trois côtes données dans le triangle  $GCP$  ; c'est pourquoi on trouvera les angles , qui est ce que l'on cherche.

Il faut remarquer que la précédente détermination par la position de la soustylaire donnée , est préférable à celle-ci , lorsque le plan décline peu ; parce qu'alors pour beaucoup de changement à l'angle soustylaire , il en arrive peu à la hauteur du pôle sur le plan : mais quand la déclinaison est grande , c'est tout le contraire.

Remarquez aussi que dans la pratique ce problème & le précédent , sont toujours préférables au quatrième & au cinquième.

## R E M A R Q U E S .

**I** L prend ici la plus courte ombre ou la hauteur de pôle sur le plan , comme une même chose ; cependant pour déterminer la hauteur du pôle sur le plan du cadran par la plus courte ombre , il faut nécessairement connoître la déclinaison du soleil , comme on l'a enseigné dans le second problème de ce chapitre .

Dans le triangle  $CPG$  l'arc  $CP$  est le complément de la hauteur du pôle sur le plan ; c'est pourquoi si la hauteur du pôle sur le plan est donnée , il en faudra prendre le complément pour avoir l'arc  $CP$  de ce triangle . La hauteur du pôle du lieu étant aussi donnée , on en doit prendre le com-

piement pour former l'arc  $PG$  ; & enfin l'inclinaison du plan étant donnée , on aura aussi l'arc du vertical commun compris entre les deux zeniths ,  $C$  &  $G$  , lequel arc  $CG$  est le complément de cette inclinaison.

## E X E M P L E.

**S**oit comme ci-devant la hauteur du pôle du lieu de  $48^{\text{d}}$ ,  $50^{\text{m}}$ , pour Paris ; l'arc  $PG$  qui est son complément sera donc de  $41^{\text{d}}$ ,  $10^{\text{m}}$ . Soit la hauteur du pôle sur le plan de  $32^{\text{d}}$ ,  $10^{\text{m}}$ , dont le complément qui est l'arc  $CP$  sera  $57^{\text{d}}$ ,  $50^{\text{m}}$ . Enfin soit l'inclinaison du mur  $15^{\text{d}}$ ,  $20^{\text{m}}$ , dont le complément est l'arc  $CG$  de  $74^{\text{d}}$ ,  $40^{\text{m}}$ , on trouvera par la Trigonometrie , que l'angle  $PCG$  , qui est celui que la soustylatre fait avec la verticale , est de  $41^{\text{d}}$ ,  $26^{\text{m}}$ ,  $15^{\text{s}}$  ; l'angle  $CPG$  , qui est la difference entre les meridiens , est de  $75^{\text{d}}$ ,  $50^{\text{m}}$ ,  $30^{\text{s}}$  ; & l'angle  $PGC$  qui est la déclinaison du plan , est de  $58^{\text{d}}$ ,  $19^{\text{m}}$ ,  $45^{\text{s}}$ .

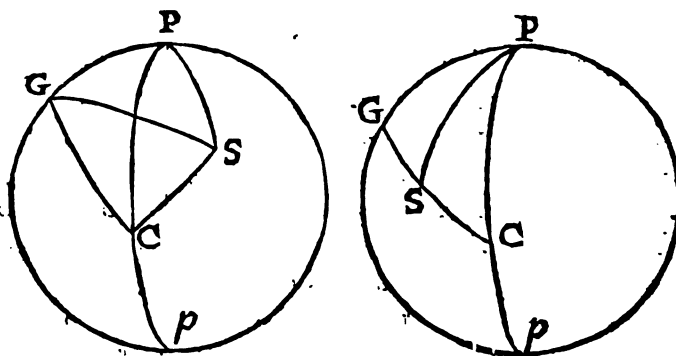
## HUITIÈME PROBLÈME.

*Un point d'ombre , la déclinaison du soleil , la hauteur du pôle du lieu , & l'inclinaison du plan étant donnez , trouver la hauteur du pôle sur le plan.*

**I**L faut premierement par la longueur de l'ombre & par la hauteur du style trouver la distance , entre le centre du soleil & le zenith du plan , comme aussi l'angle que la ligne de l'ombre fait avec la verticale. Cela supposé.

Soit dans la figure du sixième problème , les arts  $SC$  ,  $SG$  , les distances entre le soleil ,  $S$  & les zeniths  $C$  &  $G$  ; & soit aussi  $SP$  , la distance entre le soleil & le pôle boréal.

Soit pour le premier cas l'arc CS séparé d'avec l'arc CG. Au triangle GCS les côtez CG, CS sont donnez aussi bien que l'angle GCS, qui est celui que la ligne d'ombre fait avec la verticale; on connoitra donc SG & l'angle CSG. Mais au triangle GSP les trois côtez étant



connus on trouvera l'angle GSP. Mais CSG est connu; c'est pourquoi on aura l'angle CSP. Puis enfin au triangle CSP, les côtez CS, SP, & l'angle CSP étant connus, on trouvera CP, qui est la distance entre le pôle boréal & le zenith du plan.

Pour le second cas, si S est sur l'arc CG, comme il arrivera, lorsque le point d'ombre observé fera dans la verticale; ayant ôté CS de CG, il restera SG. Puis au triangle SPG, les trois côtez étant connus, on trouvera l'angle GSP supplément de PSC. Enfin au triangle PSC, l'angle PSC & les côtez PS, CS étant connus, on trouvera CP.

#### R E M A R Q U E S.

**O**N demande dans ce probleme quatre choses, quoique dans un triangle, il suffise d'en avoir trois pour sa resolution: mais il faut remarquer que ces quatre choses, *sont*

*Sont employées dans la resolution de differens triangles.*

*On trouvera la distance entre le centre du soleil & le zenith du plan, suivant la remarque que j'ai faite, sur le premier article du troisième probleme.*

*Pour l'angle qui est compris par la ligne de l'ombre, c'est-à-dire par la ligne, qui va du pied du style au point d'ombre, & par la verticale, lequel par consequent a son sommet au pied du style puisque ces deux lignes passent par le pied du style, on en prendra la grandeur ou avec le Rapporteur, ou par le moyen d'un autre ligne tirée du point d'ombre à quelque point de la verticale, laquelle on mesurera, & dont on formera un triangle rectiligne, dans lequel on connoitra les trois côtes; & l'angle opposé au côté pris à volonté, sera l'angle qu'on cherche.*

*Lorsqu'on dit ici, soit dans la figure du sixième probleme les arcs, &c. c'est-à-dire, que les arcs marquez ici GP, GC, CP soient les mêmes que ceux que l'on a marquez des mêmes lettres, dans la figure du sixième probleme. GP sera donc le complement de la hauteur du pole du lieu; CG sera le complement de l'inclinaison du plan, ou l'arc entre le zenith du lieu, & le zenith du plan; enfin CP sera le complement de la hauteur du pole sur le plan.*

*De plus, comme le point S est le centre du soleil, au triangle GCS, puisque l'arc CG représente la verticale, l'arc CS représentera la ligne de l'ombre; & l'angle GCS sera égal à l'angle compris par la verticale & par la ligne de l'ombre, puisque le point C, qui est le zenith, est dans la ligne du style élevée perpendiculairement au-dessus du pied du style, & que les plans des cercles CS, CG s'entrecourent dans cette même ligne: car sans cela l'angle sperique ne seroit pas égal au rectiligne.*

## E X E M P L E.

**S**oit dans le triangle GCS l'arc GC donné, comme ci-devant, de  $74^{\text{d}}, 40^{\text{m}}$ , & l'arc CS de  $35^{\text{d}}, 8^{\text{m}}$ , qui est l'arc compris entre le zenith du plan, & le soleil S; & enfin l'angle GCS de  $59^{\text{d}}, 33^{\text{m}}$ . Ces trois parties du triangle GCS étant données, on trouvera par la Trigonometrie, le côté GS de  $60^{\text{d}}, 9^{\text{m}}, 50^{\text{f}}$ ; & l'angle CSG sera de  $106^{\text{d}}, 34^{\text{m}}, 40^{\text{f}}$ .

Maintenant dans le triangle GSP les trois côtés sont connus, à scavoir SG que l'on vient de trouver de  $60^{\text{d}}, 9^{\text{m}}, 50^{\text{f}}$ ; mais le côté SP étant la distance entre le soleil & le pole, on le connoitra en ajoutant ou en ôtant la déclinaison au quart de cercle, suivant la nature de la déclinaison, comme on l'a expliqué dans la remarque sur le second problème de ce chapitre. Soit donc SP de  $80^{\text{d}}, 17^{\text{m}}$ , & GP étant comme dans le problème précédent, de  $41^{\text{d}}, 10^{\text{m}}$ , on trouvera l'angle GSP de  $38^{\text{d}}, 32^{\text{m}}, 0^{\text{f}}$ .

Enfin au triangle CSP on a le côté CS, comme ci-dessus de  $35^{\text{d}}, 8^{\text{m}}$ , le côté SP de  $80^{\text{d}}, 17^{\text{m}}$ , & l'angle CSP de  $145^{\text{d}}, 6^{\text{m}}, 40^{\text{f}}$ , qui est la somme dans cet exemple des deux angles CSG, GSP. On trouvera le côté CP de  $109^{\text{d}}, 6^{\text{m}}, 4^{\text{f}}$ , qui sera la distance entre le zenith du plan & le pole boreal, pourvu que l'on ait pris l'arc SP, par rapport au pole boreal.

Pour le second cas, le calcul en est facile, après avoir entendu celui que je viens de faire; il est même un peu plus simple, puisqu'on n'y emploie que la résolution de deux triangles, & qu'il y en a trois dans le précédent. Si l'on vouloit réduire cette operation à ce cas, il faudroit marquer par observation, sur la ligne verticale, le point d'ombre dont on se sert.

## NEUVIÈME PROBLÈME.

*Les mêmes choses que dans le huitième problème, étant données, trouver la déclinaison du plan.*

DANS les figures précédentes, au triangle GCS on connoitra GS, & l'angle CGS. Puis au triangle SGP, les trois côtes étant connus, on trouvera l'angle SGP. Mais CGS est connu; on aura donc CGP, ou son supplément CGP, qui est la déclinaison du plan.

## REMARQUES.

**S**UPPOSONS les angles & les côtes donnez dans les triangles, dont il faut faire la resolution, de la même grandeur que dans l'exemple précédent.

On a déjà résolu le triangle GCS, & l'on a trouvé le côté GS de  $60^{\text{d}}, 9^{\text{m}}, 50^{\text{f}}$ , l'on trouvera aussi dans ce même triangle, l'angle CGS de  $34^{\text{d}}, 53^{\text{m}}, 2^{\text{f}}$ . Ensuite, au triangle, GSP, les trois côtes étant connus, comme ci-devant, on trouvera l'angle SGP de  $111^{\text{d}}, 5^{\text{m}}, 0^{\text{f}}$ , qui étant joint à l'angle CGS de  $34^{\text{d}}, 53^{\text{m}}, 2^{\text{f}}$ , fera l'angle CGP de  $145^{\text{d}}, 58^{\text{m}}, 2^{\text{f}}$ ; ou son supplément  $34^{\text{d}}, 1^{\text{m}}, 58^{\text{f}}$ , qui est l'angle de la déclinaison du plan, c'est-à-dire, l'angle que le vertical du plan fait avec le meridien du lieu.

Dans tous ces calculs des triangles, il faut toujours bien prendre garde à prendre les suppléments des arcs & des angles qu'on trouve, quand ce qui est donné le demande; car par le calcul on n'a seulement que les angles aigus, comme dans l'exemple ci-dessus, où l'angle CSG se trouve par le calcul de  $73^{\text{d}}, 25^{\text{m}}, 20^{\text{f}}$ , il faut prendre son supplément de  $106^{\text{d}}, 34^{\text{m}}, 40^{\text{f}}$ . On a aussi trouvé le côté CP de  $70^{\text{d}}, 53^{\text{m}}, 56^{\text{f}}$ ; cependant il faut prendre son supplément  $109^{\text{d}}, 6^{\text{m}}, 4^{\text{f}}$ .

Scij

## DIXIÈME PROBLÈME.

*Par l'observation du soleil, qui est faite lorsqu'il rase le plan, trouver la déclinaison du plan, supposé que l'on sçache la déclinaison du soleil, la hauteur du pôle du lieu, & l'inclinaison du plan.*

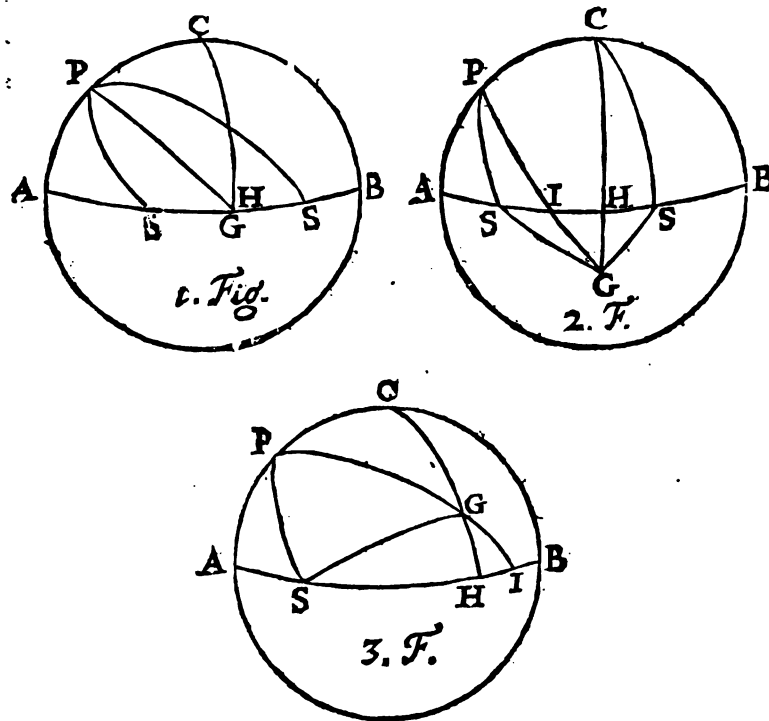
**P**OUR connoître par observation, quand le soleil rase le plan, c'est-à-dire, quand le soleil est dans le plan du cadran, il faut avoir une grande regle, sur le plat de laquelle il y ait deux pinnules dressées aux deux bouts, dont l'une soit percée au centre, pour laisser passer les rayons du soleil, & l'autre ait un cercle décrit à l'entour du centre, pour recevoir l'image du soleil.

Cette regle ainsi préparée sera appliquée de plat contre le plan, & pointée continuellement vers soleil, jusqu'à ce que l'image du soleil tombe justement dans le cercle de la pinnule; ce qui étant arrivé, & la regle demeurant ferme dans sa position, on tracera une ligne qui représentera le rayon du soleil pour le moment auquel il aura rasé le plan, supposé que le côté de la regle soit bien parallèle à la ligne des centres des pinnules..

Ensuite de cette observation on mesurera l'angle que la ligne tracée sur le plan fera avec la verticale. Cela supposé, soit sur la sphère AB un horizon parallèle au plan du cadran, & C son zenith; P le pôle élevé sur le plan; G le zenith du lieu, qui sera ou dans l'horizon AB, ou au-dessus, ou au-dessous; S le centre du soleil sur l'horizon AB; H l'intersection du même horizon AB avec le vertical commun CG prolongé ou retranché,

SH étant la mesure de l'angle observé, si d'ailleurs SG & SH conviennent, comme dans la première figu-

re, les trois côtez du triangle  $SPG$  étant connus, on connoîtra l'angle  $SGP$ , dont le complement  $PGC$  sera la déclinaison du plan, laquelle on doit trouver.



Mais si le zenith  $G$  est au-dessous ou au-dessus de l'horison  $AB$ , comme dans les deux autres figures; au triangle rectangle  $SGH$ , l'inclinaison  $GH$ , & l'autre côté  $SH$  étant donnez, on connoîtra l'hypotenuse  $SG$ , & l'angle oblique  $SGH$ . Puis au triangle  $SGP$  dont les trois côtez seront connus, on trouvera l'angle  $SGP$ . Mais  $SGH$  est connu; on aura donc  $PGC$  qui est celui que l'on cherche.

Remarquez que sans avoir tracé aucune ligne sur le

plan, si l'on a sçû par quelque moyen que ce soit, l'heure & le moment auquel le soleil a rasé le plan; cela dis-je supposé, au triangle SPG les côtez SP, PG, & l'angle horaire SPG étant connus, on connoitra SG & l'angle SGP. Puis au triangle rectangle SGH, connoissant l'hypoténuse SG & le côté GH, on connoitra SGH, & le reste, comme au premier cas.

## R E M A R Q U E S.

**O**N dit que SH est la mesure de l'angle observé, c'est-à-dire, de l'angle fait par la verticale, dont le cercle est le vertical CGH, & par la ligne du rayon du soleil, lorsqu'il rase le plan. Cet angle doit être considéré comme ayant son sommet au pied du style, par lequel point passe la verticale, & par lequel aussi on peut supposer que passe le rayon du soleil, puisqu'il n'a point de lieu déterminé sur le plan. Alors ces deux lignes sur le plan du cadran, représenteront les sections du plan horizontal du cadran, & des deux cercles verticaux, dont l'un passe par le zénith du lieu, & l'autre par le centre du soleil, lorsqu'il est dans le plan du cadran.

## E X E M P L E S.

**P**Our le premier cas où le plan du cadran n'a point d'inclinaison; ou ce qui est la même chose, lorsque le zénith du lieu est dans le plan du cadran; soit la distance SG entre le zénith du lieu & le lieu du soleil, qui est l'angle observé de  $46^{\text{d}}, 7^{\text{m}}, 10^{\text{s}}$ ; & par la déclinaison du soleil on connoitra l'arc SP, qui est la distance entre le pôle P & le lieu du soleil S, au temps de l'observation de  $77^{\text{d}}, 3^{\text{m}}, 20^{\text{s}}$ . Enfin par le complément de la hauteur du pôle du lieu, on a l'arc PG d'un méridien entre le pôle, &

Le *zenith* du lieu, lequel soit de  $41^{\text{d}}, 10^{\text{m}}$ . Ces trois côtés étant connus dans le triangle  $SPG$ , on trouvera l'angle  $SGP$  de  $128^{\text{d}}, 32^{\text{m}}, 40^{\text{s}}$ .

Pour le second cas où le *zenith* est au-dessus ou au-dessous de l'horizon, c'est-à-dire, lorsque le mur est incliné; dans le triangle rectangle  $SGH$ , dont l'arc  $SH$  de l'horizon soit donné comme ci-devant de  $46^{\text{d}}, 7^{\text{m}}, 10^{\text{s}}$ , l'arc  $SH$  étant compris entre le lieu du soleil  $S$ , au temps où il rase le plan, & le vertical commun  $CG$ , qui est toujours perpendiculaire sur l'horizon. Mais l'arc  $GH$  est mesuré par l'inclinaison du plan, laquelle soit de  $3^{\text{d}}, 10^{\text{m}}, 30^{\text{s}}$ ; on trouvera donc l'hypoténuse  $SG$  de  $46^{\text{d}}, 12^{\text{m}}, 14^{\text{s}}$ , qui est la distance entre le *zenith* du lieu, & le centre du soleil, au temps de l'observation du soleil dans le plan. On trouvera aussi l'angle  $SGH$  de  $86^{\text{d}}, 57^{\text{m}}, 5^{\text{s}}$ .

Ensuite au triangle  $SGP$  dont on connoît les trois côtés, à sçavoir  $SG$  de  $46^{\text{d}}, 12^{\text{m}}, 14^{\text{s}}$ ,  $PG$  comme ci-devant, de  $41^{\text{d}}, 10^{\text{m}}$ , &  $PS$  aussi de  $77^{\text{d}}, 3^{\text{m}}, 20^{\text{s}}$ , on trouvera l'angle  $SGP$  de  $128^{\text{d}}, 41^{\text{m}}, 20^{\text{s}}$ . Mais si dans la seconde figure on ôte de cet angle  $SGP$  l'angle  $SGH$ , il restera l'angle  $PGC$  de  $41^{\text{d}}, 44^{\text{m}}, 15^{\text{s}}$ ; & dans le troisième figure, si l'on ajoute ces deux angles ensemble, on aura l'angle total  $HGP$  de  $215^{\text{d}}, 38^{\text{m}}, 25^{\text{s}}$ , dont le supplément à quatre droits  $PGC$  sera de  $144^{\text{d}}, 21^{\text{m}}, 35^{\text{s}}$ . Cet angle  $PGC$  est celui qui est fait par la verticale commune représentée par  $CG$ , & par la méridienne du lieu, qui est le méridien  $PG$ : cet angle doit être fait sur l'horizon du lieu, sur lequel se mesure la déclinaison du plan.

Pour ce qui est de la remarque, dont il est parlé à la fin de ce problème, je n'en donnerai point d'exemple; car comme il est très-difficile de sçavoir l'heure qu'il est au temps de l'observation, cette règle devient presque inutile.

## O N Z I È M E P R O B L È M E.

*La déclinaison du plan étant donnée, trouver la hauteur du pôle sur le plan, la ligne soustylaire, la différence des méridiens, supposé la hauteur du pôle du lieu, & l'inclinaison du plan.*

*Voyez la  
Figure de la  
page 500.*

**S**OIT dans la figure du sixième problème le triangle CGP dont les côtes GC, GP, & l'angle qu'ils renferment sont donnez, on connoîtra le troisième côté & les angles requis.

## E X E M P L E.

**S**OIT PG le complement de la hauteur de pôle du lieu de  $41^{\text{d}}, 10^{\text{m}}$ ; GC qui est la distance entre les zeniths, & par conséquent le complement de l'inclinaison du plan, soit de  $81^{\text{d}}, 19^{\text{m}}, 30^{\text{s}}$ ; & soit l'angle CGP la déclinaison du plan de  $35^{\text{d}}, 15^{\text{m}}, 10^{\text{s}}$ , on trouvera le côté CP qui est le complement de la hauteur du pôle sur le plan de  $49^{\text{d}}, 50^{\text{m}}, 23^{\text{s}}$ ; l'angle PCG sera celui que doit faire la soustylaire représentée par l'arc CP & par la verticale commune représentée par l'arc CG : ces deux lignes s'entrecompant au pied du style, feront un angle de  $29^{\text{d}}, 48^{\text{m}}, 40^{\text{s}}$ . Enfin l'angle CPG, qui est la différence des méridiens, sera de  $48^{\text{d}}, 17^{\text{m}}, 45^{\text{s}}$ . Cet angle CPG n'est point marqué sur le plan du cadran par des lignes; mais c'est celui qui est fait à la pointe du style, sur le plan de l'équateur par deux rayons, dont l'un va à la soustylaire, & l'autre à la méridienne.



D O U Z I È M E

## DOUZIÈME PROBLÈME.

*La déclinaison du plan, & son inclinaison étant données ;  
trouver l'obliquité de ligne meridienne.*

DANS les deux dernières figures du dixième problème, soit I la rencontre de l'horizon AB, avec PG retranché ou prolongé. Au triangle rectangle GHI, le côté GH est l'inclinaison du plan, & l'angle IGH la déclinaison, lesquelles sont données. On connoîtra donc le côté HI, qui est la mesure de l'obliquité de la meridienne requise. Car comme le rayon est au sinus de l'inclinaison du plan, ainsi la tangente de la déclinaison du plan, est à la tangente de l'obliquité requise.

Ce problème ne sera point nécessaire dans la suite : mais il pourra servir à ceux qui voudroient tracer une ligne meridienne par un point observé.

## REMARQUES.

ON ne propose ici que deux choses connues ; car le triangle qu'il faut résoudre est rectangle ; & l'obliquité de la ligne meridienne que l'on cherche, est l'angle que fait la ligne meridienne avec la verticale.

Pour ce qui est de la position de la ligne meridienne par le moyen d'un point d'ombre observé, il faut auparavant connoître la déclinaison du plan par le neuvième problème : car pour l'inclinaison elle est employée dans la solution de ce même problème ; c'est pourquoi elle sera aussi connue.



## TREIZIÈME PROBLÈME.

*La différence des méridiens étant donnée, trouver l'heure de la soustylaire.*

**L**A différence des méridiens est la distance horaire entre le midy du lieu & l'heure de la soustylaire, qui est le midy du plan. De sorte que si le plan est occidental, la différence des méridiens convertie en temps donne l'heure de la soustylaire, à compter depuis midy; mais si le plan est oriental, il faut ôter de 12 heures la différence des méridiens, & prendre le reste qui se comptera depuis minuit.

## E X E M P L E S.

**S**I la différence des méridiens, est de 30 degrés ou de deux heures, & que ce soit vers l'occident; la soustylaire sera à deux heures du soir: mais si la même différence est orientale, la soustylaire sera à 10 heures du matin. Ou bien si la différence des méridiens est de 150 degrés, ou de 10 heures, & que ce soit vers l'occident, la soustylaire sera à 10 heures du soir; mais si la même différence est orientale, la soustylaire tombera sur deux heures du matin.

## QUATORZIÈME PROBLÈME.

*La hauteur du pôle étant donnée, trouver la moitié du plus grand jour.*

**I**L faut faire comme le rayon est à la tangente de  $23^{\text{d}}$ ,  $29^{\text{m}}$ , qui est l'obliquité de l'écliptique; ainsi la tangente de la hauteur de pôle est au sinus de l'excès

de la moitié du plus grand jour pardeffus fix heures.

## E X E M P L E.

**L**A plus grande obliquité de l'écliptique ayant été trouvée de  $23^{\text{d}}, 29^{\text{m}}$ , si l'on donne la hauteur du pôle du lieu de  $48^{\text{d}}, 50^{\text{m}}$ , on trouvera par la règle, que le sinus de l'excès du plus grand jour pardeffus six heures est de  $29^{\text{d}}, 47^{\text{m}}, 37^{\text{f}}$ , ce qui se réduit à 1 heure,  $59^{\text{m}}, 47^{\text{f}}$ ; donc la moitié du plus grand jour sera de 7 heures,  $59^{\text{m}}, 47^{\text{f}}$ .

## QUINZIEME PROBLEME.

*Déterminer les heures qui doivent être marquées, sur un plan donné.*

**O**N sçait qu'à l'égard d'un plan horizontal, le plus grand jour du lieu détermine le nombre des heures qui doivent être marquées sur ce plan; & il en seroit de même de tout autre plan considéré comme horizontal, si l'horizon du lieu n'y faisoit point d'empêchement.

## P R A T I Q U E.

*Pour les plans septentrionaux dans un lieu septentrional, & pour les plans meridionaux dans un lieu meridional.*

**I**L faut sçavoir l'heure de la soustylaite, & la moitié du plus grand jour, tant du lieu que de l'horizon du plan considéré sans empêchement.

Si de l'heure de la soustylaite on ôte la moitié du plus grand jour du plan, on aura l'heure du lever du soleil à l'égard de l'horison du plan. Si au contraire l'on ajoute la moitié du plus grand jour du plan à l'heure de la

soustylaire, on aura l'heure du coucher du soleil à l'égard du même horizon du plan considéré sans empêchement : mais ensuite il faudra voir si aux heures trouvées le soleil sera sur l'horison du lieu ; ce qui sera facile, supposé que l'on sçache l'heure du lever & du coucher du soleil au plus grand jour du lieu.

## E X E M P L E.

**S**OIT à Paris un plan septentrional dont la moitié du plus grand jour soit de sept heures, & dont la soustylaire soit à dix heures du soir. Ayant ôté 7 de 10, je trouve qu'aux plus grands jours le soleil doit commencer le soir à éclairer le plan à trois heures ; & parce qu'à Paris le soleil est alors sur l'horison, je dis que la première heure du soir, qui devra être marquée sur ce plan, sera celle de 3 heures.

Puis ajoutant 7 heures à 10 heures du soir, je trouve encore que le soleil finira d'éclairer le plan à 5 heures du matin ; & parce qu'à Paris au plus grand jour, le soleil est sous l'horison depuis 8 heures du soir jusqu'à 4 heures du matin, il faudra que toutes les heures d'entre deux soient retranchées du cadran, sur lequel par conséquent on pourra marquer les heures depuis les 4 heures du matin jusqu'à 5 heures, & depuis trois heures du soir jusqu'à 8 heures.

Suivant cette pratique il y aura des cadrans, qui n'auront point d'heures le matin, & d'autres qui n'en auront point le soir, ce que le calcul fera voir.

L'exemple que nous venons de donner est pour un cadran septentrional dont la soustylaire tombe à une des heures de nuit, parce que c'est le cas le plus ordinaire ; ce qui n'empêche pas qu'il ne puisse y avoir un plan, dont la soustylaire tombe par exemple à 10 heures du

matin, mais qui sera tellement incliné vers le nord, que sa hauteur du pôle sera septentrional, & qui par conséquent sera septentrional. Un tel plan, supposé que la moitié de son plus grand jour fût de 7 heures, devroit être éclairé en Esté depuis 3 heures du matin jusqu'à 5 du soir : mais parce qu'à Paris le soleil ne se leve qu'à 4 heures, il faudroit retrancher la premiere heure du matin.

## PRATIQUE.

*Pour les plans meridionaux dans un lieu septentrional ;  
ou au contraire.*

**I**L faut trouver l'heure à laquelle le soleil se leve ou se couche à l'égard du plan proposé, ce qui suppose la hauteur du pôle du lieu, & la déclinaison du plan. On fera donc, comme le rayon est au sinus de la hauteur du pôle du lieu : ainsi la tangente de la déclinaison du plan est à la tangente d'un arc qu'il faudra ôter de 90 degrez ou de six heures, si le plan est oriental ; ou bien qu'il faudra ajoûter à six heures, si le plan est occidental. L'heure ainsi trouvée sera la premiere, ou la derniere qu'il faudra marquer sur le plan.

La raison de cette pratique est que par ce moyen on détermine l'heure à laquelle le soleil commence plutôt, ou finit plus tard à éclairer le plan, ce qui arrive lorsqu'il se leve ou qu'il se couche dans l'intersection des deux horizons ; car quand les jours sont plus longs à l'égard de l'horizon du plan, c'est alors qu'ils sont davantage accourcis par l'horizon du lieu, & quand les jours du plan sont le plus dégagés de l'horizon du lieu, c'est alors qu'ils sont plus courts à l'égard du plan. De sorte que le milieu se trouve dans l'intersection des deux, & que ces sortes de cadrans n'ont jamais plus de douze heures.

On peut aussi se servir d'un cadran horizontal, en

observant les lignes horaires qui rencontreront la ligne du plan. Mais cette maniere n'est pas universelle, & ne peut valoir pour les plans septentrionaux, lorsqu'ils ont des heures du matin & du soir, & que l'heure de la soustylaire est de nuit. J'entens les septentrionaux dans un lieu septentrional; & il en seroit de même des méridionaux dans un lieu méridional: car le cadran horizontal déterminera bien la premiere heure du matin, & la derniere du soir; mais il n'en sera pas de même à l'égard de la derniere du matin, & de la premiere du soir qui dépendront du plus grand jour du plan.

#### C H A P I T R E   I V .

##### *Du calcul des heures astronomiques.*

**T**R O U V E Z premierement l'heure de la soustylaire par le treizième probleme, puis faites une liste de toutes les heures que vous voulez avoir, la partageant à l'endroit où vous sçavez que doit être la soustylaire, que nous avons marquée S, avec un zéro au-dessous.

##### *Premier cas.*

**S**I l'heure de la soustylaire convient justement avec une des divisions horaires, soit heure entiere ou demi-heure, soit même un quart d'heure, supposé qu'on les voulût, avoir; il n'y aura autre chose à faire, qu'à écrire sous chaque division horaire sa distance équinoxiale à l'égard de la soustylaire, de même que vous feriez à l'égard de 12 heures dans un cadran qui ne déclinerait point.

## PREMIER EXEMPLE.

*Pour un cadran meridional & oriental, dont la difference est de 22<sup>d</sup>, 30<sup>m</sup>, & duquel par consequent, la soustylaire est à 10 heures & demie du matin.*

	$\frac{I}{2}$	IX.	$\frac{I}{2}$	X.	$\frac{I}{2}$	XI.	$\frac{I}{2}$	XII.	$\frac{I}{2}$	I.
Angles.	30	022 30	15	07 30	S	7 30	15	022 30	30	037 30
Tangentes.	577	414	268	132	0	132	268	414	577	767

## SECOND EXEMPLE.

*Pour un cadran meridional occidental, dont la soustylaire est à une heure & demie après midy.*

	XI.	$\frac{I}{2}$	XII.	$\frac{I}{2}$	I.	$\frac{I}{2}$	II.	$\frac{I}{2}$	III.
Angles.	37 30	30	022 30	15	07 30	S	7 30	15	022 30
Tangentes.	767	577	414	268	132	0	132	268	414

**O**N voit que les distances horaires étant les mêmes de part & d'autre de la soustylaire, il suffiroit de les avoir écrites d'un côté seulement.



## T R O I S I È M E   E X E M P L E .

*Pour un cadran septentrional oriental, dont la différence des méridiens est de 157<sup>d</sup>, 30<sup>m</sup>, & duquel par conséquent, la soustylaie tombe sur une heure & demie du matin.*

	Soir.		Septentrional Oriental.				Matin.	
	VII.	$\frac{I}{2}$	VIII.	I.	$\frac{I}{2}$	IV.	V.	$\frac{I}{2}$
Angles.	97 30	90 00	82 30	S	37 30	45 00	52 30	60 00
Tangentes.	7596	Infin.	7596	0	767	1000	1303	1732

## Q U A T R I È M E   E X E M P L E .

*Pour un cadran septentrional occidental, dont la soustylaie tombe à dix heures & demie du soir.*

Septentrional Occidental.										
	VI.	$\frac{I}{2}$	VII.	$\frac{I}{2}$	VIII.	X.	$\frac{I}{2}$	IV.	$\frac{I}{2}$	V.
Angles.	67 30	60 00	52 30	45 00	37 30	S	82 30	90 00	97 30	
Tangentes.	2414	1732	1303	1000	767	0	7596	Infin.	7596	

**C**Es sortes de cadrans septentrionaux sont renver-  
sez, ayant les heures du soir à gauche, & celles  
du matin à droit. Ils ont d'ailleurs plusieurs heures sup-  
primées, lesquelles il faut supposer dans le calcul : com-  
me par exemple, pour 8 heures du soir, si la soustylaie  
est

à 1 heure  $\frac{1}{2}$  après minuit, l'intervale est de 5 heures  $\frac{1}{2}$ , qui étant réduit en degrez, est de  $82^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$ . Et pour 4 heures du matin, parce que l'intervale est de 2 heures  $\frac{1}{2}$ , j'écris  $37^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$ , c'est le contraire pour le cadran occidental, à cause que la soustylaire est devant minuit.

Il ne peut pas y avoir de difficulté à l'égard des autres heures; car on voit qu'elles se suivent avec un continuel accroissement de  $7^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$ , que l'on suppose ici de demi-heures en demi-heures.

## REMARQUES.

**M**onsieur Picard passe au calcul des heures astronomiques, après avoir enseigné plusieurs élemens pour les cadrans. Mais il faudroit qu'il eût expliqué la maniere de tracer la ligne équinoxiale, avant que d'enseigner la pratique de ce calcul, puisqu'on ne le peut faire sans sa position; ce qu'il ne fait qu'à la fin de ce chapitre.

On peut trouver par le même calcul dont on s'est servi dans les problemes précédens, le point où la soustylaire doit être coupée par la ligne équinoxiale qui fait toujours avec elle des angles droits.

La hauteur du pole sur le plan du cadran étant trouvée, on fera comme le sinus de cette hauteur de pole est à la hauteur du style, ainsi le sinus du complement de la même hauteur de pole, est à la distance entre le pied du style, & le point de la ligne équinoxiale sur la soustylaire. Ce point étant déterminé, on menera la ligne équinoxiale, qui coupera la soustylaire à angles droits dans ce même point.

Tout le calcul que M. Picard propose ici pour les distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis sa rencontre avec la soustylaire, est fondé sur la distance qu'il y a entre la pointe du style, & cette même rencontre; laquelle distance est le rayon, & les distances horaires sont des tangentes par rapport

à ce rayon. Il faudra donc avoir divisé une ligne droite égale à cette distance en 1000 parties, desquelles on se servira pour prendre les distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis la rencontre de la soustylaire. Mais si l'on veut seulement connoître toutes ces distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis la soustylaire, en mêmes parties que celles de la hauteur du style que l'on a supposée dès le commencement divisée en 1000 parties; il faudra premièrement trouver la distance entre la pointe du style & la rencontre de la ligne équinoxiale avec la soustylaire, en mêmes parties que celles de la hauteur du style, ce que l'on fera par cette analogie.

Comme le sinus de complement de la hauteur du pôle sur le plan du cadran est à 1000 parties, qui est la hauteur du style; ainsi le rayon est au nombre des mêmes parties de la hauteur du style, qui est la distance que l'on cherche, que l'on peut appeller Rayon équinoxial.

Mais si l'on se sert de la longueur de ce rayon équinoxial, il faudra trouver les distances horaires sur la ligne équinoxiale par des analogies séparées, en faisant comme le rayon des Tables est au rayon équinoxial que l'on a trouvé, ainsi la tangente de l'angle de la distance entre l'heure de la soustylaire & l'heure que l'on cherche, à la distance équinoxiale de cette même heure depuis la soustylaire; c'est-à-dire depuis la rencontre de la soustylaire sur l'équinoxiale jusqu'au point où cette même heure coupe l'équinoxiale. Et par conséquent il faudra faire autant de calculs séparés, qu'il y aura d'heures à poser sur l'équinoxiale; mais aussi on aura l'avantage de se servir toujours des mêmes parties, dont on s'est servi pour tout le calcul du cadran.

Les tangentes qui sont dans les exemples que l'on a donnés ici, sont celles des Tables, supposant le rayon équinoxial de 1000 parties seulement.

Lorsque l'angle depuis la soustylaire jusqu'à l'heure que l'on veut marquer sur l'équinoxiale est de  $90^d$ , la tangente

est infinie; & en ce cas la ligne horaire est parallèle à la ligne équinoxiale. Mais lorsqu'on veut marquer des heures au delà de  $90^{\text{d}}$ , comme dans le troisième & quatrième exemple ci-dessus  $97^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$ , alors on doit se servir des tangentes de supplément de ces angles, & porter les grandeurs trouvées sur la ligne équinoxiale de l'autre côté de la soustylaire; mais l'heure que l'on tracera par ce point & par le centre du cadran, sera prolongée au-delà du centre du cadran vers le lieu où elle doit suivre les autres.

### Second cas.

**M**AIS si l'heure de la soustylaire ne convient justement avec aucune division horaire, il faut chercher premièrement les distances horaires entre la soustylaire & les deux plus proches heures, puis faire les autres par une addition continuelle, de même qu'aux exemples ci-dessus.

Soit la différence des méridiens de  $19^{\text{d}}, 35^{\text{m}}$ , & par conséquent, la soustylaire entre 10 heures  $\frac{1}{2}$  & 11 heures du matin.

Premièrement, la distance entre 10 heures  $\frac{1}{2}$  & midy, est  $22^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$ ; ayant donc ôté  $19^{\text{d}}, 35^{\text{m}}$ , je trouve  $2^{\text{d}}, 55^{\text{m}}$  pour 10 heures  $\frac{1}{2}$ .

Secondement, entre 11 heures & midy il y a  $15^{\text{d}}$  que j'ôte de  $19^{\text{d}}, 35^{\text{m}}$ , & il reste  $4^{\text{d}}, 35^{\text{m}}$  pour 11 heures.

Cela supposé, si à  $2^{\text{d}}, 55^{\text{m}}$  j'ajoute  $7^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$ , la somme fera  $10^{\text{d}}, 25^{\text{m}}$  pour 10 heures; & ainsi de suite de ce côté-là. Pareillement, si à  $4^{\text{d}}, 35^{\text{m}}$  j'ajoute  $7^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$  la somme fera  $12^{\text{d}}, 5^{\text{m}}$  pour 11 heures  $\frac{1}{2}$  & ainsi de suite en ajoutant toujours  $7^{\text{d}}, 30^{\text{m}}$  pour chaque demi-heure.

Sur quoi vous remarquerez, que si vous avez bien fait, la différence des méridiens se trouvera pour midy, ce qui pourroit donner lieu à une nouvelle manière de calcul, que le Lecteur trouvera facilement.

*Cadran Méridional Oriental.*

	$\frac{I}{2}$	X.	$\frac{I}{2}$	19 35	XI.	$\frac{I}{2}$	XII.	$\frac{I}{2}$
			22 30	S	19 35			
			19 35		15 0			
Angles.	17 55	10 25	2 55	0	4 35	12 5	19 35	27 5
Tangentes.	323	184	51	0	80	214	356	511

*Cadran Méridional Occidental.*

	XI.	$\frac{I}{2}$	XII.	$\frac{I}{2}$	I.	19 35	$\frac{I}{2}$	II.	$\frac{I}{2}$
					19 35	S	22 30		
					15 0		19 35		
Angles.	34. 35	27 5	19 35	12 5	4 35	0	2 55	10 25	17 55
Tangentes.	689	511	356	214	80	0	51	184	323



*Cadran Septentrional Oriental.*

Soir.				Matin.			
VII.	$\frac{I}{2}$	VIII.	$1^h, 18^m, 20^s$	IV.	$\frac{I}{2}$	V.	$\frac{I}{2}$
		60 0	19 35	60 0			
		19 35	S	19 35			
Angles.	94 35 87	579 35	0	40 25 47 55 55 25 62 55			
Tangentes.	12474	19627	5440	0	852	1107	1450 1956

*Cadran Septentrional Occidental.*

$\frac{I}{2}$	VII.	$\frac{I}{2}$	VIII.	$10^h, 41^m, 40^s$	IV.	$\frac{I}{2}$	V.
			60 0	19 35	60 0		
			19 35	S	19 35		
Angles.	62 55 55 25 47 55 40 25		0	79 35 87 59 4 35			
Tangentes.	1956	1450	1107	852	0	5440	19627 12474

**A**UX deux derniers exemples la difference des méridiens est effectivement de  $160^d, 25^m$ ; mais pour la facilité du calcul (ce qui se devra toujours pratiquer lorsqu'il y aura plus de  $90^d$ ) nous avons ôté les  $160^d, 25^m$ , de  $180^d$ , & nous avons pris le reste, sçavoir,  $19^d, 35^m$ , pour la difference entre le midy du plan & le minuit du lieu. Le reste s'entendra assez après ce que nous avons dit ci-dessus aux premiers exemples.

Vu u iij.

Nous avons seulement exposé les cas auxquels les cadrans méridionaux ont la différence des méridiens moindre que  $90^d$ , & les septentrionaux plus grande que  $90^d$ ; parce que c'est ce qui arrive le plus ordinairement, comme nous avons déjà remarqué au treizième problème du chapitre précédent.

Or après avoir trouvé les distances équinoxiales pour toutes les heures à l'égard de la soustylaie, il en faudra prendre les tangentes dans les Tables, comme vous voyez qu'on a fait dans les exemples précédens. Ces tangentes serviront ensuite à trouver les points horaires dans la ligne équinoxiale; & si quelque distance horaire est précisément de  $90^d$ , la ligne de cette heure-là sera parallèle à l'équinoxiale: mais s'il s'en trouve quelque une plus grande que  $90^d$ , la ligne de l'heure s'éloignera de l'équinoxiale; & parce qu'elle ne peut s'éloigner d'un côté qu'elle ne s'approche de l'autre, vous trouverez son point de rencontre, en prenant la tangente du supplément de l'angle à  $180^d$ ; ce qu'il suffit d'avoir indiqué.

*Voyez la  
Figure sui-  
vante.*

Soit maintenant A le pied du style, AB sa hauteur que je suppose connue; DC la soustylaie trouvée par les problèmes ci-dessus, & menée par le point A. On cherche C le point de la ligne équinoxiale, & D le centre du cadran.

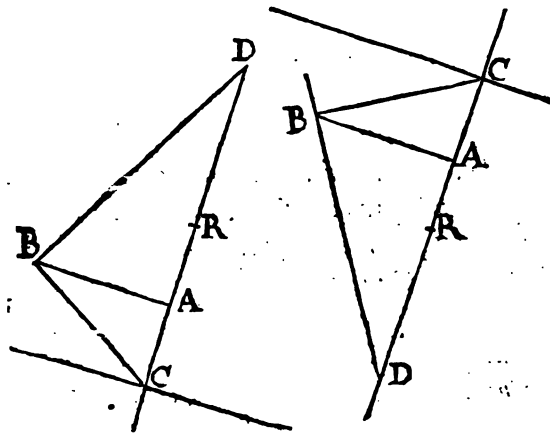
Pour cet effet, comme le sinus du complément de la hauteur du pôle sur le plan est au rayon, ainsi AB connue est à la longueur du rayon équinoxial BC, laquelle étant connue sera divisée en 1000 parties pour servir d'échelle à tout le reste du cadran.

Cela supposé, AC sera le sinus de la hauteur du pôle sur le plan, & CD la sécante de son complément. Une ligne menée par le point C à angles droits à la soustylaie sera l'équinoxiale, dans laquelle on marquera les points horaires par le moyen des tangentes ci-dessus trouvées.

## REMARQUES.

**J'**Ai expliqué assez au long la pratique pour trouver la ligne équinoxiale à la fin du premier cas, ce qui pourra servir d'éclaircissement à ce qui est dit ici un peu trop en abrégé.

Pour la manière de trouver le centre du cadran sans se servir de la sécante, on fera comme la tangente de la hauteur du pôle sur le plan est à la hauteur  $BA$  du style, ainsi le rayon



fera à  $AD$  qui est la distance sur la soustylaire entre le pied du style  $A$  & le centre du cadran  $D$ , ce centre est le point où l'axe, qui passe par la pointe du style, doit rencontrer le plan.

On peut encore trouver la grandeur  $AD$  pour déterminer le centre du cadran  $D$ , en faisant comme le rayon est à  $BA$  hauteur du style, que nous avons posée de 1000 parties; ainsi la tangente de complément de la hauteur du pôle sur le plan, à la grandeur de  $AD$ .

La somme des grandeurs de  $AD$ , &  $AC$  sera celle de  $CD$  dont on se sert dans la suite.

Par le centre du cadran & par les points horaires trouvez sur la ligne équinoxiale on tirera les lignes des heures. On fera de même pour les demi-heures, & même pour les quarts-d'heures s'il y en a.

Mais si le centre du cadran est hors le plan, ou si l'on manque de quelques points horaires, il faudra prendre CR moitié de CD, dont on connoît la grandeur par le calcul, puis par le point R tirer une ligne parallèle à la ligne équinoxiale, dans laquelle on trouvera de nouveaux points horaires en prenant la moitié de chaque intervalle donné dans l'équinoxiale à commencer à la soustylaire.

## R E M A R Q U E S.

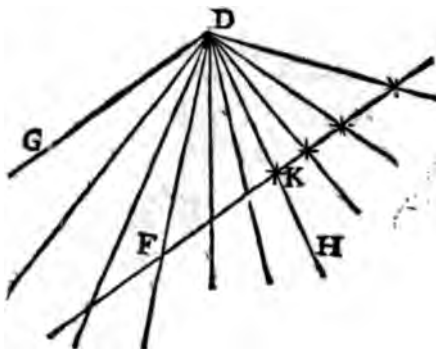
**L**E centre du cadran pourroit être si éloigné de la ligne équinoxiale, que pour avoir un point comme R sur la soustylaire, il faudroit prendre CR, comme la cinquième ou sixième ou huitième, ou même quelque autre partie beaucoup plus petite de la ligne CD: mais alors pour marquer les heures sur cette seconde ligne équinoxiale il faudroit ôter une même partie aux grandeurs des heures de la ligne équinoxiale pour les transporter sur cette seconde; comme si l'on prenoit CR de la dixième partie de CD, il faudroit seulement ôter à chaque intervalle d'heure sur la ligne équinoxiale depuis la soustylaire une dixième partie, & transporter le reste sur la seconde ligne équinoxiale.

Mais enfin si la ligne CD se trouvoit infinie, on pourroit tracer cette seconde ligne équinoxiale par quel point on voudroit de la soustylaire & y transporter les mêmes grandeurs des heures de l'équinoxiale. Ensuite on joindra les points correspondans de ces deux équinoxiales, pour avoir les lignes des heures.

Il suffira même d'avoir six heures de suite pour trouver toutes les autres; car ayant pris dans la ligne du milieu

DF

DF le point F à discrétion, si par ce point on tire FK qui soit parallèle à l'une des extrêmes DG, & qui coupe l'autre extrême DH en K; ayant mis une des pointes du compas au point K, on transportera sur FK prolongée au-delà de K les divisions qui sont au-deçà, & l'on aura la suite des heures requises de ce côté-là.



## CHAPITRE V.

*Du calcul des arcs des Signes.*

**O**N cherche par ce calcul les points de rencontre des arcs des signes sur chaque ligne horaire, & sur les lignes des demi-heures pour une plus grande justesse; on tracera ensuite par tous les points trouvez les lignes des arcs des signes.

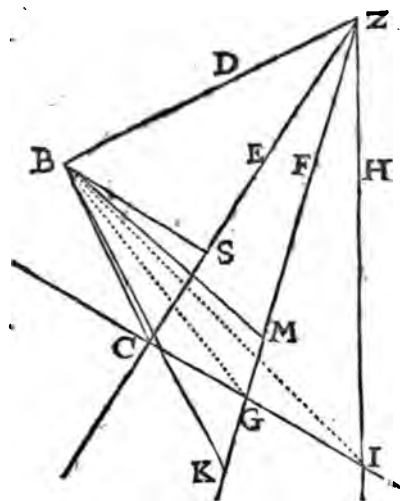
Soit l'axe BD, & EC la soustylaire, avec le rayon équinoxial BC & CGI la ligne équinoxiale. Soient aussi les lignes des heures FG, HI, &c.

B est la pointe du style, & le rayon équinoxial BC étant perpendiculaire sur la ligne équinoxiale CI, si l'on mène les lignes BG, BI, les triangles BCG, BCI, &c. seront rectangles; & dans chacun de ces triangles; on connoît par les calculs des chapitres précédens les côtes CG, CI, &c. & le côté BC qui est commun à tous. On sçait de plus, pour chaque ligne CG, CI, &c. quel est l'angle CBG, CBI, &c. c'est pourquoi dans ces mêmes triangles on trouvera les hypoténuses BG, BI, &c.

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

**X x x**

Par exemple, supposons que l'on ait trouvé le rayon



équinoxial de 1185 parties de celles dont la hauteur du style BS est de 1000, & que l'angle CBG soit de  $9^{\text{d}}, 15^{\text{m}}$ , on aura donc trouvé CG de 193 parties; & dans le triangle CBI, si l'angle CBI est pour l'heure suivante, il fera de  $24^{\text{d}}, 15^{\text{m}}$ ; c'est pourquoi l'on trouvera CI de 534 parties, & dans ces mêmes triangles on trouvera BG de 1201 parties, & BI de 1300 parties, &c.

Mais la hauteur du pôle sur le plan a été trouvée de  $32^d, 27^m$ , c'est pourquoi on a dû trouver la longueur de l'axe depuis la pointe du style jusqu'à la rencontre du plan de 1864 parties. Et soit le point Z la rencontre du plan & de l'axe BD, qui est le centre du cadran: il n'importe pas que ce centre Z soit sur le plan ou hors le plan, pourvu qu'il y en ait un.

Il faut maintenant dans tous les triangles ZBC, ZBG, ZBI, &c. qui sont rectangles en B, trouver les angles C, G, I, &c. L'angle C qui est sur la soustylaire sera le complément de la hauteur du pôle sur le plan, qui sera ici de  $57^{\text{d}}$ ,  $33^{\text{m}}$ . Dans tous les autres triangles on fera comme ZB à BG, à BI, &c. ainsi le rayon sera à la tangente de l'angle complément à l'angle G, I, &c. comme par les logarithmes.

Somme de BG & du rayon	13. 07940
Mais ZB est	3. 27038
Tangente de l'angle	9. 80902
32 <sup>d</sup> , 47 <sup>m</sup> , complement de 57 <sup>d</sup> , 13 <sup>m</sup> , qui est l'angle cherché BGZ.	
Somme de BI & du rayon	13. 11384
Mais ZB est	3. 27038
Tangente de l'angle	9. 84346
34 <sup>d</sup> , 53 <sup>m</sup> , complement de 55 <sup>d</sup> , 7 <sup>m</sup> , qui est l'angle cherché BIZ.	

Ces angles étant connus on a aussi leurs supplémens à deux droits, qui sont les angles KGB, LIB, &c.

Maintenant pour trouver les points des signes, comme sur la ligne horaire ZG pour les points M & K du premier signe au-dessus & au-dessous de la ligne équinoxiale; on joindra la déclinaison de ce signe 11<sup>d</sup>, 29<sup>m</sup>, 34<sup>f</sup>, avec l'angle ZGB & KGB, ce qui fera les deux sommes 68<sup>d</sup>, 42<sup>m</sup>, 34<sup>f</sup>, & 134<sup>d</sup>, 16<sup>m</sup>, 34<sup>f</sup>, dont on prendra les supplémens à deux droits, qui seront 111<sup>d</sup>, 17<sup>m</sup>, 26<sup>f</sup>, & 45<sup>d</sup>, 43<sup>m</sup>, 26<sup>f</sup>. Ensuite on fera comme le sinus de ces angles est au côté BG de 1201 parties; ainsi le sinus de l'angle la déclinaison du signe 11<sup>d</sup>, 29<sup>m</sup>, 34<sup>f</sup>, aux distances GM, GK depuis l'équinoxiale G jusqu'aux points des signes M & K. Ces distances seront 257 & 334 des mêmes parties de la hauteur du style qui servent dans tous ces calculs.





# DE MENSURIS

<b>S</b> J P P O S I T O pede Parisino partium	720
Erit pes Rhinlandicus vel Leydensis, ex propria ob-	
servatione,	696
Pertica Rhinlandica continet 12 pedes.	
Londinensis ad me missus	675 $\frac{1}{2}$
Danus, ex propria observatione,	701 $\frac{1}{10}$
Ulna Danica continet duos pedes.	
Dantiscanus, ex proportione cum Leydensi, lib. 1. Sele-	
nograph. Hevelii,	636
Lugdunensis Galliarum, ex observatione D. Auzout,	757 $\frac{1}{2}$
Bononiensis Italiarum, ex observatione ejusdem,	843
Bracchium Florentinum, ex eodem & Mersenno, 1290.	
Bracchium Florentinum dividitur in 20 solidos, solidus	
in 3 grossos.	
Pes Suecus mihi traditus,	658 $\frac{1}{2}$
Pes Bruxellensis ad me missus	609 $\frac{1}{2}$
Amstelodamensis ex Leydensi juxta Snellium,	629
Palmus Romanus Architect. ex propria observatione &	
D. Auzout,	494 $\frac{1}{2}$
Canna Architect. continet Palmos 10.	
Pes Romanus Capitolii ex propria observatione & D.	
Auzout,	653
vel	653 $\frac{1}{2}$
Melius ex Græco,	652
Numerus 652 pro pede Romano Capitolii exactè con-	
venit cum pede Græco, qui ibidem prostat partium 679,	
juxta proportionem 24. ad 25. Sed quia ex Gravio pes	

Anglus est ad Romanum ut 1000 ad 967, sequitur Romanum esse  $653\frac{1}{3}$  in eo statu in quo est.

**Pes** Romanus Vilalpandi ex congio juxta Ricciolum,  $665\frac{2}{3}$

Nam ex Ricciolo Romanus est ad Bononiensem ut 120 ad 152, vel 15 ad 19. Verum, si ex observatione D. Auzout, dictus congius Vespasiani, seu Farnesianus continet aquæ fontanæ Trevianæ uncias Parisienses 109, grossos 3, grana 24; proindeque pes cubicus congii octuplus, sit librarum 54, unciarum 18, grossorum 2, & granorum 48, cum ex propria observatione pes cubicus Parisiensis continet aquæ fontanæ libras 69, cum 9 uncis, 3 grossis, 22 granis. Hinc suppositâ aquarum similitudine, esset pes Romanus congialis ad Parisiensem, ut 663 ad 720.

Si pes Romanus esset  $664\frac{2}{3}$ , erit ratio ut 13 ad 12, sicut unciarum ratio.

Sed pes Romanus Statilii in Belvedere,  $655\frac{1}{2}$

Pes Romanus qui in hortis Mattei,  $657\frac{1}{2}$

Pes Romanus ex palmo,  $658\frac{3}{4}$

Seu ferè & proximè, 659

Vide Plin. libro 7, capite 2, & Gheltaldum in Archimædæ promor. ubi palmus seu spithama per dodrantem indicatur.

Romæ in pavimento Panthei lapidum quadratorum latera Parisienses pedes 9 cum lineis 8 continent; quæ si Romanorum pedum 10 supponantur, erit pes Romanus,

653

Fascia marmorea ejusdem pavimenti lata ped. Paris. 2, cum lineis  $8\frac{1}{2}$ : quæ si fuerit 3 pedum Romanorum, erit pes Romanus,

650

Portæ ejusdem Templi latitudo est pedum Parisiorum 18, cum pollicibus  $4\frac{3}{4}$ ; hinc si supponamus dictam Portam fuisse pedum Romanorum 20, erit pes Romanus.

661 $\frac{1}{2}$

Nota ex Greaves Anglo, dictam portam esse pedum Londinensium 19 cum  $\frac{600}{1000}$ ; unde sequeretur pedem Londinensem esse ad Parisinum, ut 674  $\frac{1}{2}$  ad 720, cum revera sit ut 675  $\frac{1}{2}$  ad 720. Hinc arguitur, aut pedem Anglum mutatum fuisse, aut dictum Greaves usurpasse pedem Anglum justo minorem. Idem prorsus arguitur ex proportionem Bracchii Florentini quam tradit.

Pyramidis Cestii basis latera pedes Parisinos habet 86  $\frac{1}{2}$ . Sed si ea supponamus passuum Romanorum 19, aut pedum 95, erit pes Romanus 653  $\frac{1}{2}$ .

In arcu Septimii Severi columnarum diameter prope basim est pedis Parisini 1, cum 4 poll.  $\frac{1}{4}$ ; quod accedit ad latitudinem Fasciarum Porphyreticarum in pavimento Rotundæ seu Panthei; nempe 1 pedis cum pollicibus 4  $\frac{1}{2}$ ; pro sesquipede Romano.

Ex diametro Columnarum, erit pes Romanus. 650

Ex Fascia Porphyretica. 653  $\frac{1}{2}$ .

Longitudo penduli cujus vibrationes singulis temporis medii secundis absolvuntur, observata Parisiis, Uraniburgi, Lugduni, in monte Setio, & ad Pyrenæos montes inventa fuit 36 poll. 8. lin.  $\frac{1}{2}$ , seu pollicum 36 cum  $\frac{72}{100}$  scilicet juxta pedem Parisiensem.

*Longitudo penduli juxta varias mensuras.*

<i>Mensura varia ad pedem Parisinum comparata.</i>	<i>Pollices, seu uncia.</i>	<i>Millesima partes pollicis.</i>
Pes Parisinus. 720	36	cum 708
Rhinland. 696	37	974
Bononiensis 843	31	352
Palm. Rom. Arch. 994 $\frac{1}{4}$	53	472
Brach. Florent. 1290	20	480
Seu 1. brach. cum solidis 14. gross. 0 $\frac{44}{100}$ .		

	DE MENSURIS.		335
Pes Rom. Capit.	653 $\frac{1}{4}$	40	459
	653 $\frac{1}{2}$	40	443
	652	40	536
Ex Congio	665	39	744
Sit pollex Parisin. 40 $\frac{1}{2}$ , erit tunc pes Romanus partium earundem			
			652 $\frac{6}{10}$ .
Pes Anglus	675 $\frac{1}{2}$	39	126
seu pollicum fere, & quam proxime 39 $\frac{1}{3}$ .			

### *Hero Mechanicus in Isagoge.*

**Ο** δὲ Ἰταλικὸς ποὺς δακτύλου ἔχει τρεῖς ἢ ὀκτώ ἢ τρεῖς.  
Hinc Salmasius in exercitationibus Plinianis, pag. 684, arguit pedem alium fuisse 16. digit. in urbe scilicet, alium in Italia digitorum 13  $\frac{1}{3}$ , sed malè; loquitur enim Hero de pede Romano expresso in digitis Alexandrinis. Constat enim ex eodem Herone Alexandrinum fuisse ad Romanum, ut 6 ad 5, seu ut 16 ad 13  $\frac{1}{3}$ .

Item Hyginus de limitibus constituendis : *In Germania*, inquit, & *in Tugris pes Drusianus habet monetalem & semunciam*. Constat pedem Romanum in 12 uncias divisum hîc appellari monetalem. Unde si supponamus pedem Romanum 665, erit Drusianus 747, major scilicet Parisiensi, sed minor Lugdunensi. Sed si fuit pes Romanus 653, erit Drusianus 737 circiter.

*Vide Gronovius  
de pede Rom.  
pag. 6.*

Ibidem loquens de Cyrene : *Pes eorum qui Ptolemaïcus appellatur, habet monetalem & semunciam*, seu ut 25 ad 34 quemadmodum Græcus ad Romanum, quod non convenit cum Herone, nisi dicamus pedem Cyrenensem minorem fuisse Alexandrino.



*Item Hero Mechanicus in Isagoge.*

**M**ILLIARE, intellige Alexandrinum, stadia habet  $7\frac{1}{2}$ . Pedes Philetereos, hoc est Alexandrinos seu Regios 4500, Italicos 5400. Hinc sequitur ratio pedis Alexandrini ad Romanum ut 6 ad 5. Itemque ratio milliariis Alexandrini ad Italicum ut 5400 ad 5000. Nam Italicum fuit passuum 1000.

Nota Alhazenum dum tribuit terræ ambitui milliarum 24000, intelligendum de milliari Alexandrino.

*Pro pede Arabico.*

**J**UXTA Abulfedam 500 stadia, & quidem Alexandrina, ut suppono, æquivalent milliariis  $66\frac{2}{3}$ : ergo milliare Arabicum æqualebit  $7\frac{1}{2}$  stadiis, sicut & milliare Alexandrinum ex Herone supra citato: ergo milliare Arabicum æquale Alexandrino. Sed in milliari Alexandrino dantur pedes Alexandrini 4500, & in Arabico 6000 Arabici; est igitur ratio pedis Alexandrini ad Arabicum, seu pes Arabicus erit dodrantalis seu spithama, respectu Alexandrini, hoc est ut 4 ad 3.

In Ægypto singula latera majoris pyramidis sunt pedum Anglicorum 693 seu Parisiensium 650. Hinc Ægyptius ad Parisiensem ut 13 ad 12.

Nota. Parisiis anno 1668. facta est reformatio pedis latomorum, quorum sexpeda veram excedebat lineis 5.

Ulna Parisiensis, alia *des Merciers* continet pedes 3, pollices 7, lign.  $10\frac{4}{5}$ ; alia *des Drapiers* continet pedes 3, poll. 7 lin.  $9\frac{1}{5}$ .

Prior æqualis est 4 pedibus Romanis quorum singuli  $658\frac{1}{2}$  partium, quarum pes Parisinus 720.

Canna Monspelienfis continet pedes Parisin. 6. cum pollice

pollice  $1\frac{1}{2}$ , dividiturque in 8 palmos, vulgò *pans*, quorum singuli æquales sunt palmo Romano mercatorum, quorum 8 in canna.

*Pan* Monspeliensis continet 9 pollices, 2 lineas  $\frac{1}{4}$ , sicut Romanus Mercatorum palmus.

*Pedum comparatio & æquipollentia.*

Alexandrini	144
Græci	125
Romani	120
Arabici	108
Parisienses	131

---

*MESURES PRISES SUR LES  
originaux & comparées avec le pied du Châtelet  
de Paris par M. Auzout.*

**L**E pied de Paris dont on s'est servi, est celui qui fut réduit l'an 1668. conformément à la Toise du Châtelet. Il est divisé en 1440, c'est-à-dire, chaque ligne en 10 parties; & c'est sur cette mesure que les suivantes sont réduites.

Le palme de Rome pris au Capitole contient  $988\frac{1}{2}$ , ou 8 pouces, 2 lignes,  $8\frac{1}{2}$  parties. Celui des passets est quelquefois un peu plus grand, & fait 8 pouces, 3 lignes. Le passet est une mesure de buis qui contient ordinairement 5 palmes, & qui est faite de plusieurs pièces qui sont jointes ensemble par des clous, pour pouvoir se plier, & se porter commodément.

Le palme est divisé en 12 onces, & l'once en 5 minutes; ce qui fait soixante minutes au palme: on ne se sert point

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

Yyy

d'une plus petite division. 10 palmes font la canne que l'on nomme d'Architecte.

Le pied Romain que l'on nomme ancien, qui est celui de Lucas Pœtus pris au même lieu, contient 1306 ou 1307 parties. Il est un peu trop petit, puisque le palme devant être les trois quarts du pied, ou 12 doigts des 16 qui composent tout le pied, il devroit contenir suivant la premiere mesure 1318 parties.

Il reste à Rome deux pieds antiques sur deux sépulcres de Massons ou d'Architectes; l'un dans le Jardin de Belvedere, & l'autre dans la Vigne Mattei; & quoique les divisions en soient malfaites & inégales, on peut pourtant supposer que le total en est bon. Celui de Belvedere contient 1311 parties ou bien 10 po. 11 l. & 1 partie ou  $\frac{1}{10}$ ; & celui de la Vigne Mattei en contient 1315; ou bien 10 po. 11 l. 5 parties ou  $\frac{1}{2}$  ligne; & comme ils peuvent être un peu diminuez sur les bords, on peut les estimer égaux à 16 onces du palme moderne.

Par toutes ces mesures on peut prendre l'aulne de Paris pour 4 pieds Romains antiques.

Le pied Grec pris au Capitole a 1358 parties, ou bien 11 po. 3 l. 8 parties, étant au Romain comme 25 à 24, comme on déduit d'ordinaire de la difference de leurs stades dont l'une contenoit 600 pieds, & l'autre 625. Le pied Romain étant 1306 ou 1307, le pied Grec devroit être 1364 ou 1365; & si le Romain étoit 1318, le Grec devroit être 1373: si le Romain étoit 1311, le Grec seroit 1365  $\frac{1}{8}$ : si le Romain étoit 1315, le Grec seroit 1369  $\frac{11}{16}$ : toujours plus grand que celui du Capitole marqué par Lucas Pœtus.

Nota. Le pied qui est à Belvedere sur le tombeau de T. Statilius Menfor, est divisé en palmes & en doigts; la division en est malfaitte & grossiere: l'autre qui est dans la Vigne Mattei sur un autre tombeau de Cossutius, n'est

point divisé en doigts. Il est à croire que Lucas Pætus avoit marqué le pied Romain & le pied Grec de juste proportion ; mais qu'à force de prendre le pied Romain , on l'a augmenté. Si le Romain étoit 652, le Grec seroit 679  $\frac{1}{6}$ .

*Voyez Lucas  
Pætus p. 5.*

Le palme de Marchand dont 8 font la canne, dont on se sert pour mesurer toutes les étoffes, a 1102  $\frac{1}{2}$  parties, ou bien 9 pouces 2  $\frac{1}{4}$  de ligne. La canne faisant justement 6 pieds, 1 pouce, 6 lignes, elle revient à peu près à une aulne & deux tiers de celle de Paris.

Le palme & la canne de Rome pour les Marchands, est précisément le pan & la canne dont on se sert à Montpellier.

Le palme de Naples pris sur l'original, a 1161 ou 1162 parties, ou bien 9 pouces, 8 lignes, 1 ou 2 parties.

La brasse de Florence prise à la mesure publique contre la prison, a 2580 ou 2581 parties, c'est-à-dire 1 pied, 9 pouces & 6 lignes, ou 1 partie davantage ; mais le premier est plus juste.

Le pied de Bologne pris dans le Palais de la Vicairie, a 1686 parties, ou bien 1 pied, 2 pouces & 6 parties.

Le bras pris au même lieu a 2826 parties, ou bien 1 pied, 11 pouces, 6 lignes ; ce qui ne fait pas justement 5 pieds de 3 bras, comme le suppose le P. Riccioli.

Le bras de Modene a 2812  $\frac{1}{2}$  parties ; ou bien 1 pied, 11 pouces, 5 lignes  $\frac{1}{4}$ .

Le bras de Parme pris auprès du Dome a 2526 parties, ou bien un pied, 9 pouces, 6 parties.

Le bras de Lucques a 2615 parties ; ou bien 1 pied 9 pouces, 9 lig, 5 part.

Le bras de Sienne pris sur la canne publique qui est posée horizontalement sous la loge de l'Hôtel de Ville, & qui contient 4 bras, a 2667 parties ; ou bien 1 pied, 10 pouces, 2 lignes & 7 parties.

Le pied de Milan pris sur le Traboco de bois où on éprouve les mesures, a 1760 parties; ou bien 1 pied, 2 pouces, 8 lignes: & le bras dont le pied fait les deux tiers, a 2640 parties; ou bien 1 pied, 10 pouces.

Le pied de Pavie pris sur la canne de fer qui est à la porte du Dome, a 2080 parties; ou bien 1 pied, 5 pouces 4 lignes; & le bras dont il est les trois quarts, a 2780 parties, ou 1 pied, 1 pouce, 2 lignes.

Le pied Turin pris sur la mesure de cuivre qui est dans l'Hôtel de Ville, a 2274 parties; ou bien 1 pied, 6 pouces, 11 lignes, 4 parties.

Le pied de Lyon contient 1515 &  $\frac{2}{3}$  de partie; ou bien 1 pied, 7 lignes, &  $\frac{17}{12}$ .

La toise contient 7 pieds  $\frac{1}{2}$ .

L'aulne de Lyon contient 3 pieds, 7 pouces, 8 lignes & 3 parties.

*Fin des mesures données par M. Auzout.*

## DE MENSURA LIQUIDORUM ET ARIDORUM.

**D**OLIUM Parisiense, vulgè *muid*, æquale habetur communiter 8 pedibus cubicis, ita ut dolia 27 impleant sexpedam cubicam.

Ex antiquis Statutis, *Ordonnances*, dolium deberet continere pintas 300; sed nunc 288; ita ut pintæ 36 implere debeant pedem cubicum.

Dividitur etiam communiter dolium in sextarios, *sextiers*, 36; sextarius verò in pintas 8; inde 288 pintæ in dolio.

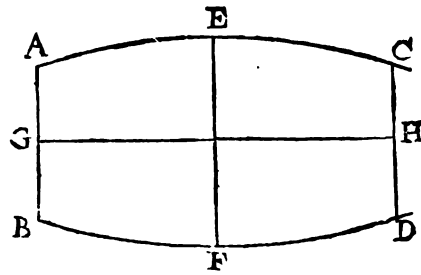
Pinta quæ in domo publica Parisiensi asservatur, con-

tinēt pollices cubicos  $47\frac{1}{7}$ ; cū ex dolio deberet esse pollicum cubicorum 48.

Sextarius, *chopine*, qui ibidem asservatur, major est dimidio pintæ, estque circiter pollicum cubicorum 24.

*Demisextiers* quater sumptus excedit pintam pollicibus cubicis  $2\frac{1}{4}$ .

Dolium cujus longitudo GH est pollicum 32, diameter AB vel CD 22 pollicum, sed diameter EF 25 per medium foramen, *le bon-don*; continet pintas  $289\frac{1}{4}$ . Sed si diameter EF sit pollicum  $25\frac{1}{2}$ , erit capacitas pinterum 296 ferè.



Nota contractionem unius pollicis in longitudine 8 pintas proximè demere.

Si longitudo GH sit  $30\frac{1}{2}$  poll. diameter AB 23, & diameter EF 25, continet pintas  $287\frac{1}{4}$ .

Item, si longitudo GH sit 32, diameter AB 23, & diameter EF 24, continet pintas  $289\frac{1}{4}$ .

Modius Parisiensis pro granis, vulgè *le boisseau*, æqualis est cubo cujus latus 8 pollicum, 7 linearum  $\frac{13}{10}$ ; seu continet pollices cubicos  $644\frac{68}{1000}$ .

### De ponderibus.

**P**ARISIIS in libra sunt uncia 16, seu grossi 128, seu grana 9216.

In uncia sunt grossi 8, seu grana 576.

In grosso seu drachma sunt 3 scrupuli, seu 72 grana.

In scrupulo seu denario grana 24.

Facto experimento Parisiis in Curia *des Monnoyes*,

Y y ij

constitit cubum cujus capacitas 171 pol.  $\frac{1}{2}$ , continere aquæ puræ fontanæ *d' Arcueil* libras 6 cum unciiis 14, grossis 4, & granis 2; seu omnino grana 63650. Unde sequitur cubum pedalem Parisiensem continere ejusdem aquæ libras 69 cum unciiis 9, grossis 3, & granis 22, seu summatim grana 641326. Hinc pollex cubicus ejusdem aquæ grana 371  $\frac{1}{10}$ .

Pollices cubici 171  $\frac{1}{2}$  sunt pintæ 3  $\frac{1}{2}$  cum pollicibus 3  $\frac{4}{5}$ , supposito quod pinta sit pollicum 48, uti in dolio. Fuiſſet congii Farnesiani pondus granorum 63162, posito latere cubi 665 partium.

Hinc si pinta supponatur pollicum cubicorum 48, continebit libras 2, minus 1 uncia, cum 41 granis, seu continebit grana 17814  $\frac{1}{2}$  dictæ aquæ, seu 1 libram cum unciiis 14 & grossis 7  $\frac{1}{2}$  circiter; at vini libram unam cum unciiis 14 & grossis 2  $\frac{1}{2}$ ; est autem differentia  $\frac{1}{10}$  totius ponderis.

Latus dicti cubi continentis pollices cubicos 171  $\frac{1}{2}$  est partium decimarum lineæ 666  $\frac{7}{10}$ , cum debuisset esse 665, ut æquaretur dictus cubus congiio Farnesiano seu octanti pedis Romani cubici; excedebat ergo granis 488, seu grossis 6 & granis 56.

Ex D. Auzout libra Romana hodierna, quæ est uncia- rum Romanarum 12 continet uncias Parisienses 10 cum grossis 7 & granis 12; seu summatim 6276 grana.

Hinc patet unciam Romanam hodiernam aurificam, levio- rem esse Parisiensi granis Parisiensibus 43.

Mersennus dicit unciam Romanam levio- rem esse Parisiensi granis 45, *tom. 3. Observat. Physicomathem.* Erit igitur ex D. Auzout ratio uncia- rum Rom. ad Paris. ut 11 ad 11  $\frac{473}{33}$ . Sed si ponamus unciam Romanam minorem non 43, sed 44 gran. erit ratio ut 12 ad 13.

Ex eodem D. Auzout congius Farnesianus qui debuit continere libras antiquas 10, seu uncias 120 vini, depre-

hensus est continere aquæ fontanæ *di Trevi* uncias Parisienses 109 minus granis 24, seu libras 6 cum unciis 12, grossi 7, & granis 48: fuisset autem pondus vini levius.

Congius qui asservatur Parisiis in Bibliotheca PP. S. Genovesæ, continet aquæ Sequanæ libras 7 cum uncia 1, grossis 2, & granis 36.

Vas cujus capacitas  $171\frac{1}{2}$  pollicum cubicorum, seu cujus latus  $666\frac{7}{10}$  partium, qualium Parisiensis pes, continet 1440: deficiebat à dicto congio unciis 2 & grossis 6; proindeque dictus congius excedit dictum congium Vespasiani unciis 3, grossis 4, & granis 65. Dicunt illum esse quem dimensus est Gassendus.

Pondus aquæ excedit pondus vini communiter parte octogesima.

Pondus aquæ ad pondus aëris, ut 960 ad 1.

Pondus aquæ marinæ ad aquam Sequanæ, ut 46 ad 45.

*Mensura liquidorum antiqua.*

**A**MPHORA, seu pes cubicus continet pondus vini librarum Romanarum 80.

Urna dimidium amphoræ, seu libras 40.

Congius libras 10, seu semipes cubicus; ac proinde pars octava amphoræ.

Sextarius est sexta pars congii.

Hemina, seu cotyla est semifextarius cujus pondus unciarum Parisiensium  $9\frac{1}{12}$ . Si congius sit unciarum Parisiensium 109.

Ciatus est sexta pars heminæ.

Deprehendit Gassendus, ut ipse narrat in vita Peireskii, aquam quæ Romano pondere debuit esse decem librarum seu unciarum 120, antiquarum scilicet, esse pondere Parisiensi librarum 7 minus uncia quadrante, seu unciarum 111, & quadrantum uncia trium.

Hinc uncia Romana antiqua continet grana 536, quallium in Parisiensi sunt 576; unde & illis in drachmas collectis obvenire cuilibet drachmæ grana 67; idque proinde existimavit pondus denarii Cæsaris, qui fuit drachmalis.

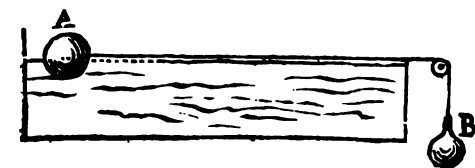
Sextarius antiquus continet sextam partem congii. Semisextarius partem duodecimam congii, aliàs hemina seu cotyla dicta. Ubi notandum semisextarium antiquum proximè accedere ad semisextarium Parisiensem.

*De proportionem aquarum effluentium.*

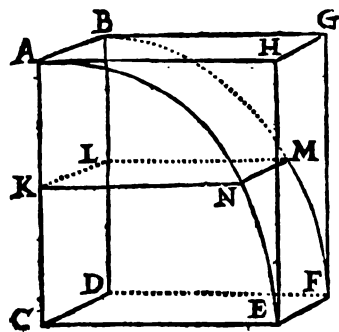
EXPERIMENTUM.

EXPERIMENTO constitit corpus A in aqua stagnante natans, tractum à pondere B velocitate æquabili, seu tempore ut unum; deinde trahi velocitate ut duo, seu dimidio tempore à pondere quadruplo

ipfius B; ita ut velocitates sint ut ponderum radices quadratæ.



Aqua effluens per foramen horizontale rectangulum



CF est ad aquam effluentem per idem foramen verticale AD ut 3 ad 2, suppositâ constanti aquæ altitudine AC. ACE, BDF sunt parabolæ quarum vertices A & B; suntque CH, DG rectangula.

Aquæ effluentis per CF celeritas est ubique æqualis; aquæ verò effluentis per AC celeritates

celeritates respondent applicatis ad parabolas. Est ergo aqua effluens per CF ad aquam effluentem per AD, ut solidum rectangulum CG ad solidum parabolicum mixtum ABMNFC. Sunt autem ista solida ut rectangulum DG ad spatium parabolicum DBMF, hoc est ut 3 ad 2; patet igitur propositum.

Aqua effluens per AD est ad aquam effluentem per AL in ratione sesquialtera altitudinum foraminum AC, AK; seu ut producta altitudinum AC, AK per suas radices quadratas multiplicatum.

Est enim aqua effluens per AD ad aquam effluentem per AL, ut parabola ACE ad parabolam AKN, quarum vertex communis A. Sed parabolæ sunt inter se ut cubi basium; ipsæ verò bases sunt ut radices quadratæ altitudinum. Ergo parabolæ sunt inter se ut cubi radicum quadratarum altitudinum; & sic sunt aquæ effluentes; quod erat demonstrandum.

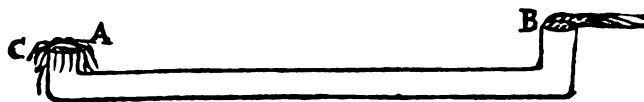
## EXPERIMENTA.

**P**ER foramen verticaliter situm ac rotundum cujus diameter unius pollicis, in lamina cujus crassities  $\frac{1}{2}$  lineæ, ac nudum, hoc est sine canali, existente aquæ superficie planè tranquillâ ac sine vorticibus, alta unâ lineâ suprâ foramen, intra horas 24 dolia  $65\frac{1}{4}$  effluunt, vel  $66\frac{2}{3}$ ; & sic intra tres dies dolia 200. Sed si superficies aquæ sit paulò depressior, ita ut labrum illud quod aquæ superficiem terminare solet, ad dictam altitudinem unius lineæ terminetur, pulvisculi tamen superficiei aquæ aspersi non effluant; in dicto casu effluent intra horas 24 dolia  $63\frac{1}{2}$ . Itemque si dicto foramini apponatur tubulus cujus diameter sit linearum 15, longitudo vero 3 pollicum cum dimidio, qui excipiat aquam è foramine euntem; non effluent nisi dolia 59 aut 60, ut plurimum intra horas 24.

## EXPERIMENTUM

*Circa necessariam declivitatem aquæ effluentis.*

**I**N tubo AB cujus diameter pollicum 6, & longitudo sexped. 1000, notatæ sunt extremitates A B benè æquilibratæ, ope scilicet aquæ in tubo quiescentis. Tunc accedente per B, continuo affluxu, 6 pollicum aquæ



quantitate, ut tota exiret per alteram extremitatem distantem mille sexpedis, necessarium fuit tubum aperire in C quinque pollicibus inferiùs quam A.

## PROPOSITIO.

*Vas aquà indefinenter plenum, cujus altitudo sit pedum 15, cum pollicibus 5, & lineis fere 7, per foramen rotundum pollicis unius, quantitatem aquæ cubicam pedalem emittet intra tempus 6 secund. quod sic demonstro.*

**S**UPPONO corpus grave (guttam aquæ verbi gratia) motu naturaliter accelerato cadere ex altitudine pedum 15 cum pollice 1 & 2 lineis intra unicum minutum secundum temporis. Hoc supposito, quoniam aqua ex fundo vasis eo velocitatis gradu erumpit, quem acquisivisset si ex summa superficie ad fundum descendisset; supponiturque vasis altitudo pedum 15 cum pollice 1 & lineis 2, seu lineis 2174; quæ quidem altitudo conficeretur intra unum minutum secundum temporis motu

naturaliter accelerato, ut demonstravit Hugenius ex penduli minuta secunda exhibentis longitudine, erit aquæ velocitas talis, ut per eam continuò æquabilem conficeretur spatium pedum 30 cum pollicibus 2 & lineis 4 intra unicum minutum secundum temporis. Moles igitur aquæ, quæ dicto motu æquabili intra 1 secund. è vase indefinenter pleno per foramen rotundum unius pollicis æqualis est cylindro cujus diameter sit pollicis unius, altitudo vero pedum 30 cum pollicibus 2 & lineis 4; proindeque si dictæ quantitatis assumatur sextuplum, provenient 2174 pollices cylindrici pro spatio temporis 6 secund. At juxta basium rationem, quæ est quadrati circumscripti ad circulum, cum 14 pollices cylindrici dent 11 pollices cubicos; 2174 cylindrici dabunt cubicos 1708  $\frac{1}{2}$ , seu cubum pedalem fere, qui scilicet continet pollices cubicos 1728. Jam ut quadratum numeri 1708  $\frac{1}{2}$  ad quadratum numeri 1728, ita 15 pedes cum pollice 1 & lineis 2, ad 15 pedes cum pollic. 5, & lineis 4  $\frac{1}{2}$  pro altitudine vasis è quo intra 6 secund. effluerent 1728 pollices cubici, seu quantitas aquæ cubica pedalis; quod erat propositum.

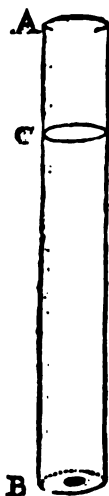
*Corollarium primum.*

**H**INC patet quâ ratione determinari possit tempus intra quod effluet aqua è dato vase prismatico aut cylindrico per foramen datum in fundo factum. Nam ut altitudo pedum 15 cum pollice 1 & lin. 2 ad altitudinem vasis datam, ita quadratum temporis unius minuti secundi, ad quadratum temporis intra quod grave aliquod decideret ex altitudine vasis. Deinde ut est foramen ad basim totam, ita tempus inventum ad tempus intra quod tota aqua effluet è vase dato semel pleno. Concipiamus enim vas divisum in cylindros ejusdem cum ipso altitudinis, sed quorum bases æquales sint fo-

ramini, maneatque vas plenum dum effluet quantitas aquæ istis omnibus cylindris æqualis: constat ex dictis futurum ejusmodi effluxum cylindrorum dimidio tempore ejus quo omnes cylindri successivè effluerent non motu uniformi, sed retardato, qualis est motus projectorum ascendentium, qui accelerato æqualis sit; quambobrem patet Corollarium.

*Corollarium secundum.*

**C**ONSTAT item quâ ratione ex tempore effluxûs aquæ in vase prismatico aut cylindrico, cognoscatur tempus quo grave decideret ex altitudine vasis. Nam ut basis est ad foramen, ita tempus totalis effluxûs aquæ ex vasi semel pleno, est ad tempus quo grave decideret ex altitudine vasis. Demonstratio quidem est pro gutta aquæ decidente ex altitudine vasis: sed experi-



riri poteris an hydrargyrus, seu argentum vivum, celerius effluat. Verum in praxi, quia effluxus sub finem non est adeo regularis, ut meliùs observari seu determinari possit tempus quo vas datum evacuari debeat, utere methodo sequenti.

Datâ totali aquæ altitudine in vase cylindrico aut prismatico, & dato insuper tempore quo pars aquæ per fundum effluit, unâ cum reliqua altitudine aquæ; tempus quo tota aqua efflueret, poterit hoc modo determinari.

Sit totalis altitudo quæ AB; CB reliqua. Altitudinum AB, CB extrahantur radices quadratæ, ac deinde minor radix subtrahatur à majore, ut habeatur differentia; ut enim erit differentia radicum ad majorem, ita tempus observatum ad totale quæsitum; sunt enim omnes altitudines à communi termino B in duplicata ratione temporum.

*De mensura aquarum effluentium.*

**S**UPPOSITA constanti aquæ altitudine pollicum  $75 \frac{1}{10}$ , seu linearum  $909 \frac{6}{10}$  per foramen horizontale rotundum unius pollicis (sicut & per quadratum æquivalens, cuius nempe latus erit linearum  $10 \frac{614}{1000}$ ) intervallo temporis 93 secund. effluxerunt pollices cubici aquæ  $11412 \frac{2}{10}$ ; ergo tempore 10 min. seu 600 secundi effluxissent pollices cubici aquæ  $73631 \frac{1}{2}$ .

Jam ut 10 lin.  $\frac{614}{1000}$  ad pollices  $75 \frac{1}{10}$ , seu ad lineas  $909 \frac{6}{10}$ ; ita  $73631 \frac{1}{2}$  ad numerum cujus logarithmus 6. 7991887, quot scilicet pollices cubici aquæ effluerent intra 10 min. per foramen horizontale latum 10 lineis  $\frac{614}{1000}$ , & longum pollicibus  $75 \frac{1}{10}$  quanta est aquæ altitudo. Hinc per ea quæ supra demonstravimus de proportionibus aquarum effluentium per foramina horizontalia & verticalia, si ex logarithmo 6. 7991887 tollatur differentia inter logarithmos numeri 3, nempe 0. 4771212, & numeri 2, nempe 0. 3010300, quæ erit 0. 1760912; quod idem est ac si factâ additione logarithmi numeri 2 cum logarithmo 6. 7991887, tolleretur à summa logarithmus numeri 3, restabit logarithmus 6. 6230975 numeri experimentis pollices cubicos aquæ qui intra 10 min. effluxerunt per foramen verticale altum 75 poll.  $\frac{1}{10}$  & latum 10 lineis  $\frac{614}{1000}$ . Sed si à logarithmo 6. 6230975 auferatur logarithmus 3. 2375437 numeri 1728 pollicum scilicet cubicorum unius pedis cubici, restabit numerus 3. 3855538, qui erit logarithmus numeri 2429 &  $\frac{1}{2}$  circiter pedum cubicorum aquæ.

Juxta calculum præcedentis propositionis debuissent effluere pollices cubici aquæ  $17125 \frac{1}{2}$  per foramen rotundum unius pollicis intra tempus 93 secund. supposita aquæ altitudine  $909 \frac{6}{10}$  lin. cum effluxerint tantum  $11412 \frac{2}{10}$ , cujus ratio est proximè ut 3 ad 2.

Zzz iiij,

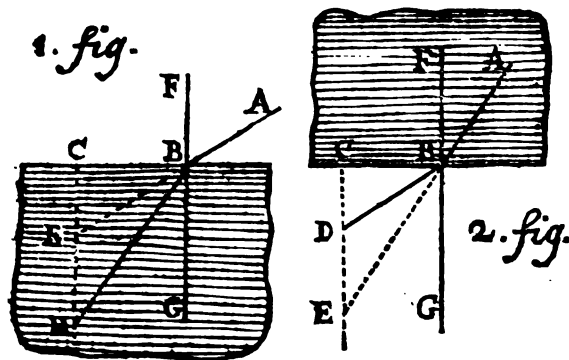


# FRAGMENS DE DIOPTRIQUE.

## PREMIERE PROPOSITION.

*Si un rayon oblique AB tombe sur une surface plate BC;  
& passe dans un autre diaphane, le rayon rompu BD,  
& le prolongé BE tous deux bornez d'une même perpen-  
diculaire DC, seront entr'eux dans la raison du milieu  
d'où vient le rayon à celui où il est entré.*

**C**OMME parce qu'en fait de réfractions l'air est au  
verre comme 3 à 2; & au contraire, le verre à l'air  
comme 2 à 3, le rayon BD passé de l'air dans le verre,



sera à BE comme 3 à 2 dans la premiere figure, & au  
contraire dans la seconde figure.

*Démonstration.*

L'angle BEC est égal à l'angle d'incidence FBA, & l'angle BDC égal à l'angle rompu GBD; donc BD est à BE comme le sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle rompu, c'est-à-dire, comme la mesure du diaphane d'où vient le rayon, à celui où il est entré.

Toutes les propositions suivantes sont generales comme celle-ci; mais pour plus grande facilité nous ne parlerons que du verre à l'égard de l'air.

*Corollaire.*

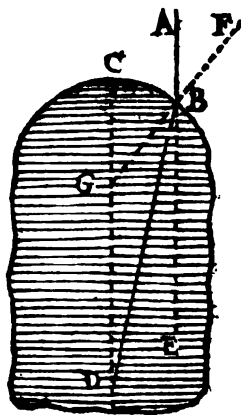
Il s'ensuit que pour les rayons de petite incidence, DC est aussi à EC comme 3 à 2, à cause de l'insensible difference.

## SECONDE PROPOSITION.

*Si un rayon AB tombe obliquement sur la surface spherique d'un verre dont le centre soit G, par lequel soit fait passer l'axe GC parallele à AB: le rayon rompu BD sera à la portion de l'axe DG comme 3 à 2.*

*Démonstration.*

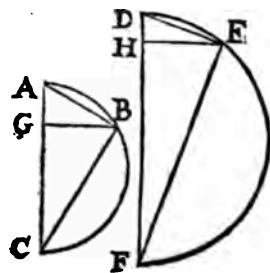
L'ANGLE CGB est égale à l'angle d'incidence ABF, & l'angle GBD est l'angle rompu; donc BD est à DG, comme le sinus de CGB au sinus de GBD, c'est-à-dire, comme 3 à 2.



## Corollaire.

Il s'ensuit que pour les rayons de très-petite incidence, lorsque BD ne diffère point de CD alors DG est égale au diamètre; & partant DC vaut trois demi-diamètres, & alors D est ce qu'on appelle le foyer absolu que nous marquerons dans la suite de la lettre H.

## L E M M E.



*Aux cercles inégaux ABC, DEF; si les cordes AB, DE sont égales, les sinus verses AG, DH seront en raison réciproques des diamètres.*

## Démonstration.

**L**A corde AB est moyenne proportionnelle entre le sinus verse AG & le diamètre AC; donc le rectangle AG, AC est égal au carré de AB. Par la même raison le carré de DE ou AB est égal au rectangle DH, DF; donc les rectangles AG, AC, & DH, DF sont égaux; ils ont donc les côtes réciproques; ce qu'il falloit prouver.



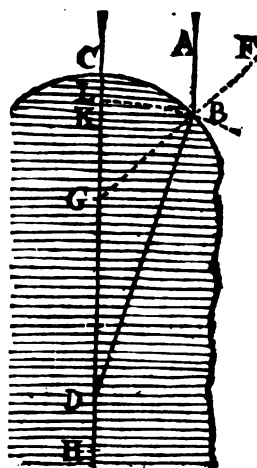
## TROISIÈME PROPOSITION.

*L'incidence sur le verre convexe étant donnée avec le demi-diamètre, trouver la distance entre le foyer absolu & le concours du rayon rompu.*

DANS la figure de la proposition précédente soit marqué le foyer absolu H à la distance de trois demi-diamètres; on demande à connoître DH. Soit pris CK sinus verse de l'incidence. Je dis que DH est égale à  $\frac{4}{3}$  CK.

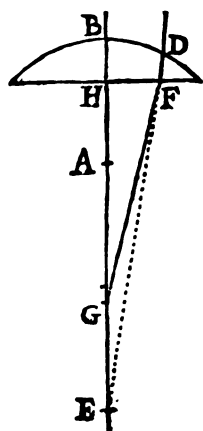
*Démonstration.*

Ayant sur le centre D de l'intervalle DB décrit l'arc BL; alors DL fera à DG, & pareillement HC à HG comme 3 à 2; donc GL est le tiers de DL, aussi bien que GC de HC. D'où il est clair que CH surpasse DL de 3 CL; & ayant ajouté CL à DL, CH surpassera CD du double de CL. Mais parce que les demi-diamètres DL, GC peuvent sans erreur sensible être pris comme 3 à 1, KL est  $\frac{1}{3}$  de CK, & par conséquent CL en vaut  $\frac{2}{3}$ ; & puisque DH est égal à 2 CL, il s'ensuit que DH vaut  $\frac{4}{3}$  CK.



Vous observerez qu'il ne s'agit ici que des rayons dont l'incidence ne passe pas 5 degrez; autrement DH deviendrait si grand, que DL ne pourroit sans erreur être supposé triple de GC pour faire KL  $\frac{1}{3}$  de CK; joint que la proportion réciproque des diamètres suppose les cordes égales, & non pas les sinus droits; mais jusques à 5 degrez c'est la même chose.

## PREMIERE PROPOSITION.



*Si la convexité d'un verre plano-convexe reçoit les rayons parallèles à l'axe, le foyer absolu sera à un diamètre plus  $\frac{1}{3}$  de l'épaisseur loin du sommet de la convexité du verre.*

**A** est le centre; B le sommet; BH l'épaisseur; E le foyer absolu de la convexité si elle étoit seule; FG rayon rompu par la surface plate, & partant G foyer absolu. Je dis que GB vaut un diamètre plus  $\frac{1}{3}$  BH.

*Démonstration.*

Comme 3 est à 2, ainsi EF est à GF, ou EH à GH. Mais EH est égal à 3 demi-diamètres moins BH; donc GH est égal à un diamètre moins  $\frac{1}{3}$  BH, & finalement GB vaut un diamètre plus  $\frac{1}{3}$  BH.

## SECONDE PROPOSITION.

*Aux plan-convexes, si un rayon parallèle à l'axe entre par la convexité, son éloignement du foyer absolu sera égal à  $\frac{r}{6}$  du sinus verse de la première incidence, soit que ce sinus verse soit égal à l'épaisseur du verre, soit qu'il soit plus petite.*

I. CAS.

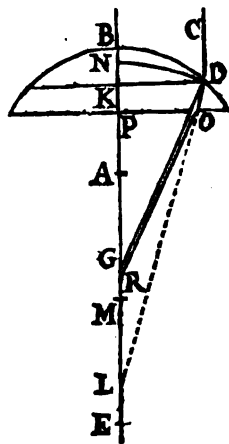
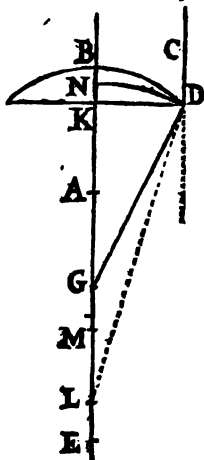
**B**K est l'épaisseur égale au sinus verse de l'incidence BD; E foyer absolu de la convexité; EL éloignement du foyer absolu de la même convexité; M foyer ab-

solu du plan-convexe; G concours du rayon : je dis que G est au-dessus de M à  $\frac{2}{7}$  de BK.

*Démonstration.*

Soit sur le centre G décrit l'arc DN, lequel à cause que GD est environ double de AB, coupera BK par la

moitié en N. LD  
LA || 3 | 2, & LD  
DG || 3 | 2 : donc DG  
ou GN = AL; mais  
AL vaut 1 diamètre  
—  $\frac{2}{3}$  BK, donc GN  
= 1 diamètre —  $\frac{2}{3}$  B-  
K, ajoutant BN qui  
est  $\frac{1}{3}$ , alors GB sera =  
1 diamètre —  $\frac{1}{3}$  BK :  
d'ailleurs BM distance  
du foyer absolu vaut 1  
diamètre +  $\frac{2}{3}$  BK, la  
distance GM sera donc  $\frac{7}{3}$  BK.



Supposons maintenant que l'épaisseur soit augmentée en PO; alors le foyer absolu M descendra d'un tiers de PK, mais aussi G descendra d'un tiers de PK ou DO, qui sont comme égales, la seconde réfraction se faisant en O par une ligne parallèle à DG, qui sera OR; puisque LD est environ triple de LG aussi bien que LO de LR, il s'ensuit que la différence OD sera triple de RG.

II. Cas.

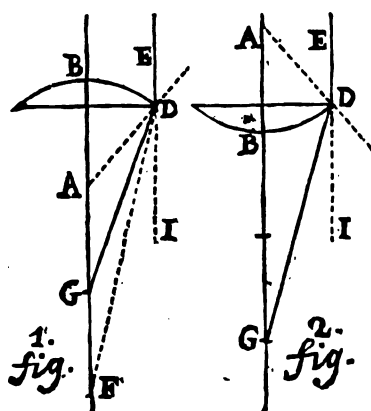


## SECONDE PROPOSITION.

*Tout verre plan-convexe ramasse les rayons parallèles à l'axe, à la distance du diamètre de la convexité, de quelque côté qu'on la tourne.*

I. Cas.

**S**OIT la convexité faite antérieure, comme en la première figure; le centre A; le rayon ED incident parallèle à l'axe BA & prolongé en I; la première réfraction



tion IDF ou DFA  $= \frac{1}{2}$  DAB ou IDA : donc FDA étant égal à 2, alors DEA sera égal à 1; donc FA est double de AD, c'est-à-dire, par la première réfraction, le rayon en F est à une distance de trois demi-diamètres: ce qu'il faut bien retenir pour la suite. Mais par la seconde réfraction faite par la surface plate, le concours F

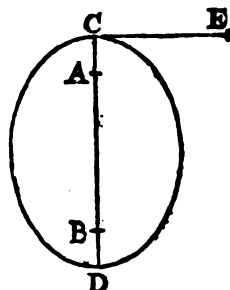
est approché du tiers de FB: donc BG distance du foyer G vaut un diamètre, & l'angle IDG ou DGB  $= \frac{1}{2}$  DAB.

II. Cas.

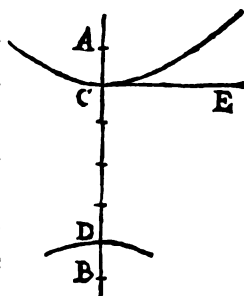
Soit la surface plate antérieure comme en la seconde figure, alors il n'y aura qu'une réfraction faite par la seconde surface: mais qui vaudra tout d'un coup la moitié de DAB: donc AD sera à DG ou BG comme 1 à 2.

Or avant que de passer outre, il sera bon de considérer que dans le premier cas il arrive au cercle la même chose qu'à l'ellipse. Car si la seconde surface avoit été concave d'une circonférence décrite sur le point F, les rayons seroient venus en F sans autre réfraction: ce

qui est proprement ce qui arrive à l'ellipse. Et pour plus grand éclaircissement, soit une ellipse dont les foyers A, B : le grand axe CD, & le parametre CE : & suivant la mesure des réfractations, soit  $AB = 6$ , &  $CD = 9$ , alors le rectangle DAC sera  $= 11\frac{1}{4}$  : donc le rectangle de la figure DCE  $= 45$  : lequel étant divisé par CD, donnera 5 pour le parametre. Donc, puisque CB distance du foyer contient  $1\frac{1}{2}$  parametre CE, si sur ce même parametre on décrit un cercle, sa convexité sans autre réfraction portant aussi son foyer au sesquidiametre, il s'en suit que le cercle & l'ellipse en ce cas font le même effet.



Le second cas répond aussi à ce qui arrive à l'hyperbole : car posé la distance des foyers  $AB = 6$ , & que l'axe transverse CD soit  $= 4$  : alors le rectangle BCA sera 5 : donc le rectangle de la figure DCE sera 20, lequel divisé par 4 donnera 5 pour le parametre CE qui sera égal à CB distance du verre au foyer. Si donc on décrit un cercle sur CE, lequel soit présenté à l'objet de même que l'hyperbole, il fera le même effet pour la distance du foyer : & d'ailleurs il est démontré que de tous les cercles qui toucheront une section conique par dedans au *vertex*, le plus grand est celui qui est décrit sur le parametre.



## TROISIÈME PROPOSITION.

*Etant donné un verre convexe des deux côtés, égal ou inégal ; comme la somme des diamètres est à un des deux , ainsi l'autre diamètre est à la distance du foyer.*

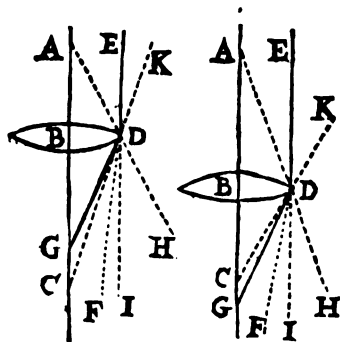
**S**OIT AC les centres des convexitez ; ED rayon incident parallèle à l'axe , & prolongé en I ; ADH , CDK perpendiculaires.

*Démonstration.*

Par la première réfraction IDF est égal à  $\frac{1}{2}$  DCA.

Par la seconde réfraction FDG est égal à  $\frac{1}{2}$  IDF +  $\frac{1}{2}$  HDI ou DAC : donc FDG est égal à  $\frac{1}{2}$  DAC +  $\frac{1}{2}$  DAC ; & IDG ou DGA sera égal à  $\frac{1}{2}$  DCA +  $\frac{1}{2}$  DAC ; donc 2 DGA est égal à DAC + DCA ; par conséquent A + C est à C , comme 2 G est à C , c'est-à-dire , AC est à AD , comme 2 CD est à DG : &

A + C est à A , comme 2 G est à A : c'est-à-dire , AC est à CD , comme 2 AD est à DG.

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que le foyer G est toujours plus proche que le grand demi-diamètre , & plus loin que le petit , & qu'il ne peut tomber au point C , que quand les convexitez son égales.

*Second Corollaire.*

Il s'ensuit aussi que quand les convexitez sont égales, le foyer est au centre de part & d'autre.

*Troisième Corollaire.*

Il s'ensuit aussi, que nonobstant l'inégalité des convexitez, le foyer est de part & d'autre à égale distance: c'est-à-dire, qu'il n'importe de quel côté le verre soit tourné.

*Quatrième Corollaire.*

Il s'ensuit encore que la totale réfraction IDG ou DGA est toujours la moitié de l'angle ADK, lequel comprend DAC + DCA.

## QUATRIÈME PROPOSITION.

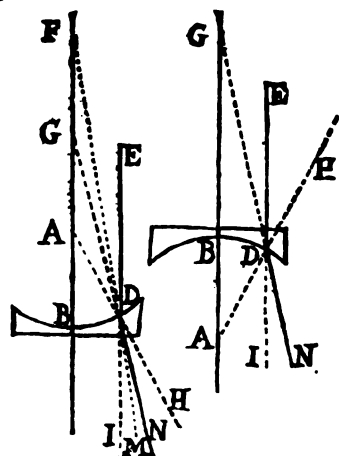
*Les verres plan-concaves détournent les rayons parallèles à l'axe comme s'ils venoient de l'extrémité du diamètre prise au devant du verre.*

*Démonstration.*

**L**A première réfraction IDM ou IDF ou DFA est égale à  $\frac{1}{2}$  EDA ou  $\frac{1}{2}$  ADF; donc AF est double de AB: c'est-à-dire, que par la première réfraction s'il n'en arrivoit point d'autre, le rayon seroit détourné en M comme venant de F à la distance de trois demidiamètres: mais à cause de la surface plate, la seconde réfraction approche le concours F en G du  $\frac{1}{2}$  de BF: donc par la totale réfraction IDN, le rayon DN vient comme de G à la distance du diamètre.

I. Cas.

## II. Case



Il n'y a ici qu'une réfraction non plus qu'au second cas de la deuxième proposition : mais cette réfraction est tout d'un coup une moitié de l'incidence, comme étant faite du verre à l'air : donc IDN ou DGA est égal à  $\frac{1}{2}$  DAG : donc DG ou GB est égal à 2 AD ou 2 AB.

Notez que  $G$  est ici une espèce de foyer, mais de divergence.

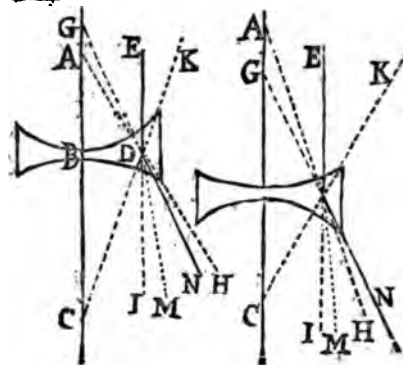
CINQUIÈME PROPOSITION.

*Etant donné un verre concave des deux côtes égal ou inégal:  
comme la somme des diamètres est à l'un des deux, ainsi  
l'autre est à la distance du foyer de divergence,*

*Démonstration.*

**L**A premiere réfraction I D M est égale à  $\frac{1}{3}$  DAB.  
La seconde réfraction M D N est égale à  $\frac{1}{6}$  DAB

**L**a seconde réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  DAB +  $\frac{1}{2}$  DCA. Donc la totale IDN est égale à  $\frac{1}{2}$  DAB +  $\frac{1}{2}$  DCA : donc ayant prolongé ND en G, l'angle DGC sera égal à  $\frac{1}{2}$  DAB +  $\frac{1}{2}$  DCA : & le reste comme en la troisième proposition.



**Premier**

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit qu'un verre également concave fait diverger les rayons comme s'ils venoient du centre.

*Deuxième Corollaire.*

Il s'ensuit aussi qu'il n'importe de quel côté on tourne un verre inégalement convexe.

*Troisième Corollaire.*

Il s'ensuit encore que la totale réfraction est  $\frac{1}{2}$  ADK.

## SIXIÈME PROPOSITION.

*Tout verre qu'on appelle Menisque, c'est à-dire, qui a un côté convexe & l'autre concave, a son foyer de convergence ou de divergence dans la proportion suivante.*

COMME la différence des diamètres est à un des diamètres, ainsi l'autre diamètre est à un quatrième terme, qui sera le foyer de convergence à la façon des convexes, si la convexité prévaut : mais il sera le foyer de divergence à la façon des concaves, si la concavité prévaut : car si la concavité étoit supposée égale à la convexité, il n'y a point de difficulté que la deuxième réfraction détruisant la première, le rayon demeureroit parallèle.

Il y a donc deux cas à démontrer : & notez que dans toutes les figures suivantes, A est centre de la convexité, & C celui de la concavité.

Quand les menisques appartiennent aux convexes, 1. cas  
*Rec. de l'Acad. Tom. VI.* Bbbb

c'est-à-dire, que le diamètre de la convexité est plus petit que celui de la concavité.

*Démonstration.*

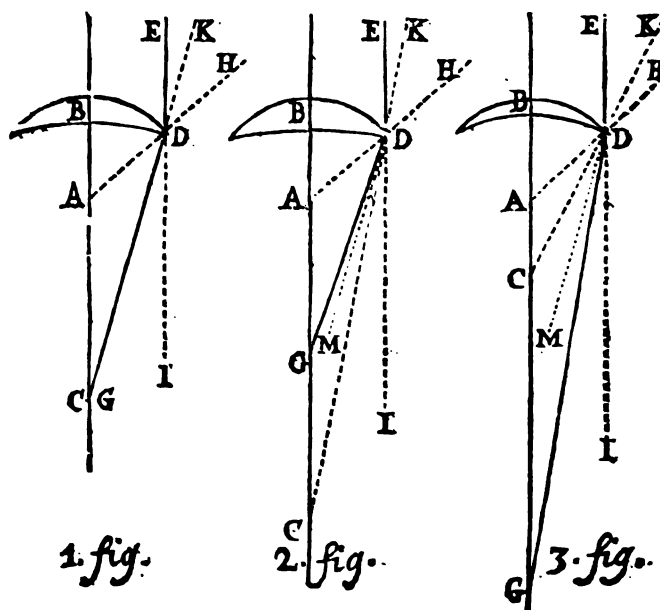
Soit premièrement la convexité tournée vers l'objet; alors pour la démonstration il faut considérer la proportion des diamètres entr'eux.

*Première  
figure.*

Soit BC demi-diamètre de la concavité triple de AB: alors par la première réfraction le rayon sera porté en C: & comme il sera devenu perpendiculaire à la concavité; il ne sortira point de C. Donc C & G concourront: donc DGA qui est  $\frac{1}{3}$  DAB, sera  $\frac{1}{3}$  ADC.

*Deuxième  
figure.*

Soit BC plus grande que le triple de AB: alors le tiers



de DAB sera plus grand que IDC. Donc par la première réfraction IDM étant  $\frac{1}{3}$  DAB, le rayon rompu DM

Soit BC moindre que le triple de AB, alors par la première réfraction DM ne passera pas DC : donc comme MDA est toujours  $\frac{2}{3}$  DAB, MDC est égal à  $\frac{2}{3}$  DAB — ADC. Mais MDG est égal à  $\frac{1}{2}$  MDC : donc MDG est égal à  $\frac{1}{3}$  DAB —  $\frac{1}{2}$  ADC. Orant donc MDG de IDM restera  $\frac{1}{2}$  ADC.

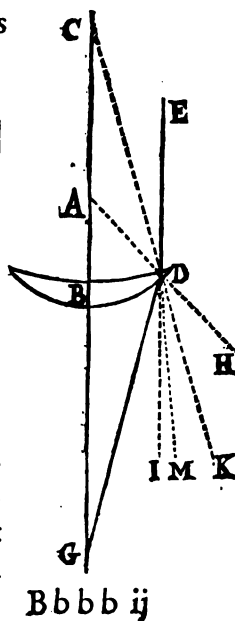
Soit enfin la concavité du côté de l'objet. IDM est égal à  $\frac{1}{3}$  DCB ou IDK : donc MDK est égal à  $\frac{2}{3}$  DCB, & MDH sera égal à  $\frac{2}{3}$  DCB + KDH ou ADC. Mais MDG est égal à  $\frac{1}{2}$  MDH : donc MDG est égal à  $\frac{1}{3}$  DCB +  $\frac{1}{2}$  ADC. Orant donc IDM, reste IDG ou DGA égal à  $\frac{1}{2}$  ADC.

Voyez la  
Figure sui-  
vante.

DGA est égal à  $\frac{1}{2}$  ADC : donc dans les trois premières figures,

	CDA	DAC	
	<sup>2</sup> DGA	DAG.	
Ou bien comme	CA	CD	
	<sup>2</sup> AD	DG.	
Et dans la 4 <sup>e</sup> figure	CDA	DCA	
	<sup>2</sup> DGA	DCA.	
Ou bien comme	CA	DA	
	<sup>2</sup> CD	DG.	

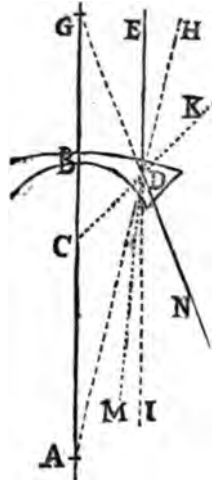
Donc doublant les deux premiers termes de ces proportions on aura généralement, que comme la différence est à tel qu'on voudra des diamètres, ainsi



l'autre est au foyer : ce qui vient de ce que l'angle du foyer n'est ici que moitié de la différence des angles des centres, au lieu qu'à la troisième proportion il est moitié de la somme.

II. Cas.

Quand les menisques appartiennent aux concaves, c'est-à-dire, quand le diamètre de la convexité est plus grand que celui de la concavité, laquelle prévaut.



Soit premièrement la convexité vers l'objet. La première réfraction IDM est égale à  $\frac{1}{2}$  DAB, donc MDA est égal à  $\frac{1}{2}$  DAB, & MDC égal à  $\frac{1}{2}$  DAB + ADC : mais la deuxième réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  MDC : donc MDN est égal à  $\frac{1}{2}$  DAB +  $\frac{1}{2}$  ADC : ôtant donc IDM, reste IDN ou DGC égal à  $\frac{1}{2}$  ADC.

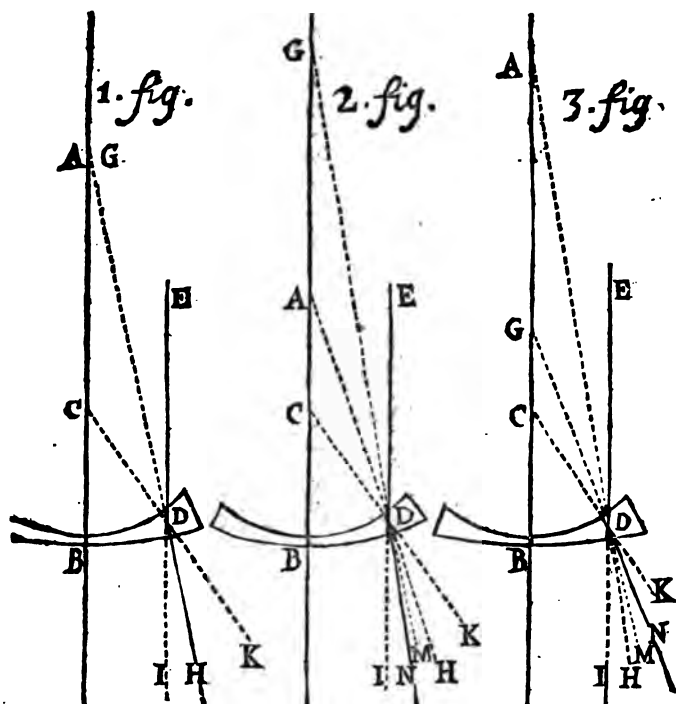
Soit secondement la concavité vers l'objet.

Dans la première figure des trois suivantes, AB étant triple de BC, la première réfraction portera le rayon sur DH, & il n'y aura point de seconde réfraction, & le centre A sera le foyer de divergence : or par la proportion donnée DAC ou DGC est égal à  $\frac{1}{2}$  ADC.

Dans la deuxième figure AB est moindre que triple, si bien que le rayon par la première réfraction n'est pas porté jusqu'en DH. IDM est égal à  $\frac{1}{2}$  BCD ou IDK, & MDK égal à  $\frac{1}{2}$  BCD : donc MDH est égal à  $\frac{1}{2}$  BCD — HDK ou ADC. Mais MDN est égal à  $\frac{1}{2}$  MDH : donc MDN est égal à  $\frac{1}{2}$  BCD —  $\frac{1}{2}$  ADC. Si donc de IDM on ôte MDN, restera IDN, ou DGC égal à  $\frac{1}{2}$  ADC.

Dans la troisième figure AB étant plus grand que le triple de BC, le rayon DM par la première réfraction passe DH. IDM est égal à  $\frac{1}{2}$  BCD ou IDK, & MDK est

égal à  $\frac{1}{2}$  BCD : donc MDH est égal à HDK —  $\frac{1}{2}$  BCD.  
 Mais MDN est égal à  $\frac{1}{2}$  MDH ; donc MDN est égal à  $\frac{1}{4}$



HDK ou ADC —  $\frac{1}{2}$  BCD ; ajoutant donc IDM, on aura IDN ou DGC égal à  $\frac{1}{2}$  ADC.

C'est donc ici la même conclusion que dessus, avec cette seule différence, que le quatrième terme trouvé donne ici le foyer de divergence au-devant du verre.



## SEPTIÈME PROPOSITION.

*Si un rayon tombant au point D sur un verre convexe, vient d'un point de l'axe F, sa totale réfraction MDO sera égale à la moitié de l'angle HDC ou ADK compris entre les lignes tirées des centres des convexitez.*

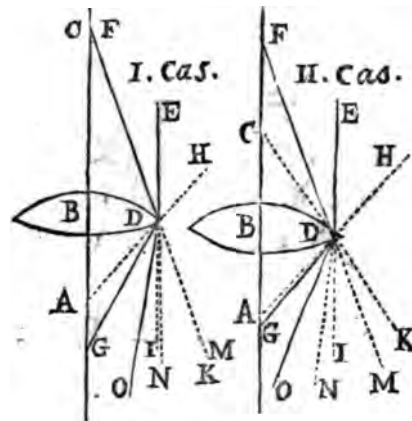
## Démonstration.

I. &amp; II. Cas.

**S**OIT le point F le même que le centre C, comme dans la première figure, ou bien au-delà, comme dans la deuxième figure. La première réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  HDF : la seconde NDO est égale à  $\frac{1}{2}$  HDF

+  $\frac{1}{2}$  CDF : donc MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  HDF +  $\frac{1}{2}$  CDF, c'est-à-dire, MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  HDC, ou ADK.

III. Cas.



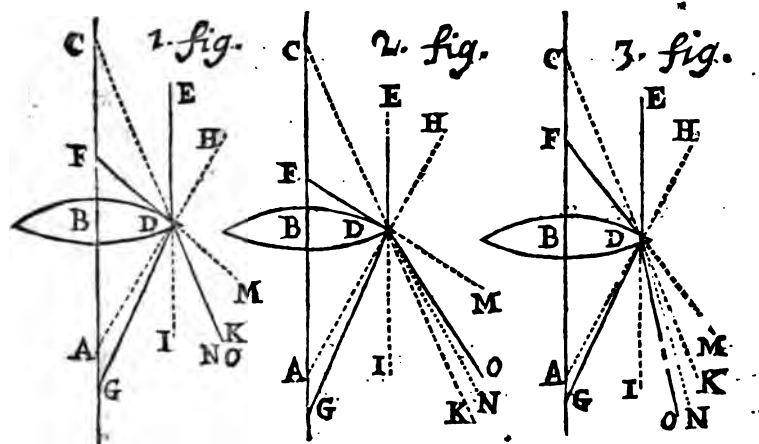
Soit le point F plus près que le centre C, alors la production DM tombera hors l'angle ADK : d'où il s'ensuit trois autres cas exprimez dans les figures suivantes.

1°. Soit l'angle CDF égal au tiers de FDH, alors par la première réfraction, le rayon DN tombera sur DK, & ne fera plus d'autre réfraction ; ainsi MDO tiers de FDH sera par la supposition  $\frac{1}{2}$  CDH.

Notez qu'en ce cas, DF est la moitié du foyer des parallèles, comme on le verra dans la dixième proposition.

2°. Soit l'angle CDF plus grand que le tiers de FDH, alors DN ne viendra pas jusqu'en DK, & par conséquent

DO moins divergeant que FD, tombera entre MD & DN. Cela étant, la premiere réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{3}$  HDC +  $\frac{1}{3}$  CDF : la seconde NDO est égale à  $\frac{1}{2}$  NDK, c'est-à-dire, NDO est égal à  $\frac{1}{2}$  CDF —  $\frac{1}{2}$  MDN,



ou bien NDO égal à  $\frac{1}{2}$  CDF —  $\frac{1}{6}$  HDC —  $\frac{1}{6}$  CDF. Mais MDO est égal à MDN — NOD : donc MDO est égal à  $\frac{1}{3}$  HDC +  $\frac{1}{3}$  CDF —  $\frac{1}{2}$  CDF +  $\frac{1}{6}$  HDC +  $\frac{1}{6}$  CDF, c'est-à-dire, MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  HDC.

3°. Soit l'angle CDF moindre que le tiers de FDH, alors DN passera DK, & partant DO sera tout à la gauche. La premiere réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{3}$  HDC +  $\frac{1}{3}$  CDF : & la seconde NDO égale à  $\frac{1}{2}$  NDK, c'est-à-dire, NDO est égal à  $\frac{1}{2}$  MDN —  $\frac{1}{2}$  CDF, ou bien NDO est égal à  $\frac{1}{6}$  HDC +  $\frac{1}{6}$  CDF —  $\frac{1}{2}$  CDF. Mais MDO est égal à MDN + NDO : donc MDO est égal à  $\frac{1}{3}$  HDC +  $\frac{1}{3}$  CDF +  $\frac{1}{6}$  HDC +  $\frac{1}{6}$  CDF —  $\frac{1}{2}$  CDF, c'est-à-dire, MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  HDC.

Notez que dans tous les cas de cette proposition, quand les convexitez sont inégales, il peut arriver que DO soit ou convergente ou parallele ou encore diver-

gente, suivant que le point F sera plus loin que le foyer, ou dans le foyer même ou au-deçà ; mais cela ne fait rien à la démonstration.

### HUITIÈME PROPOSITION.

*Figures de  
la proposition  
précédente.*

*Deux rayons étant posés, l'un parallèle ED dont la totale réfraction soit IDG, l'autre oblique FD, dont aussi la totale réfraction soit MDO ; la différence des réfractions ODG sera toujours égale à EDF différence des premières incidences sur le verre.*

#### *Démonstration.*

PAR la proposition précédente & par le quatrième corollaire de la troisième proposition les angles MDO, IDG sont moitié d'un même angle HDC, ou ADK, & par conséquent égaux entr'eux ; ayant donc ôté ( dans les premières figures ) ou ajouté ( dans les dernières ) l'angle commun IDO, on aura ODG égal à IDM, c'est-à-dire, à EDF.

#### *Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que l'angle DFB est toujours égal à l'angle ODG.

#### *Second Corollaire.*

Les mêmes choses se démontreront aussi facilement à l'égard des verres concaves, comme il se peut voir par le troisième corollaire de la cinquième proposition, & de ce que, supposé un concave égal à un convexe, si les incidences sont égales, les réfractions le seront aussi ; l'une en écartant, l'autre en réunissant les rayons.

### NEUVIÈME

## NEUVIÈME PROPOSITION.

*Probleme pour les rayons divergens d'au-delà du foyer du verre convexe.*

*Le foyer d'un verre convexe & la distance d'un point de divergence plus éloigné que le foyer étant connus trouver à quelle distance du verre les rayons seront ramassés.*

## Règle.

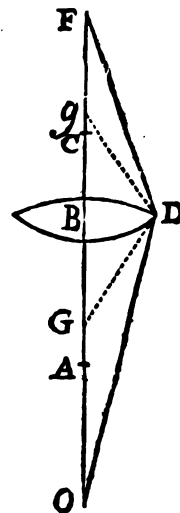
**C**OMME la distance du point de divergence moins le foyer est au foyer, ainsi le même foyer est à un quatrième terme, auquel le foyer étant ajouté vous aurez le requis.

Ou bien, comme la distance du point de divergence moins le foyer est à la distance toute entière, ainsi le foyer est au requis.

## Démonstration.

Soient les foyers  $G, g$ , & la distance du point de divergence  $FB$ ; on demande  $BO$ . Par le premier corollaire de la huitième proposition l'angle  $ODG$  est égal à  $DFg$ ; mais à cause que les distances des foyers  $GD, gD$  sont égales par le troisième corollaire de la troisième proposition, les angles  $OGD, DgF$  sont aussi égaux: donc les triangles  $FgD, DGO$ , sont semblables; & partant comme  $FB$  —  $gB$  est à  $gB$  ou  $gD$  (lesquelles sont sensiblement égales à cause des petites incidences) ainsi  $GB$  ou son égale  $GD$  est à  $GO$ , à laquelle ajoutant le foyer  $GB$  on aura  $BO$  que l'on demande.

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

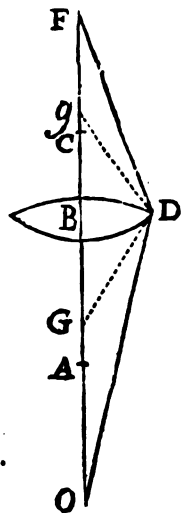


Cccc

Ou bien, comme  $FB = g$  B est à FB ou FD son égale, ainsi GB ou GD est à OB ou OD que l'on cherche.

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que les rayons venant du double du foyer, sont ramassés à la même distance.



*Deuxième Corollaire.*

Il s'ensuit comment on peut trouver le juste foyer d'un verre par le moyen de la peinture d'un objet proche dont la distance soit connue. Car puisque l'angle ODG est égal à F, si on fait DOG commun, les triangles DOG, FOD seront semblables: donc comme FO distance entre l'objet & la peinture, est à FD ou FB distance entre l'objet & le verre; ainsi DO ou BO distance entre le même verre & la peinture, est à GD ou GB foyer requis.

Notez que le meilleur moyen de trouver le foyer d'un verre par la peinture, est de recevoir celle du soleil sur un papier gris, lorsqu'il passe quelques nuages entrecoupez, si c'est un grand verre; car aux petits on le trouve facilement par la peinture des objets un peu éloignez & éclairez, mais il ne faut pas que le verre soit fort découvert.

Un autre moyen pour les grands verres est avec un oculaire un peu fort, en regardant la lune, lorsqu'elle n'est pas pleine ou quelque moindre planette, ou même les étoiles fixes.

*Troisième Corollaire.*

Il s'ensuit de plus comment connoissant le foyer d'un verre, & sçachant la distance du verre à la peinture, on trouvera la distance de l'objet au verre. Car en renversant la première règle, le foyer qui est connu se trouve moyen proportionnel entre deux termes dont le premier est donné : donc comme la distance de la peinture au verre est au foyer, ainsi le foyer est à un quatrième terme, lequel augmenté du foyer, donnera la distance entre le verre & l'objet.

On peut juger par cette règle que la distance de l'objet ne doit pas être excessive à comparaison du foyer ; car quelle partie le foyer est de la distance  $Fg$ , telle partie le prolongement  $GO$  est du même foyer, & partant devient insensible quand la distance de l'objet est trop grande à comparaison du foyer ; d'où vient que pour trouver le foyer d'un petit verre, il n'est pas nécessaire de choisir un objet fort éloigné, d'autant que la différence devient bien-tôt insensible.

## DIXIÈME PROPOSITION.

*Probleme pour les rayons divergens d'au-deçà du foyer d'un verre convexe.*

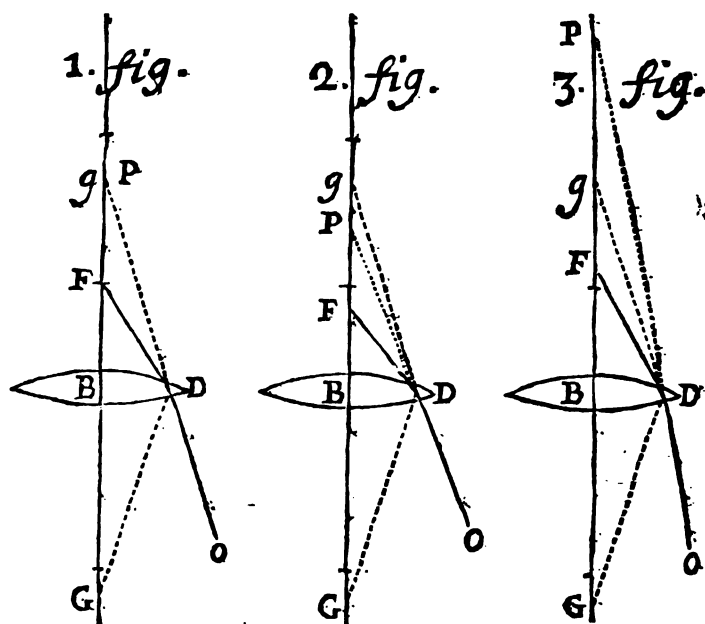
*Le foyer d'un convexe, & la distance d'un point de divergence plus proche que le foyer étant connus, trouver à quelle distance le rayon devenu moins divergent iroit concourir avec l'axe s'il étoit prolongé.*

**I**L est clair de ce dessus, que le verre convexe ramasse les rayons qui viennent d'un point au-delà du foyer, & qu'il rend parallèles ceux qui viennent du foyer même ;

Cccc ij

mais qu'il laisse encore divergens ceux qui viennent de plus près, diminuant seulement leur divergence, & les disposant comme s'ils venoient d'un point plus éloigné; & c'est ce point que l'on cherche, & que j'appellerai dernière divergence, au lieu que la première divergence est la distance entre le point premierement donné & le verre.

Les figures représentent trois cas. Au premier le point F de première divergence est au milieu de Bg distance du verre au foyer, & alors le point P de dernière diver-



gence tombe en g. Au second & troisième F est au-dessous du milieu & au-dessus, suivant quoi P est aussi au-dessous ou au-dessus de g: mais la pratique & la démonstration sont toutes semblables.

*Règle.*

Comme le foyer moins la première divergence est au foyer, ainsi le foyer est à un quatrième terme, duquel le foyer étant ôté reste la seconde divergence.

Ou bien, comme le foyer moins la première divergence est au foyer; ainsi la première divergence est à la seconde.

*Démonstration.*

Soit FD le rayon incident venant du point F, dont la distance FB ou FD soit connue, aussi bien que la distance des foyers Bg ou BG, & soit DO le rayon rompu prolongé en P. L'angle ODG, qui est égal à DFB par le premier corollaire de la huitième proposition, est aussi égal aux deux angles DGP, DPG pris ensemble; mais l'angle DFB est égal à l'angle DgF ou DGP + FDg; donc les angles DPG & FDg sont égaux, & ainsi les triangles DPG, FDg sont semblables; donc  $gF | gD || GD | GP$ , c'est-à-dire,  $gF | gB || GB | GP$ , qui est la première règle.

Pour la seconde règle, il faut considérer les triangles PFD, DFg, qui sont semblables, puisque l'angle obtus F est commun & que les angles FDg, FPD sont égaux, comme on l'a démontré ci-devant, donc  $gF | gD || FD | PD$ , c'est-à-dire,  $gF | gB || FB | PB$ . Ce qu'il falloit démontrer.



## ONZIÈME PROPOSITION.

*Probleme pour les rayons convergens sur un verre convexe.  
Sachant les foyers d'un verre convexe & la premiere convergence d'un rayon incident, trouver sa derniere convergence, ou son concours avec l'axe.*

*Voyez la  
Figure précédente.*

CETTE proposition n'est autre que la précédente renversée: car posé OD pour rayon incident avec une convergence qui iroit en P, le cours se fera suivant la règle qui suit.

*Règle.*

Comme la premiere convergence augmentée du foyer est au foyer; ainsi la premiere convergence est à la seconde.

*Démonstration.*

Il s'enfuit des démonstrations de la proposition précédente que les triangles GDP, DFP sont semblables, l'un & l'autre étant semblable au triangle DFg; donc  $PD \parallel DG \parallel PF \parallel FD$  & en composant  $PD + DG \parallel DG \parallel PF + FD \parallel FD$ , c'est-à-dire,  $PG \parallel DG$  ou  $GB \parallel PB \parallel FD$  ou  $FB$ ; ce qu'il falloit prouver.

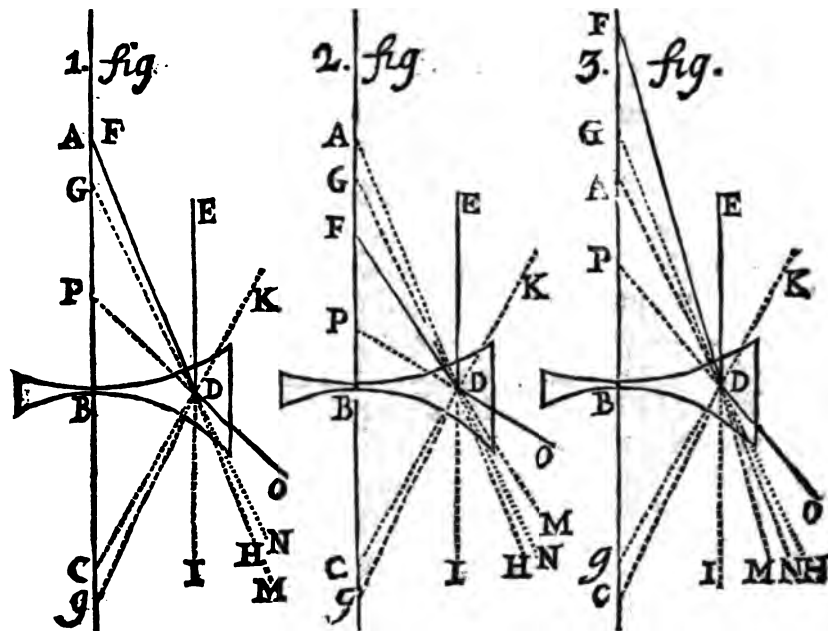


## DOUZIÈME PROPOSITION.

*Si un rayon venant d'un point de l'axe F tombe sur un verre concave dont les centres soient A, C, sa totale réfraction MDO sera toujours égale à  $\frac{1}{2}$  ADK.*

*Démonstration.*

**S**OIT le point de divergence F même que le centre. I. Cas  
Le rayon droit ADM tombant par l'hypothèse sur la perpendiculaire ADH, il n'y aura point de réfraction à l'entrée du verre, mais seulement à la sortie, laquelle réfraction sera MDO égale à  $\frac{1}{2}$  HDC ou ADK.



Soit F plus proche du verre que le centre A. La première réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  ADF, donc NDH II. Cas,

est égal à  $\frac{1}{2}$  ADF : mais la dernière réfraction NDO est égale  $\frac{1}{2}$  NDH  $+$   $\frac{1}{2}$  HDC ou ADK, ou bien NDO est égal à  $\frac{1}{2}$  ADF  $+$   $\frac{1}{2}$  ADK ; ôtant donc MDN égal à  $\frac{1}{2}$  ADF, il restera MDO égal à  $\frac{1}{2}$  ADK.

III. Cas.

Soit F plus loin du verre que le centre A. La première réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  ADF, mais la dernière réfraction NDO est égale à  $\frac{1}{2}$  NDM  $+$   $\frac{1}{2}$  MDC ; ou bien NDO est égal à  $\frac{1}{2}$  ADF  $+$   $\frac{1}{2}$  MDC ou FDK : ajoutant donc MDN égal à  $\frac{1}{2}$  ADF, on aura MDO égal à  $\frac{1}{2}$  ADF  $+$   $\frac{1}{2}$  FDK, c'est-à-dire, MDO égal à  $\frac{1}{2}$  ADK.

### *Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que posé deux rayons l'un ED parallèle à l'axe, & l'autre oblique FD venant d'un point de l'axe, la totale réfraction IDN de la parallèle ED sera toujours égale à MDO totale réfraction de FD ; car l'une & l'autre est toujours égale à  $\frac{1}{2}$  ADK dans les précédentes figures.

### *Deuxième Corollaire.*

Ayant prolongé ND en G qui est le foyer, & QD en P. Puisque l'angle IDN est égal à MDO, l'angle DGB sera toujours égal à l'angle FDP. Donc ayant pris Bg égale à la distance du foyer BG & tiré gD, les triangles FDg, FPD, ayant les angles DgF, PDF égaux & l'angle DFg commun, seront semblables ; mais aussi à cause de l'angle DPG commun, & des angles PDF, DGP égaux, les triangles PDF, PGD seront semblables ; donc les triangles FDg, PDG seront semblables.

## TREIZIÈME PROPOSITION.

*Probleme pour les rayons divergens qui tombent sur un verre concave.*

*Règle.*

**C**OMME la distance entre le verre & le point de divergence augmentée du foyer est au foyer, ainsi le foyer est à un quatrième terme, lequel étant ôté du foyer, il restera la distance entre le verre & le point de plus grande divergence.

*Démonstration.*

Par le deuxième corollaire de la proposition précédente, posé  $FD$  rayon divergent, les triangles  $FDg$ ,  $PDG$  sont semblables; donc comme  $Fg$  est à  $gD$ , ainsi  $GD$  est à  $GP$ , ou bien comme  $Fg$  est à  $gB$ , ainsi  $GB$  est à  $GP$ ; donc ayant ôté  $GP$  du foyer  $GB$ , on aura  $PB$  distance du point, auquel  $OD$  prolongé iroit concourir avec l'axe.

*Voyez la Figure précédente.*

## QUATORZIÈME PROPOSITION.

*Si un rayon convergent tombe sur un verre concave, sa totale réfraction sera toujours égale à l'angle du foyer de même que pour les divergens.*

**S**I le rayon convergent tend au foyer, il est clair qu'il deviendra parallèle à l'axe.

*I. Cas.*

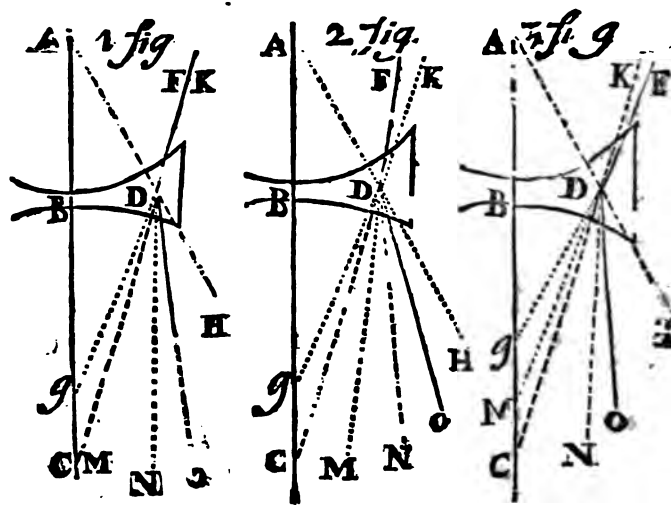
S'il tend à un point plus proche que le foyer, il deviendra moins convergent, & alors pour prouver ce qui est requis, il ne faut que renverser les deux dernières figures.

*II. Cas.  
Voyez la Figure précédente.*

*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

*Dddd*

res de la douzième proposition, & prendre ODP pour la première convergence & MDF pour la dernière; car il est manifeste que l'angle PDF sera toujours égal à l'angle DGB, soit que DF tombe au-dessous de G, ce qui arrivera lorsque P sera plus proche que la moitié du foyer, comme dans la deuxième figure, soit qu'il tombe au-dessus comme dans la troisième figure.



III. Cas. Mais enfin, si le rayon tend à un point plus éloigné que le foyer, il deviendra divergent. Soient dans ces trois figures suivantes les centres AC, l'incidence D, la première réfraction MDN, & la seconde NDO, & le foyer g.

### Démonstration.

Soit dans la deuxième figure FD au-dessus de DK. La première réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  ADF, la seconde NDO est égale à  $\frac{1}{2}$  CDN, ou bien à un  $\frac{1}{4}$  ADF +  $\frac{1}{2}$  FDK : donc MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  ADK.

Soit dans la troisième figure FD au-dessous de DK. La première réfraction MDN est égale à  $\frac{1}{2}$  ADF, la seconde NDO est égale à  $\frac{1}{2}$  MDN —  $\frac{1}{2}$  FDK, ou bien à  $\frac{1}{2}$  ADF —  $\frac{1}{2}$  FDK, c'est-à-dire, MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  ADK.

Dans la première figure FD étant la même que KD, l'angle FDK est nul; ainsi il est clair que MDO est égal à  $\frac{1}{2}$  ADK. Or toujours l'angle du foyer Dg B, qui est égal à la totale réfraction de la parallèle à l'axe, est aussi égal à  $\frac{1}{2}$  ADK, par la cinquième proposition: donc MDO est égal à Dg B, ce qui étoit à prouver.

## QUINZIÈME PROPOSITION.

*Probleme pour les rayons convergens qui tombent sur un verre concave.*

**S**I le rayon tend à un point de l'axe plus proche du verre que le foyer, on trouvera ainsi sa moindre convergence.

1. Cas.

*Règle.*

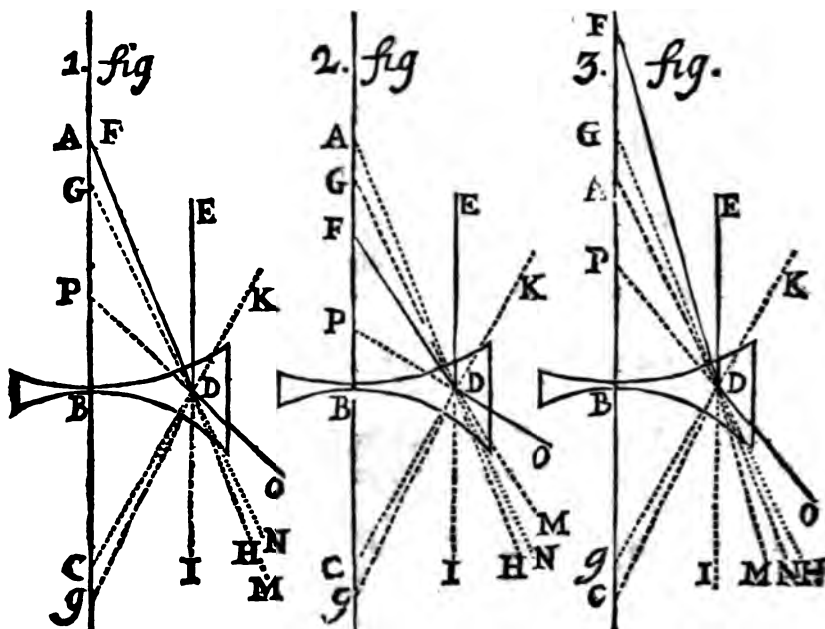
Comme la distance entre le point de la première convergence & le foyer plus proche, est au foyer; ainsi le foyer est à un quatrième terme, duquel le foyer étant ôté, il restera la distance entre le verre & le point de moindre convergence.

*Démonstration.*

Ayant renversé ces figures & posé OD rayon incident avec convergence en P, il sera détourné en F par le deuxième cas de la proposition précédente: mais par le deuxième corollaire de la douzième proposition les triangles

D d d d ij

PDG, FDg sont semblables, donc  $PG \parallel GD \parallel Dg \parallel gF$ ,  
dont ayant ôté  $gB$ , on aura  $BF$  que l'on demandoit.



**2. cas.** Si le rayon incident tend à un point de l'axe plus éloigné que le foyer, on trouvera de cette manière le point opposé à sa divergence.

### Règle.

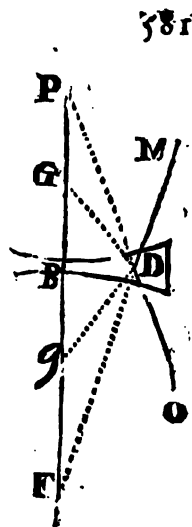
Comme la distance entre le point de première convergence & le foyer, est au foyer; ainsi le foyer est à un quatrième terme, auquel le foyer étant ajouté on aura la distance entre le verre & le point de divergence opposée.

### Démonstration.

Soit MD rayon incident & tendant en F, lequel par réfraction soit détourné en O & devenu divergent, &

# DE DIOPTRIQUE.

que OD prolongé tombe en P. L'angle ODF est égal à  $DFg + DPG$ , mais ODF est égal à DGB par la quatorzième proposition, donc DGB est égal à  $DFg + DPG$ ; mais DGB est égal à  $GDP + DPG$  & ainsi  $DFg$  est égal à GDP; mais d'ailleurs les angles  $DgF$ , PGD sont égaux; donc les triangles  $DgF$ , PGD sont semblables & partant  $Fg \parallel gD \parallel DG \parallel GP$ , auquel ajoutant GB on aura PB que l'on demandoit.



## SEIZIÈME PROPOSITION.

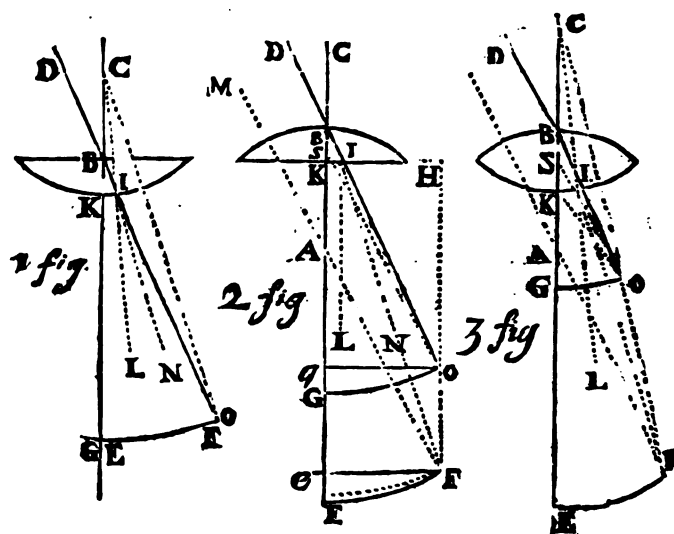
*Les rayons paralleles entr'eux, mais obliques à l'axe ont aussi leurs foyers obliques en même distance du verre que le foyer principal, pourvu toutefois que l'obliquité soit petite.*

**S**OIT en premier lieu un verre plan-convexe duquel la surface plate soit antérieure, & soit un rayon oblique incident DB, qui entrant dans le verre diminuera son inclinaison du tiers de l'incidence DBC suivant la ligne BIN, & ainsi feront tous les autres rayons qui lui seront paralleles; si donc on tire par le centre C un axe oblique CO qui leur soit parallele dans le verre, c'est-à-dire, à BI & qu'on prenne le point O à distance du diamètre hors le verre, il est clair que ce sera leur foyer en même distance que le foyer principal G, & tous les autres foyers obliques seront dans la courbure d'une concavité GO décrite sur le centre C.

Soit en second lieu le verre plan-convexe, duquel la

12. Cas.

convexité reçoive le rayon DB incliné à l'axe, si par le centre A on tire MA parallèle à DB, considérant MA comme axe : il est clair que s'il n'arrivoit point d'autre réfraction le rayon DB & tout autre qui lui est parallèle concourroient avec MA prolongé en F suivant la ligne BIN, que je suppose sesqui-diamètre : mais à cause de la seconde réfraction faite en I par la surface plate, le concours F sera approché en O du tiers de la perpendiculaire FH, qui n'est plus courte que EK, sinon du sinus versé de



FAE que nous avons supposé petit ; donc KG n'est pas plus grande que HO, sinon des deux tiers du sinus versé de l'angle d'inclinaison du rayon oblique, ce qui ne peut pas être sensible : ou si vous voulez tous les points E, F & tous autres semblables déterminez par la première réfraction étant dans un arc décrit sur le centre A, aussi les foyers G, O & tous autres sont dans une surface qui est en effet courbe, mais moins que EF, comme si toutes les

perpendiculaires à la base d'un segment avoient toutes été retranchées d'un tiers.

Soit en troisième lieu un verre convexe des deux côtes BK, duquel soient les centres A, C, le foyer principal G, & DB rayon oblique, auquel par le centre A soit tiré MA parallèle. Alors s'il n'arrivoit point d'autre réfraction, le rayon DB & tout autre qui lui est parallèle concourroit avec l'axe oblique MA prolongé en F, à la distance du sesqui-diamètre : mais à cause de la seconde réfraction ce concours F est approché, & pour le trouver il faut tirer au centre C la ligne CF, qui sera comme un nouvel axe perpendiculaire à la seconde surface, & dans laquelle sera pris le point O en même distance que G, lequel point sera le foyer oblique de tous les rayons.

On suppose que l'obliquité soit petite, autrement la réfraction devenant trop grande le concours s'approcheroit, & MA qui à l'égard de la première réfraction tient lieu d'axe se trouvant trop éloignée des rayons obliques, le même arriveroit que si aux rayons droits on donnoit une trop grande ouverture.

#### *Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que les foyers qui sont peu éloignés du principal, sont tous avec lui sensiblement dans un même plan perpendiculaire à l'axe : car si d'une courbure on prend une très-petite partie, elle est sensiblement plate.

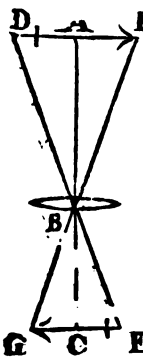
#### *Second Corollaire.*

De ce qui a été dit, on peut facilement expliquer comment par le moyen d'un verre convexe se peut faire la peinture des objets dans un lieu où il n'entre point d'autre lumière que par le verre : & pourquoi le point brûlant

des verres convexes est le lieu où se fait la peinture distincte du soleil, qui est plus ou moins grande à mesure que le verre est moins ou plus convexe.

*Troisième Corollaire.*

Si l'épaisseur du verre étoit insensible, l'angle d'incidence sur le verre seroit toujours égal à l'angle d'émer-  
 sion. J'appelle ici angle d'incidence celui  
 qui est compris des deux lignes qui viennent  
 des extrémités de l'objet au milieu du verre,  
 & angle d'émer- sion celui qui est compris des  
 deux lignes qui sont tirées du milieu du verre  
 aux extrémités de la peinture. Soit l'axe  
 AC, l'objet DAF, le verre B, & la peinture  
 GCE : le rayon oblique DB entrant dans le  
 verre se plie vers BC, mais il est incontinent  
 redressé en sortant, si bien que les angles  
 oppo- sez demeurent égaux : donc comme la grandeur de  
 l'objet est à la distance entre l'objet & le verre, ainsi la  
 grandeur de la peinture est à sa distance jusqu'au verre.



*Quatrième Corollaire.*

Il s'en suit que les peintures ou foyers ont égale lumie-  
 re quand les ouvertures des verres sont comme les foyers,  
 si ce n'est que la confusion qui se trouvera plus grande aux  
 petits en élargira un peu le foyer ; mais cela négligé les  
 lumieres se trouvent renfermées dans des espaces qui leur  
 sont proportionnels & également multipliez.



## DIX-SEPTIÈME PROPOSITION.

*L'épaisseur d'un verre convexe ou plan convexe dont la convexité est vers l'objet, rend toujours l'angle d'émerfion plus grand que celui d'incidence. Il n'arrive rien au plan convexe pour l'épaisseur quand le plat est vers l'objet.*

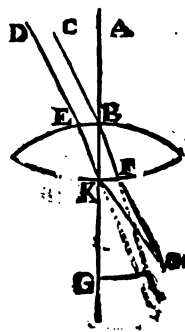
**S**OIT l'épaisseur du verre BK, le demi-angle d'incidence ABC, le foyer principal G, l'oblique O, & l'angle d'émerfion GKO.

*Préparation.*

Le rayon rompu KO vient nécessairement de quelque un des parallèles à CB, posons que ce soit DE, qui par la réfraction tombe en K, de même que CB est détourné en F pour enfin concourir en O.

*Démonstration.*

CB, DE sont parallèles, donc BF, EK sont convergens vers F, K, & l'angle EKB est plus grand que FBK; considérant donc FB comme rayon incident en B, l'incidence FBK étant moindre que BKE, le rayon BC sera moins éloigné de la perpendiculaire que KO, donc GKO est plus grand que ABC; donc comme AC est à AB, ainsi GO est à quelque chose de plus que GK, ce que nous déterminerons dans la suite.



## DIX-HUITIÈME PROPOSITION.

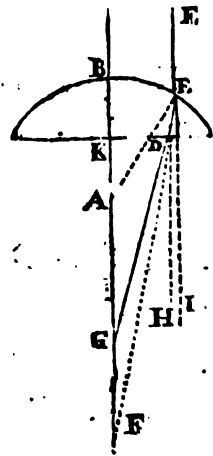
*Probleme Etant connu le diamètre & l'épaisseur d'un verre plan-convexe, trouver la distance du foyer hors le verre,*

DANS la premiere proposition aussi bien que dans les règles suivantes on a negligé l'effet de l'épaisseur qui peut néanmoins être sensible, principalement aux petits verres.

Or il est évident, que si la surface plate est faite antérieure, c'est-à-dire, tournée vers l'objet, l'épaisseur n'apporte aucun changement, & que le foyer est justement à la distance d'un diamètre hors le verre : mais soit la convexité faite antérieure.

*Règle.*

Otez du diamètre de la convexité les  $\frac{2}{3}$  de l'épaisseur, & il restera la distance du foyer hors le verre du côté de la surface plate.



A est le centre de la convexité, BK est l'épaisseur du verre, EE est un rayon parallèle à l'axe & prolongé en I, IED est la premiere réfraction, enforte que ED prolongé en F fait  $F\frac{1}{2}$  de BAE premiere incidence, DH est perpendiculaire à la seconde surface au point de la seconde incidence D : HDF est la seconde incidence, & partant FDG est la seconde réfraction égal à  $\frac{1}{2}$  HDF ou à un demi angle F.

*Démonstration.*

FDG | F | 1 | 2 : donc FG | GD, ou bien FG | GK | 1 | 2 ; & en composant FG + GK | GK | 3 | 2 ; c'est-à-dire 3 demi-diamètres — BK sont à KG foyer requis, comme 3 à 2. Donc ôtant  $\frac{1}{2}$  du premier & troisième terme deux demi-diamètres —  $\frac{1}{2}$  BK | KG | 2 | 2. Et à compter depuis B, le foyer G surpassera le diamètre de  $\frac{1}{2}$  de BK.

## DIX-NEUVIÈME PROPOSITION.

*Les diamètres des convexitez & l'épaisseur du verre étant donnez, trouver la distance du foyer hors le verre convexe des deux côtes.*

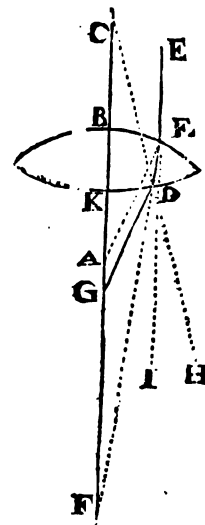
*Règle.*

**C**OMME la somme des deux sesqui-diamètre, moins l'épaisseur du verre, est au sesqui-diamètre de la première convexité aussi moins l'épaisseur ; ainsi le diamètre de la seconde convexité est à la distance du foyer hors le verre.

Soit A le centre de la première convexité, C centre de la seconde, BK l'épaisseur du verre, EE rayon incident parallèle à l'axe & prolongé en I, IEF ou F première réfraction, FDG seconde réfraction.

*Démonstration.*

$F = \frac{1}{2} BAE$ , mais  $HDF = F + C$ ,  
donc FDG étant  $\frac{1}{2} HDF$ , sera  $= \frac{1}{2} BAE + \frac{1}{2} C$  ; ainsi  
Eeee ij



$F + FDG = \frac{1}{2} BAE + \frac{1}{2} C$ . Mais  $F + FDG = DGC$ , donc  $DGC = \frac{1}{2} BAE + \frac{1}{2} C$ ; donc  $2 DGC = BAE + C$ . Mais  $BAE = \frac{2}{3} F$ , donc  $2 DGC = \frac{2}{3} F + C$ : & comme  $\frac{2}{3} F + C \parallel \frac{2}{3} G + C$ , c'est-à-dire, comme  $\frac{2}{3} CD + DF \parallel \frac{2}{3} CD + DG$ ; ou comme trois demi-diamètres de la seconde convexité + trois demi-diamètres de la première — BK est à DF, qui est égal à BF — BK; ainsi  $2 CD$  est à KG.

*Premier Corollaire.*

L'on verra par le calcul que les verres de convexité inégale ont le foyer plus loin du côté de la surface plus convexe; enforte que lorsque l'inégalité est très-grande & approche du plan-convexe, alors la différence approche des  $\frac{2}{3}$  de l'épaisseur: mais tant que le plus grand diamètre n'excede pas le moindre de plus  $\frac{1}{11}$ , la différence des foyers est insensible. Or ce qui fait la différence des foyers du verre inégalement convexe, est que l'accourcissement du foyer vient principalement de l'épaisseur comparée avec la première convexité.

*Second Corollaire.*

Il s'ensuit aussi du calcul, que pour les verres d'égale ou presque égale convexité, si l'épaisseur BK est moindre que la moitié du foyer calculé sans l'épaisseur, alors KG distance du foyer hors le verre, se trouve d'environ  $\frac{1}{6}$  de l'épaisseur plus courte que ce que le calcul produiroit par la règle de la troisième proposition où l'épaisseur est négligée: pour donc abréger on peut se servir de la règle donnée à la deuxième proposition, & ôter du produit  $\frac{1}{6}$  de l'épaisseur.

Il s'ensuit aussi qu'une sphère de verre porte son foyer hors de soi à la distance du quart du diamètre ; ce qui se peut aussi démontrer en particulier, car  $BF \parallel FK \parallel BE \parallel KD$  ; si donc  $BE$  est 3,  $KD$  & partant l'angle  $KCD$  sera 1 : mais aussi  $F$  est 1 ; donc  $HDF$  est 2, & partant  $GDF$  est aussi 1 ; donc  $DG$ ,  $GF$ , ou  $KG$ ,  $GF$  sont parties égales de  $KF$  demi-diamètre de la sphère.

*Les diamètres des convexitez & l'épaisseur du verre étant  
donnez, trouver la juste longueur du foyer proportionnée  
aux effets du verre.*

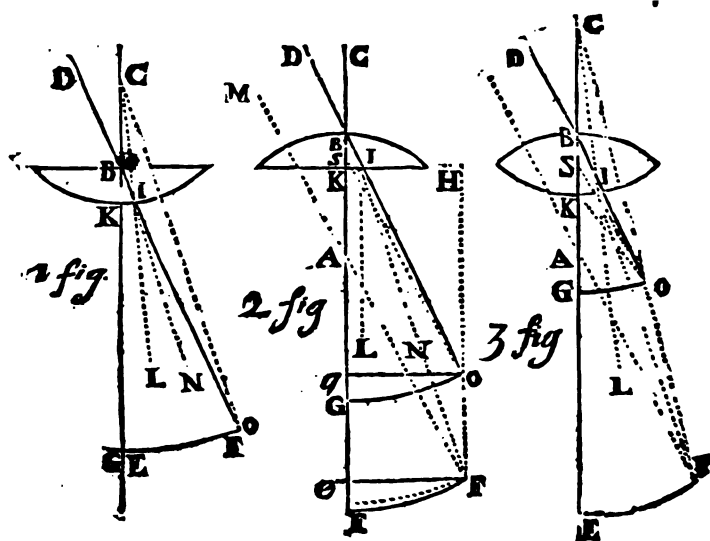
**I**L est clair parce qu'il a été démontré, qu'il n'arrive rien aux plano-convexes à cause de l'épaisseur, quand le plat est tourné vers l'objet, car les rayons demeurant parallèles dans le verre, l'angle d'émersion est égal à celui d'incidence & le foyer à la distance du diamètre.

*Règle pour les plano-convexes, quand la convexité est tournée vers l'objet, ou est antérieure:*

Ajoutez au foyer hors le verre les  $\frac{2}{3}$  de l'épaisseur ou prenez le diamètre de la convexité, & vous aurez la longueur du foyer d'un verre, qui sans épaisseur sensible fera le même effet que le donné avec son épaisseur.

*Démonstration.*

Dans la deuxième figure soit tirée OS parallèle à FA ou DB.  $EK = 3$  semi-diamètres —  $BK$ ; donc son tiers  $EG = 1$  semi-diamètre —  $\frac{1}{3} BK$ ; mais  $EA = 2$  semi-diamètres: donc  $GA = 1$  semi-diamètre —  $\frac{1}{3} BK$ . Mais



$AS = FO$ , ou  $GE$ , ou 1 semi-diamètre —  $\frac{1}{3} BK$ ; donc  $GS = 1$  diamètre. Et d'ailleurs l'angle  $GSO$  pris pour émergence est égal à l'incidence de  $DB$ ; donc le verre dans cette situation, nonobstant cette épaisseur, fait la peinture  $GO$  de même grandeur qu'un verre sans épaisseur qui auroit même convexité; c'est-à-dire, que quoique le foyer hors le verre soit raccourci, la peinture demeure néanmoins de grandeur juste.

*Règle pour les convexes des deux côtés.*

Comme le sesqui-diamètre de la convexité antérieure, plus le demi-diamètre de la seconde, moins l'épaisseur du verre.

Au même demi-diamètre de la seconde convexité, plus la distance du foyer hors le verre.

Ainsi la somme des demi-diamètres des convexitez, moins l'épaisseur.

A un quatrième terme, lequel ôté du second terme, donnera la juste longueur du foyer requise.

*Démonstration.*

Dans la troisième figure soit marquée l'épaisseur BK, tirée OS parallèle à FA ou DB, & joints OK pour faire l'angle d'émersion GKO. Prenant OSG pour émerision qui est égal à CBD, si on faisoit un verre également convexe sur GS, qui n'eût aucune épaisseur sensible, il auroit sa peinture égale à GO, & feroit partant même effet à cet égard que le proposé avec son épaisseur BK. Or à cause de la parallèle OS à la base FA dans le triangle FCA, comme  $FC | OC$ , ou comme  $EC | GC || AC | SC$ , appliquant les termes de cette proportion à ceux de la règle, on trouvera qu'ils expriment la même chose. J'appellerai donc GS le foyer correct.

*Voyez la  
Figure précédente.*

*Premier Corollaire.*

On verra par ce calcul que ce quatrième terme qui donne le foyer d'équivalence juste, est toujours plus grand que celui qui viendrait par la règle-générale où l'on néglige l'épaisseur; & qu'ainsi l'épaisseur fait faire

aux verres l'effet d'un plus long qui seroit sans épaisseur sensible, & cet excès aux verres d'égales convexité est toujours d'autant pardessus le demi - diamètre, que le foyer hors le verre étoit diminué à cause de l'épaisseur: ainsi aux verres ordinaires où le foyer KG est moindre d'un sixième de l'épaisseur, le juste foyer excède le demi-diamètre d'un sixième de l'épaisseur.

*Deuxième Corollaire.*

Et aux sphères de verre où le foyer hors le verre est moindre que le demi-diamètre d'un quart de l'épaisseur qui est le diamètre, aussi le juste foyer ou équivalence surpasse le demi-diamètre du même quart; c'est-à-dire, que la boule fait le même effet qu'un verre sans épaisseur sensible, lequel auroit son foyer à distance des trois quarts du diamètre de la boule.

*Troisième Corollaire.*

*Probleme. La largeur de la peinture & sa distance du verre étant données, trouver l'angle d'incidence.*

Il faut premièrement dans les précédentes figures trouver le foyer correct GS, & dans le triangle rectangle GOS sçachant les côtez GO, GS, on aura l'angle GSO égal à l'incidence; & ceci est utile pour trouver la grandeur du soleil par sa peinture, c'est-à-dire, trouver sous quel angle il fait son incidence sur le verre, & ainsi des autres objets. Et c'est dans ces sortes d'operations où la correction du foyer est nécessaire pour être juste à la mesure des angles visuels; mais dans les propositions suivantes elle n'est pas si nécessaire, ainsi on la négligera.

## VINGT-UNIÈME PROPOSITION.

*Etant joints deux verres convexes ou plano-convexes, ou menisques appartenans aux convexes dont les foyers particuliers soient connus, trouver le foyer commun qui résulte de la jonction des deux verres.*

*Règle.*

**C**OMME la somme des foyers est à un des foyers, ainsi l'autre foyer est au requis.

*Démonstration.*

Tout verre qui ramasse les rayons parallèles en un point, de quelque figure qu'il soit se réduit à un plan-convexe équivalent si on fait le diamètre du plan-convexe égal au foyer du verre donné. Or de deux plan-convexes ensemble on peut faire un convexe des deux côtes, duquel il est vrai de dire que comme la somme des diamètres à un des diamètres, ainsi l'autre diamètre est au foyer; les foyers étant donc changez en diamètres, il est vrai de dire que comme la somme des foyers, &c.

*Corollaire.*

La même règle est pour les concaves, & il n'y a point de différence pour la démonstration, car ils ont leurs foyers à leur manière.



## VINGT-DEUXIÈME PROPOSITION.

*Deux verres de différente espece, c'est-à-dire, dont l'un appartienne aux convexes & l'autre aux concaves, étant joints, trouver ce qui résulte de cette jonction.*

## Règle.

**C**OMME la difference des foyers est à un des foyers, ainsi l'autre foyer est à un quatrième, lequel sera véritable foyer si le verre appartenant aux convexes a prévalu, c'est-à-dire, a été plus convexe que l'autre n'a été concave, ou bien si son foyer a été plus petit que celui de l'autre. Mais si au contraire le convexe étoit plus foible, le quatrième terme trouvé donnera la distance du foyer de divergence.

## Corollaire.

Il s'ensuit que si un verre est autant convexe que l'autre est concave, ils se détruiront entièrement, & feront l'effet d'un verre plat. D'où il suit comment on peut trouver le foyer d'un concave en lui appliquant divers convexes; & cela se peut aussi par réflexion.

## VINGT-TROISIÈME PROPOSITION.

*Probleme. Deux verres convexes ou appartenans aux convexes connus étant donnez & mis à distance connue, qui ne soit pas si grande que le foyer du verre qu'on supposera antérieur ou premier, trouver le foyer commun.*

**C**ETTE proposition se peut résoudre par la dixième. Car il s'agit ici de rayons qui tombent convergens sur le second verre dont le foyer est connu, aussi bien

que la distance du point de la première convergence, qui n'est autre que le foyer du premier verre.

*Première Règle.*

Comme la distance entre le second verre & le foyer du premier plus le foyer du second, est au foyer du second; ainsi le même foyer du second est à un quatrième terme, qui étant ôté de ce même foyer donnera la distance entre le foyer commun & le second verre.

Cela est clair par la susdite proposition en faisant application des termes. Mais il ne sera pas inutile de donner la règle suivante, qui a quelque chose de plus abrégé.

*Deuxième Règle.*

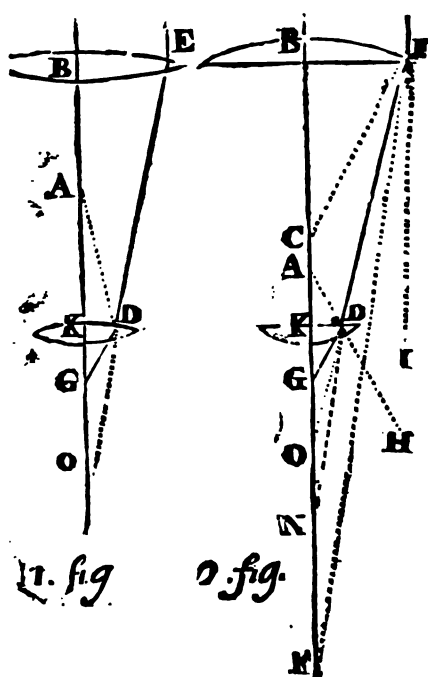
Comme la somme des foyers moins la distance des verres, est au foyer du verre antérieur ou objectif moins aussi la même distance; ainsi le foyer du second verre est à la distance qui est entre le second verre & le foyer requis.

*Démonstration.*

Soient donnez les verres convexes ou appartenans aux convexes, B, K, à distance BK moindre que BO longueur du foyer du verre antérieur B, & que le foyer de K soit aussi connu plus petit ou plus grand que BO foyer du premier verre. Je dis que comme le foyer de K  $\div$  KO, ou comme le foyer de K  $\div$  le foyer de B — la distance BK est à KO, ainsi le foyer de K est à KG foyer requis.

Soient les verres B, K réduits à deux plano-convexes équivalens & placez comme en la deuxième figure à la distance donnée BK, alors le demi-diamètre CE sera moitié de BO foyer du convexe antérieur, & AD aussi

demi-diamètre du plano-convexe K, sera moitié du foyer



du second verre K premierement donné. Puis donc qu'en la seconde figure il se fait en E deux réfractions, la premiere  $IEF = \frac{1}{2}C$ , & la seconde  $FED = \frac{1}{2}IEF$ , & partant  $= \frac{1}{2}C$ . Il s'en suit que ED prolongée tomberoit en O foyer de B; mais à cause que ED avant de passer le second verre, souffre deux réfractions en D, l'une par la surface plate de K, sçavoir ODN, qui rétablit DN au parallelisme de EF; il est clair qu'à cause de la troisième réfra-

ction, le rayon ED, au lieu d'aller droit en O foyer de B, est détourné en N, en sorte que l'angle  $N = \frac{1}{2}C$ , aussi bien que F. Et enfin ayant prolongée la perpendiculaire AD en H, la dernière réfraction  $NDG = \frac{1}{2}HDN$ ; mais

*Les angles  
marquez par  
une seule let-  
tre sont ai-  
gus.*

$$\begin{aligned}
 HDN &= A + N, \text{ donc} \\
 NDG &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}N; \text{ mais} \\
 G &= NDG + N, \text{ donc} \\
 G &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}N + N, \text{ ou bien} \\
 G &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C : \text{ mais à cause des réfractions} \\
 IEO, \\
 O &= \frac{1}{2}C : \text{ donc} \\
 G &= O + \frac{1}{2}A, \text{ ou } 2G = 2O + A, \text{ ainsi} \\
 \text{comme } 2O + A &| A || 2G | A, \text{ ou}
 \end{aligned}$$

comme  $2 AD + DO | DO || 2 AD | DG$ . Or par la construction  $2 AD = AD$  foyer du second verre donné : donc dans la première figure

$AD + DO | DO || AD | DG$ , c'est-à-dire

$AK + KO | KO || AK | KG$ , comme il est exprimé par la règle.

*Premier Corollaire.*

On verra par le calcul que le foyer commun sera toujours plus long du côté du verre plus convexe ; c'est-à-dire qu'ayant proposé deux verres inégaux, si on prend le moins convexe pour premier & l'autre pour second, le foyer sera plus long que si on prenoit le plus convexe pour premier & qu'on gardât toujours la même distance des verres entr'eux.

Notez qu'il n'importe où tombent les centres A, C, & qu'il se peut faire qu'ils soient transposés, & même que A soit au-dessus de B, & C au-dessous de K : car la démonstration est toujours la même.

Notez aussi que la distance BK ordinairement comprend  $\frac{1}{3}$  de l'épaisseur du verre antérieur &  $\frac{2}{3}$  de celle du second, outre l'intervale entre les verres.

VINGT-QUATRIÈME PROPOSITION.

*Un verre concave étant mis entre un verre convexe & son foyer à distance connue, en sorte qu'il reçoive les rayons parallèles, déterminer ce qui en arrivera.*

**J**E suppose que le convexe soit antérieur, ce qui étant ainsi le problème se réduit aux règles de la quinzième proposition, où un verre concave reçoit des rayons convergens.

Si le foyer du convexe diminué de la distance des ver-

*I. cas*

F f f f iij

res est égal au foyer du concave, c'est-à-dire, si le verre concave se trouve éloigné du foyer du convexe, d'autant justement que son propre foyer est long, ce qui est lorsque les foyers concourent, alors les rayons convergens & tendans au foyer du verre convexe, tendront aussi au foyer du concave, lequel par conséquent les rendra parallèles par l'inverse de la cinquième proposition.

*II. Cas.* Si le foyer du convexe diminué de la distance des verres est moindre que le foyer du concave, alors parce que les rayons faits convergens par le convexe tendront à un point plus proche du concave que son propre foyer, le cas tombe dans la première règle de la quinzième proposition sur laquelle est établie la suivante proportion, n'y ayant de différence que d'expression.

### *Règle.*

Comme la distance des foyers est au foyer du concave, ainsi le foyer du concave est à un quatrième terme, duquel le foyer du concave étant ôté, on aura la distance entre le verre concave & le nouveau foyer requis.

*III. Cas.* Si le foyer du convexe diminué de la distance des verres est plus grand que le foyer du concave, ce qui arrive quand la distance entre le verre concave & le foyer du convexe est plus grande que le foyer du concave, & que les rayons qui tombent convergens sur le concave, tendent à un point au-delà du foyer du concave, le cas tombe au second de la quinzième proposition.

### *Règle.*

Comme la distance des foyers est au foyer du concave, ainsi le foyer du concave est à un quatrième terme, auquel le foyer du concave étant ajouté, vous aurez la di-

stance entre le verre concave & le point où les rayons devenus moins divergens iroient concourir avec l'axe du verre convexe.

La démonstration de l'une & de l'autre règle est toute facile par l'application à celles de la quinzième proposition.

J'ai toujours parlé du foyer du concave, & non pas du centre; pour comprendre en un mot toutes sortes de verres appartenans aux concaves, & il en est de même des convexes.

#### VINGT-CINQUIÈME PROPOSITION.

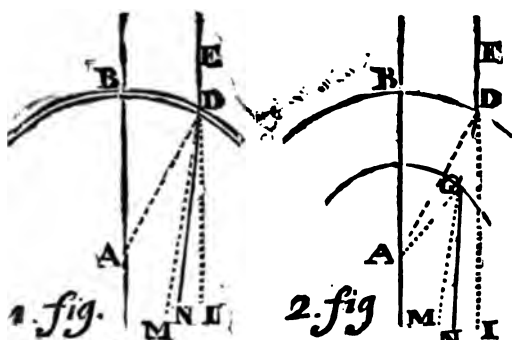
*La réfraction qui se fait de l'air à l'eau au travers d'un verre mince quoique courbe, est tout de même que si elle se faisoit immédiatement de l'air à l'eau.*

**I**L s'agit ici de l'effet d'un verre convexe & concave sur un même centre, mais avec fort peu d'épaisseur, enforte que les deux surfaces ne sont presque qu'une, qui se considère d'un côté comme convexe & de l'autre comme concave, & où il n'y a qu'une même perpendiculaire pour l'incidence & pour l'émergence.

On suppose que l'on sçait par l'expérience que la mesure de la réfraction de l'air à l'eau est comme 4 à 3, ou comme 3 à  $2\frac{1}{4}$ , mais celle de l'air au verre est comme 3 à 2; donc celle de l'eau au verre est comme  $2\frac{1}{4}$  à 2 ou comme 9 à 8.

Soit donc dans la première figure BD une bouteille de verre pleine d'eau; A le centre de BD, ED rayon oblique incident prolongé en I; IDM première réfraction & MDN seconde réfraction. Passant de l'air au verre, la réfraction  $IDM = \frac{1}{3}IDA$ ; donc  $MDA = \frac{2}{3}IDA$ ; mais du verre à l'eau  $MDN = \frac{1}{4}MDA$  ou  $\frac{1}{4}IDM$ ;

donc si l'on ôte MDN de IDM, c'est-à-dire, si du tiers



IDA on ôte la moitié du même angle IDA, il restera  $\frac{1}{4}$  pour IDM, comme si la réfraction avoit été faite immédiatement de l'air à l'eau.

Mais de peur qu'il ne reste quel-

que scrupule au sujet de l'épaisseur du verre, posons dans la deuxième figure que la sortie du verre se fasse en G un peu distant de D & soit tirée la seconde perpendiculaire AG; alors la seconde incidence sera MGA plus grande que n'auroit été MDA de la quantité de l'angle DAG, lequel dépend de l'épaisseur GD: donc la seconde réfraction MGN étant  $\frac{1}{2}$  de MGA sera  $= \frac{1}{2} \text{MDA} + \frac{1}{2} \text{GAD}$ , ou  $\frac{1}{4} \text{IDM} + \frac{1}{2} \text{GAD}$ : vous voyez donc que l'excès n'est que de  $\frac{1}{2}$  de DAG, par lequel la convergence de GN sera un peu moindre que DN dans la première figure, mais insensiblement à moins que l'épaisseur ne soit fort grande.

### Corollaire.

En appliquant les précédentes démonstrations à ce qui se fait dans l'air des deux côtes, on verra qu'au premier cas les rayons demeureront paralleles comme si le verre avoit les deux côtes plats & paralleles: mais qu'au second cas où l'épaisseur est sensible, la seconde réfraction étant  $\frac{1}{2} \text{MGA}$ , MDN seroit  $= \frac{1}{2} \text{MDA} + \frac{1}{2} \text{GAD}$ , c'est-à-dire  $\text{IDM} + \frac{1}{2} \text{GAD}$ , & ainsi GN deviendrait divergent, ce qui n'arrive pas dans l'eau à cause du peu de réfraction du verre à l'eau.

YINGT-SIXIÈME

## VINGT-SIXIÈME PROPOSITION.

*Probleme. Les convexitez de l'eau étant connues trouver le foyer.*

*Règle.*

**C**OMME la somme des diamètres est à un diamètre, ainsi l'autre susqui-diamètre est au foyer.

*Démonstration.*

Soit B de l'eau en forme de verre convexe des deux côtes, duquel on neglige l'épaisseur; & le reste comme à la troisième proposition.

$$IDF = \frac{1}{4} C$$

$$FDG = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3}$$

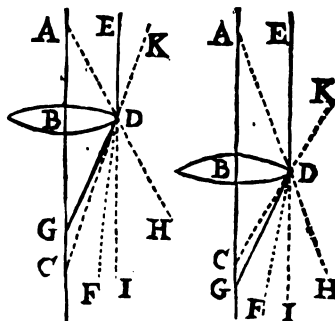
$$IDF, \text{ ou } \frac{1}{3} A + \frac{1}{12} C.$$

$$\text{Donc } IDG \text{ ou } DGA = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} C.$$

$$\text{Donc } 3DGA = A + C.$$

Donc en appliquant la démonstration de la troisième proposition.

Comme la somme des diamètres est à un diamètre, ainsi le triple de l'autre demi-diamètre est à DG, &c. Il n'importe que l'eau soit enfermée dans du verre par la précédente proposition, mais on neglige ici l'épaisseur de l'eau.



*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que si les convexitez sont égales, le foyer sera au  $\frac{1}{4}$  du diamètre.

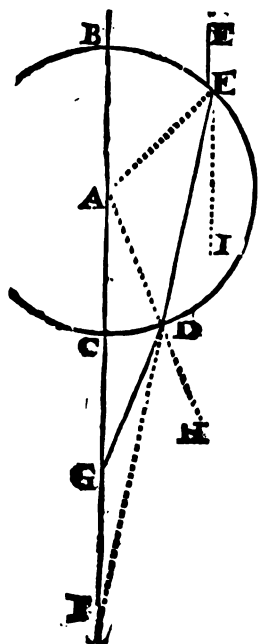
*Rec. de l'Acad. Tom. VI.*

G g g g

## Second Corollaire.

De la démonstration de cette proposition aussi bien que de la troisième, il est facile de voir que pour toutes sortes de convexes plus denses à l'égard d'un plus rare; la règle suivante est générale.

Comme la somme des diamètres est à un diamètre, ou comme la somme des demi-diamètres à un demi-diamètre, ainsi l'autre demi-diamètre multiplié par le dénominateur de la réfraction du dense au rare, est au foyer. Car les deux premiers termes demeurant toujours les mêmes, on prend le double de l'autre demi-diamètre pour les verres convexes dans l'air; à cause que la réfraction du verre à l'air est  $\frac{1}{2}$ , & pour l'eau dans l'air on prend le triple à cause que la réfraction de l'eau à l'air est  $\frac{1}{3}$  & ainsi de reste.



## VINGT-SEPTIÈME PROPOSITION.

*Le foyer d'une boule d'eau est à distance du demi-diamètre.*

**S**OIT une boule d'eau BD dont le centre A, le rayon incident EE. Première réfraction IED. F point de l'axe où ED produit le rencontreroit. FDG dernière réfraction, & G le foyer.

IEF ou  $F = \frac{1}{4} BAE$ , donc  $BF =$  aux deux diamètres & BE est double de CD. Donc  $E = \frac{1}{2} DAC$ , mais  $HDF = DAC + F$  &  $FDG = \frac{1}{3} HDF$ , donc  $FDG = \frac{1}{3} F + \frac{1}{3} DAC$ , ou  $EDG = \frac{1}{3} DAC + \frac{1}{3} DAC$ ,

ou  $\frac{1}{2}$  DAC. Donc  $F = FDG$  : & ainsi DG ou GC = GF. Comme donc CF est diamètre, CG sera demi-diamètre.

*Corollaire.*

Il n'a point été parlé des plans convexes, mais il est facile à démontrer que leurs foyers seront à trois demi-diamètres, à cause que la réfraction de l'eau à l'air est  $\frac{1}{3}$ , &c. d'où il suit que les rayons divergens du sesqui-diamètre sont parallèles dans la boule.

VINGT-HUITIÈME PROPOSITION.

*Tout verre plano-convexe ou convexe étant entièrement dans l'eau, a son foyer quadruple de celui qu'il auroit dans l'air.*

SOIT premièrement un plano-convexe. Alors de même que la réfraction du verre à l'air qui est  $\frac{1}{2}$  a produit deux demi-diamètres de distance pour le foyer dans l'air ; ainsi la réfraction du verre à l'eau qui est  $\frac{1}{3}$  produira huit demi-diamètres pour le foyer dans l'eau, & la démonstration est toute facile.

Soit secondement un verre convexe dans l'eau, alors par le corollaire de la penultième proposition, comme la somme des demi-diamètres à un demi-diamètre, ainsi l'octuple de l'autre est au foyer : or la proportion du double à l'octuple est au quadruple, donc &c.





leur enfermée dans une boule de verre de très-petite épaisseur ; car ayant doublé le foyer CG on trouve CF, lequel ayant ajouté BC, la somme BF divisée par AD donnera la proportion de la réfraction de l'air à ladite lentille.

## TRENTIÈME PROPOSITION.

*Un verre plano-convexe a la convexité dans l'eau & le côté plat dans l'air, le foyer sera à trois diamètres de la convexité.*

E suppose que la surface de l'eau soit plate & parallèle à celle du verre.

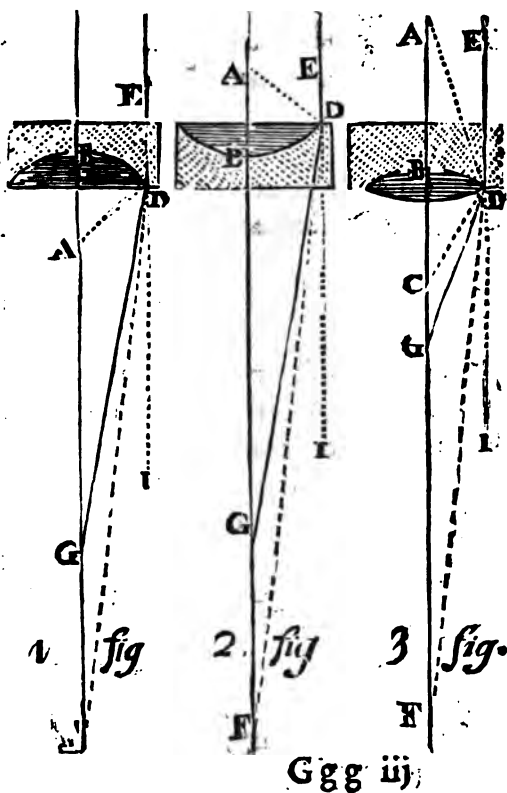
I. Cas.

Que les parallèles viennent du côté de l'eau comme en la première figure, &c.

$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAD$ , mais  $CG = \frac{1}{2} F$  ou  $\frac{1}{18} AD$ , donc  $DGA = \frac{1}{2} \angle BAD$ , donc  $|| DG || I ||$  ou  $= 6 AD$ .

Que les parallèles viennent sur le verre.  $\angle DAB = \frac{1}{8} \angle DAB$  de même  $FDG = \frac{1}{3} F$  ou  $\frac{1}{14} AD$ . B, donc G comme dessus est  $= \frac{1}{8} AD$ , &c.

E suppose toujours que l'épaisseur du verre soit négligée.



*Corollaire.*

De-là il s'ensuit un moyen très-facile de prolonger le foyer d'un plano-convexe donné en y appliquant quelque liqueur enfermée entre le plano-convexe & un autre verre tout plat, qu'on aura examiné avant que d'infuser la liqueur pour voir s'il ne varie point le foyer du plano-convexe donné & suivant que cette liqueur aura plus de réfraction que l'eau (comme l'eau forte, l'esprit de therebentine, &c.) aussi le prolongement sera-t-il plus grand.

## TRENTE-UNIÈME PROPOSITION.

*Un verre convexe des deux côtes étant d'un côté dans l'air & de l'autre dans l'eau trouver le foyer dans l'eau.*

**S**OIT le verre B dont les centres AC, comme en la troisième figure, & que l'air soit dessus & l'eau dessous, &c. on demande BG foyer dans l'eau.

*Règle.*

Comme la somme des demi-diamètres AB, BC, plus le double de AD duquel la convexité est dans l'eau, est à BC semi-diamètre de la convexité antérieure qui est dans l'air, ainsi l'octuple de AD est à BG.

$F = \frac{1}{3} C$  de même  $FDG = \frac{1}{14} C + \frac{1}{8} A$ . Donc  $G = \frac{1}{8} C + \frac{1}{8} A$ , donc  $8G = 3C + A$ , & comme  $3C + A | A || 8G | A$ , ou comme  $3AD - CD | CD || 8AD | DG$ .

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que le verre de convexité égale auroit ici le

foyer dans l'eau à un diamètre de la convexité. Mais si on demande le foyer dans l'air, il sera suivant cette proportion, Comme la somme des demi-diamètres augmentée du double de celui dont la convexité est dans l'eau, est au même, ainsi le sextuple de l'autre est au foyer dans l'air. Car alors  $F = \frac{1}{2} C$ , de même  $FDG = \frac{1}{12} C + \frac{1}{2} A$ , donc  $G = \frac{1}{6} C + \frac{1}{2} A$ , donc  $6G = C + 3A$ , donc  $AD + 3DC || 6AD || DG$ .

*Deuxième Corollaire.*

De cette manière le foyer d'un verre également convexe seroit dans l'air à  $\frac{1}{4}$  du diamètre.

TRENTE-DEUXIÈME PROPOSITION.

*Trouver la réfraction d'une liqueur Diaphane à l'égard de l'air.*

*Premier Moyen.*

**A**YEZ un petit verre également convexe des deux côtes dont vous sçachiez parfaitement le foyer dans l'air, puis prenez la longueur exacte de son foyer dans la liqueur donnée: doublez le foyer trouvé dans la liqueur, & divisez le produit par le foyer dans l'air, le quotient donnera la réfraction du verre à ladite liqueur. Par exemple, ayant doublé le foyer d'un verre dans l'eau, je trouve que ce produit contient huit fois le foyer du verre dans l'air, d'où je conclus que la réfraction du verre à l'eau est  $\frac{1}{8}$  de l'incidence & la mesure est comme 8 à 9; ce qui est fondé sur la règle générale, que comme un demi-diamètre est à la somme des demi-diamètres, ainsi le foyer est à l'autre demi-diamètre multiplié par le

dénominateur de la réfraction du dense au rare , & pour faciliter j'ai supposé les demi-diamètres égaux.

### *Deuxième Moyen.*

Le moyen précédent est fort simple , mais à moins d'avoir une liqueur en grande quantité on ne se peut servir que de petits verres , autrement le foyer iroit trop loin & ne seroit pas terminé dans la liqueur.

*Voyez la  
Figure précé-  
dente.*

Soit dans un plano-convexe disposé comme à la première figure de la trentième proposition & que la liqueur donnée soit mise entre deux verres , comme il a été dit au corollaire. Observez à quelle distance le verre portera son foyer G. Augmentez cette distance de la moitié , pour avoir BF que vous diviserez par le demi-diamètre , & vous aurez le terme de la réfraction de ladite liqueur au verre. Puis divisez BG par AD semi-diamètre de la convexité pour avoir la proportion de AB à BG qui s'exprimera par une fraction , laquelle fraction vous diviserez par trois , & le double du produit donnera l'angle F qui est la réfraction de ladite liqueur au verre. Exemple. J'ai trouvé qu'ayant mis de l'eau entre les verres , le foyer étoit sextuple du demi-diamètre : je prend donc le tiers d'un sixième , ce qui fait  $\frac{1}{18}$  dont le double est  $\frac{2}{18}$  pour la réfraction de l'eau au verre.

Si vous tourniez le verre comme en la seconde figure , il faudroit pour agir démonstrativement considérer la chose d'une autre manière , & l'on trouveroit la réfraction du verre à la liqueur donnée. Mais la première pratique est plus facile , & d'ailleurs , puisque G est à distance égale de part & d'autre , il n'importe comme le verre soit tourné , & même l'épaisseur fera toujours moins considérable dans la manière de la première figure.

Ayant donc la réfraction ou plutôt la mesure des réfracti-  
ctions

ctions de ladite liqueur au verre, ou au contraire, il sera facile de la trouver à l'égard de l'air suivant ce qui a été dit avant la première proposition.

Par cette même manière on peut trouver la réfraction du vuide à l'air ou plutôt la proportion des réfractions de l'atmosphère, faisant que l'espace entre deux verres soit vuide, ce qui sera facile si cet espace étant bien fermé de tous côtez a communication seulement avec le haut d'un tuyau où se fera le vuide, & même il ne seroit pas difficile d'en tirer la hauteur de l'atmosphère, après avoir fait une table des réfractions à l'égard des incidences dans l'air ou dans le vuide.

### TRENTE-TROISIÈME PROPOSITION.

*Etant donné le point de divergence d'un rayon qui tombe sur un verre dans l'eau, trouver la convergence ou divergence dans l'eau.*

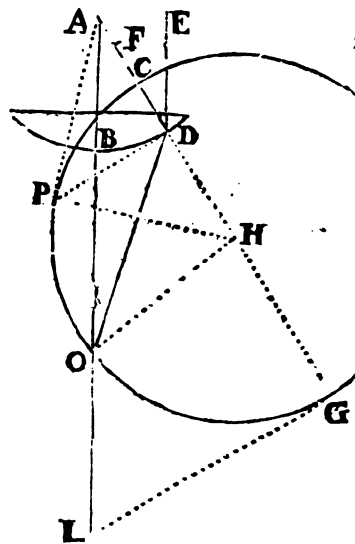
**I**L faut suivre les mêmes règles que le verre dans l'air, car le foyer du verre dans l'eau sera toujours moyen proportionnel, & cela vient de ce que l'angle F est ici égal à l'angle GDO aussi bien que dans l'air, car de même qu'un tiers plus un demi-tiers font un demi pour les réfractions du verre dans l'air, ainsi  $\frac{1}{2}$  plus  $\frac{1}{8}$  d'un neuvième ou  $\frac{2}{12} + \frac{1}{12}$  font  $\frac{1}{6}$ . Pareillement pour l'eau dans l'air  $\frac{1}{4}$  plus  $\frac{1}{12}$  de quart ou  $\frac{1}{12}$  font  $\frac{1}{3}$ , c'est-à-dire, que les deux réfractions qui se font, par exemple, de l'air au verre convexe des deux côtez & du même verre en l'air, ne valent pas plus que si le rayon parallèle sortoit immédiatement du verre & de même des autres.

Je néglige de démontrer toutes ces choses en particulier d'autant que l'application aux précédentes démonstrations en est très-facile.



*Lemme. Des extrémités d'une ligne AD, tirer deux lignes qui concourant en un point soient en raison d'inégalité donnée.*

Soit AD divisée en C suivant la raison donnée M | N, en sorte que le plus grand côté soit AC duquel soit retranchée AF égale à la différence des parties AC, CD, c'est-à-dire, que  $CD = CF$ . Puis comme  $AF | FC | CD || DH$ ; & du centre H & de l'intervalle HC soit décrit le cercle CG, je dis que tous les points de ce cercle, par exemple O, satisferont à la question, c'est-à-dire, que  $DO | AO || M$  moindre terme est à N plus grand, car soit tirée HO.



*Démonstration.*

$AF | FC || CD | DH$  & en composant  $AC | FC$  ou  $CD || CH | DH$  & en permutant  $AC | CH || CD | DH$  & en composant  $AH | CH$  ou  $HO || CH$  ou  $HO | DH$ : donc les triangles AHO, OHD ayant l'angle H commun & les côtes contenant cet angle proportionnels, les autres côtes AO, DO seront aussi proportionnels, donc  $OH$  ou  $CH | DH$ , ou bien  $AC | CD || AO | DO$ .

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que AG est à DG en raison donnée & que  
H h h h ij

le point G est le plus éloigné terme exclusif de tous ceux qui satisfont à la question, car  $AH \mid HG \parallel HG \mid DH$ , donc en composant & permutant  $AG \mid DG \parallel HG \mid DH$  ou  $AC \mid CD$ .

*Second Corollaire.*

Il s'ensuit aussi qu'ayant tiré à AD au point D la perpendiculaire DP, qui coupe le cercle en P, la ligne PA touchera le cercle CPG; car ayant tiré PH, les triangles APH, PDH seront semblables, & partant comme PDH est droit en D, APH sera aussi droit en P; donc AP touchera le cercle en P.

TRENTE-CINQUIÈME PROPOSITION.

*Probleme. Etant donné un rayon incident parallele à l'axe trouver geometriquement le concours de ce rayon avec l'axe, supposé qu'il puisse passer.*

**S**OIT ED rayon incident parallele à l'axe AB indéfiniment prolongé, & par le précédent lemme soit décrit le cercle CG qui coupe ou du moins touche en O au-dessous de B l'axe AB prolongé, je dis que O est le concours suivant la mesure de la réfraction qui aura été donnée, ce qui est clair par le lemme précédent.

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que plus AD sera proche de AB, c'est-à-dire, plus l'incidence sera petite & plus le concours O sera proche de G, & partant plus éloigné de B. Et si on prend  $BL = DG$ , le point L sera le terme exclusif de tous les foyers, ce qui est clair en faisant tant approcher AD de AB que DG, BL concourent.

*Second Corollaire.*

Il s'ensuit au contraire que le point O monte vers B à mesure que l'incidence croît jusques à ce que le demi-cercle CG touche l'axe ; car alors on aura la plus grande réfraction correspondante à la plus grande incidence, suivant la mesure donnée.

*Il faut remarquer que dans la figure précédente la ligne GL doit représenter un arc de cercle décrit du centre A.*

*Troisième Corollaire.*

Il s'ensuit aussi qu'il y a beaucoup de rayons qui concourent fort proche du point L, à cause que le cercle CG & l'arc LG décrit sur le centre A se touchent en G ; c'est pourquoi L est pris pour le foyer, quoiqu'en rigueur geometrique aucun rayon n'y vienne que de l'axe.

*Quatrième Corollaire.*

Il s'ensuit que pour le foyer il faut prendre la différence des termes de la mesure de la réfraction, & dire comme la différence est au moindre des termes ; ainsi le demi-diamètre AD est à DG ou BL, car par le corollaire premier du lemme précédent AG est à DG comme le plus grand terme au moindre : donc en divisant, comme la différence est au moindre terme, ainsi AD est à DG ou BL.

Ainsi le foyer d'un verre plano-convexe dans l'air est à deux demi-diamètres, à cause que la mesure est de 2 à 3, car la différence des termes est au moindre, comme 1 à 2. Or ce qui est démontré du plano-convexe se peut étendre au convexe des deux côtez, en réduisant une convexité en deux qui fassent le même effet ; mai.

H h h h iij

la démonstration n'est pas si geometrique , quoiqu'en effet il n'y ait dans l'expérience aucune difference.

TRENTE-SIXIÈME PROPOSITION.

*Pour la proportion des ouvertures des objectifs & de leurs oculaires.*

**L**A proportion de l'objectif à l'oculaire donne la multiplication de la lunette ; car l'angle visuel se trouve autant de fois multiplié , que le foyer de l'oculaire est contenu dans celui de l'objectif. Ce qui se doit néanmoins entendre dans les petits angles. C'est-à-dire lorsque les angles sont entr'eux comme leurs tangentes : car pour déterminer la chose plus exactement , il faut dire que comme le foyer de l'oculaire est à celui de l'objectif , ainsi la tangente de la moitié de l'angle de premiere incidence est à la tangente de la moitié de l'angle visuel multiplié par la lunette. Cela même aussi suppose que la pointe de l'angle visuel , ou le lieu de la prunelle , se rencontre justement au foyer de l'oculaire ; ce qui n'est pas : Car comme le foyer de l'objectif est au foyer de l'oculaire , ainsi le même foyer de l'oculaire est à ce qu'il y a de plus que le foyer de l'oculaire , Mais c'est si peu qu'on le peut negliger sans erreur.

*Premier Corollaire.*

Il s'ensuit que la multiplication d'une lunette s'exprime par le quotient de la division de l'objectif par l'oculaire.

*Second Corollaire.*

Il s'ensuit aussi que deux lunettes sont entr'elles com-

me les fuddits quotiens qui donnent la proportion des angles vifuels à l'égard d'un même objet.

*Premier Lemme.*

Si deux quantitez D, E font divisées par une même A, les quotiens B, C feront entr'eux comme les quantitez divisées D, E. Car puis- que le rectangle sur le quotient & le diviseur est égal au divisé, le rectangle AB rect. | AC || D | E, c'est-à-dire B | C || D | E.

*Second Lemme.*

Si une même quantité A est divisée par deux différentes D, E, les quotiens B, C feront en raison réciproque des diviseurs. Car les rectangles DB, EC étant égaux, B sera à C comme E à D.

*Troisième Lemme.*

Si les diviseurs A, B, sont comme les divi- fez D, E, les quotiens C, D feront égaux. Car ils exprimeront une même proportion, & les deux rectangles AC, DB étant comme D, E, c'est-à-dire comme les bases A, B, il faut que les hauteurs C, D soient égales.

*Quatrième Lemme.*

Si les diviseurs AB sont en raison sous-doublée des divi- sez DE, les quotiens CD feront entr'eux comme les diviseurs.

Soit F troisième proportionnelle aux divi- feurs AB, & partant comme D à E, & soit G le quotient de E par F. Par le troisième lem-

me, les quotiens CG seront égaux, & par le second lemme le quotient G est à D comme B à F. Donc C qui est égal à G sera à D, comme B à F, c'est-à-dire comme A à B.

*Cinquième Lemme.*

Si les diviseurs AB sont en raison sous-triplée des diviseurs DE, les quotiens CD seront en raison doublée des diviseurs AB.

Soit  $D|E||A|F$  c'est-à-dire, que B soit D E à F en raison doublée de A à B, & que le quotient de la division de E par F soit G, comme  $AB*F$  dessus : les quotiens CG seront égaux; & d'ailleurs G sera à D, comme B à F: donc C, qui est égal à G, sera à D, comme B à F, c'est-à-dire en raison doublée de A à B.

*Sixième Lemme.*

Si les diviseurs sont en raison sous-quadruplée, les quotiens seront en raison triplée des diviseurs.

**TRENTE-SEPTIÈME PROPOSITION.**

**S**I les oculaires sont proportionnels aux objectifs, les multiplications ou approches seront égales. Cela suit du premier & du second corollaire de la trente-sixième Proposition & du troisième Lemme.

**TRENTE-HUITIÈME PROPOSITION.**

**S**I deux objectifs inégaux ont des oculaires égaux, les multiplications, seront en proportion des objectifs. Cela suit des Corollaires de la trente-sixième Proposition & du premier Lemme. J'entens que les angles visuels,

&

& partant les diamètres des peintures dans l'œil seront comme les foyers des objectifs : mais les grandeurs superficielles des mêmes images en seront en raison doublée.

TRENTE-NEUVIÈME PROPOSITION.

**S**I les oculaires étant proportionnels aux objectifs, les ouvertures des objectifs sont égales, les clartez seront égales. Car par la trente-septième Proposition les multiplications, c'est-à-dire les angles visuels, & partant les peintures dans l'œil, seront égales : & d'ailleurs, à cause de l'égalité des ouvertures ; les images auront pareille quantité de lumière rassemblée en espaces égaux, &c.

QUARANTIÈME PROPOSITION.

**S**I les oculaires étant égaux, les diamètres des ouvertures des objectifs sont proportionnels aux mêmes objectifs, les clartez seront égales. Car par la trente-huitième Proposition les angles visuels seront comme les objectifs. Si donc les ouvertures sont comme les mêmes objectifs, les images dans l'œil recevront des rayons à proportion de leur grandeur ; c'est-à-dire que les espaces éclairés seront proportionnels aux lumières, & partant également éclairés.

QUARANTE-UNIÈME PROPOSITION.

**S**I les oculaires & les ouvertures diamétrales des objectifs sont en proportion des objectifs, les clartez seront en raison doublée des mêmes objectifs. Car par la trente-septième Proposition, les peintures dans l'œil seront égales en grandeur, & par conséquent éclairées en proportion de la quantité de lumière qu'ils contien-

dront, c'est-à-dire en proportion de la grandeur superficielle des objectifs, laquelle est doublée de la diamétrale.

QUARANTE-DEUXIÈME PROPOSITION.

**S**I des objectifs inégaux ayant des oculaires égaux, sont aussi des ouvertures égales, les clartez seront réciproquement en raison doublée des objectifs. Car par la trente-huitième les images dans l'œil prises comme surfaces, seront en raison doublée. Mais d'ailleurs elles ne recevront qu'une égale quantité de rayons qui se trouvera plus unie & plus forte dans le petit espace que dans le grand, & ce en raison réciproque des espaces.

QUARANTE-TROISIÈME PROPOSITION.

**S**I les oculaires, & aussi les diamètres des ouvertures des objectifs sont en raison sous-doublée des objectifs, les multiplications ou angles visuels seront en raison aussi sous-doublée, & ces clartez seront égales. La première partie suit du quatrième Lemme & des Corollaires de la trente-sixième Proposition. Or les angles visuels étant en raison sous-doublée des objectifs, & les ouvertures de même, les espaces seront éclairés à proportion de leur grandeur, &c.

Notez que suivant cette proportion, l'augmentation superficielle des peintures dans l'œil sera en raison des objectifs, de même aussi que la grandeur superficielle des ouvertures des objectifs.

QUARANTE-QUATRIÈME PROPOSITION.

**S**I les oculaires sont en raison sous-triplée des objectifs, & les ouvertures diamétrales en raison doublée des oculaires, les angles visuels ou approches seront

aussi en raison doublée des oculaires, & les clartez seront égales. La premiere partie suit du cinquième Lemme : Car les oculaires sont les diviseurs & les quotiens répondent aux angles visuels. Puis donc que les oculaires sont en raison sous-triplée, les angles visuels seront en raison doublée des oculaires. Et enfin, puisque par l'hypothese les ouvertures sont aussi en raison doublée des oculaires, elles seront comme les angles visuels. Partant les clartez égales : car les peintures dans l'œil étant en raison des ouvertures des objectifs, les quantitez de lumiere seront proportionnelles aux espaces où elles seront contenuës.

*Des foyers qui se font par reflexion & par refraction  
tout ensemble.*

UN verre exposé au soleil ne laisse pas passer tous les rayons, mais il en réfléchit une partie non seulement par sa surface antérieure, mais encore par la postérieure, quoiqu'elle ne soit point terminée.

Les rayons ainsi réfléchis s'unissent ou se séparent, suivant la qualité des surfaces.

La réflexion faite par la surface antérieure est simple; mais celle qui se fait par la postérieure est diversement modifiée par les réfractions causées par la surface antérieure.

Il est facile de connoître si un foyer de réflexion vient de la surface antérieure ou de la postérieure : car aux verres qui ne sont point menisques, tout foyer de réflexion vient de la surface postérieure. Il en est de même aux menisques, lorsque les convexitez sont tournées vers le soleil. Mais si les cavitez sont tournées vers le soleil, il se fait alors deux foyers d'un même côté, dont le plus éloigné & par conséquent le plus large & le plus foible, vient de la cavité antérieure, se faisant à distance du

quart du diamètre de la même cavité. Ce qui donne une facilité à connoître ces sortes de verres. Mais lorsque nous parlerons ci-après des foyers de réflexion, nous entendrons toujours parler des foyers qui se font par la surface postérieur, qui sont faciles à connoître.

### *Règles generales.*

1. Si un verre ne fait foyer de réflexion que d'un seul côté, il sera menisque. La converse n'est pas veritable.

2. Si un verre fait deux foyers, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, & que l'un soit justement à distance triple de l'autre, ce verre sera plano-convexe, le plat sera vers le plus court foyer.

Ce plus court foyer se fera au tiers de la distance du centre de la convexité : la longueur du verre sera sextuple de ce petit foyer, ou bien sera double de l'autre.

3. Si un verre fait deux foyers opposez, dont l'un soit moindre que triple de l'autre, le verre sera convexe des deux côtez. Et si le quart de la somme des foyers est ôté de chaque foyer, on aura deux termes qui exprimeront la raison des diamètres des deux convexitez.

Mais pour trouver le foyer de réfraction, il faut faire

Comme la somme des foyers de réflexion est à l'un des foyers, ainsi le double de l'autre est à  $\frac{1}{4}$  du foyer de réfraction requis.

Le petit foyer est toujours vers le côté moins convexe.

Notez que si les deux foyers sont égaux, la longueur du verre est quadruple de chacun.

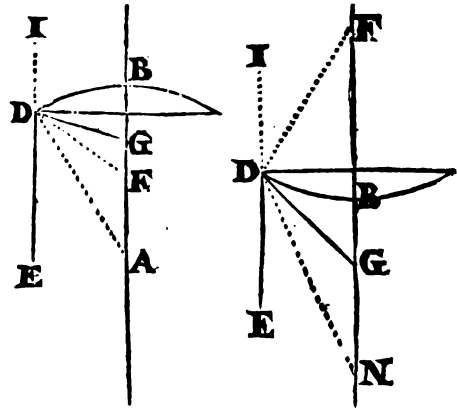
4. Si le grand foyer excède le triple de l'autre, le verre sera menisque.

Le petit foyer sera vers la partie cave.

## QUARANTE-CINQUIÈME PROPOSITION.

*Si la surface plate d'un plano-convexe est tournée vers le Soleil, la réflexion du fond portera son foyer à  $\frac{1}{3}$  du demi-diamètre.*

**S**OIT A le centre de la convexité, ED rayon incident; F moitié de BA, ED viendra jusques au fond sans refraction, & delà par la réflexion devroit être porté en F: mais à cause de la surface plate, le concours est approché du tiers de BF en G: donc  $BG = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$  c'est-à-dire  $\frac{1}{3} AB$ . Et alors la réflexion de la première surface qui est plate sera égale à ladite surface, ou seulement plus grande de ce que donne la base de 30' prise à distance de GB.



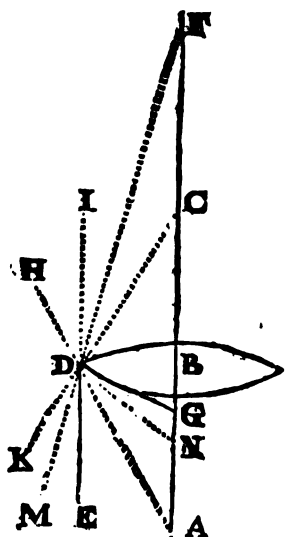
Si la convexité est vers le Soleil, la réflexion du fond aura son foyer à la distance du centre: car la première réfraction à l'entrée de la convexité porteroit le rayon au fœqui-diamètre F: donc la réflexion du fond, s'il ne suivait point de réfraction; le porteroit en N à même distance: donc ayant prolongé ED en I, vous voyez qu'il arrivera le même à DN, que si venant de ID, il avoit passé à travers un verre également convexe des deux côtes, c'est-à-dire qu'il sera porté au centre G. Et alors la réflexion de la convexité sera élargie comme venant

de derriere le verre à distance du quart du diamètre.

Dans l'un & dans l'autre cas la réflexion du fond se trouvera toujours au milieu de celle du dessus, si le plus épais est bien au milieu, c'est-à-dire si le centre répond à plomb au milieu : autrement il faudra rogner le verre du côté le plus mince pour faire trouver le centre au milieu; & on se pourra régler par le moyen d'un cercle de carton appliqué sur le verre, & poussé plus ou moins de côté & d'autre, jusques à ce que la réflexion soit juste.

QUARANTE-SIXIÈME PROPOSITION.

*Le fond d'un verre également convexe porte sa réflexion à  $\frac{1}{4}$  du demi-diametre.*



**S**OIENT les centres A, C; le rayon incident ED prolongé en I, & les perpendiculaires prolongées ADH, CDK. Soit la premiere réfraction IDF, à laquelle soit EDM égale: puis soit la réflexion ADN = ADM, & enfin la derniere réfraction NDG =  $\frac{1}{2}$  KDN.

$MDA = A + \frac{1}{3} C$ , &  $MDN = 2A + \frac{2}{3} C$ : mais  $KDM = \frac{2}{3} C$ : donc  $KDN = 2A + C + \frac{1}{3} C$ . Mais  $NDG = \frac{1}{2} KDN$ : donc  $NDG = A + \frac{2}{3} C$ , donc  $KDG = 3A + 2C$ ; & ayant ôté KDE

ou C, il restera  $3A + C = DGC$ : donc

Comme  $3A + C$  |  $C$  |  $DGC$  |  $C$ , ou bien

Comme  $3DC + AD$  |  $AD$  |  $DC$  |  $DG$  ou  $GB$ . Si

donc les convexitez sont égales, AB sera quadruple de

BG. Et ainsi généralement, comme le sesqui-diamètre de la convexité antérieure qui fait les réfractions, augmenté du demi-diamètre de la convexité qui fait la réflexion, est à ce demi-diamètre, ainsi le demi-diamètre de la convexité antérieure est au foyer.

TRENTE-SEPTIÈME PROPOSITION.

*Pour les Menisques qui appartiennent aux convexes:*

**L**ORSQUE les cavitez sont tournées vers le soleil. I. Cas.  
Soient les centres A, C, le rayon incident ED, les perpendiculaires ADH, CDK.

$$MDC = \frac{1}{3}C, \text{ \& } MDA = CDA + \frac{1}{3}C.$$

$$MDN = 2CDA + C + \frac{1}{3}C.$$

$$CDN = 2CDA + \frac{2}{3}C.$$

$$NDG = CDA + \frac{1}{3}C: \text{ donc }$$

$$CDG = 3CDA + C: \text{ donc }$$

$$EDG \text{ ou } DGB = 3CDA + 2C, \text{ \& partant }$$

$$\text{Comme } 3CDA + 2C \mid C \parallel DGB \mid C. \text{ Ou bien }$$

$$\text{Comme } 3CA + 2DA \mid DA \parallel DC \mid DG \text{ ou } BG,$$

donc comme la sesqui-différence des demi-diamètres augmentée du demi-diamètre de la convexité qui fait la réflexion, est au demi-diamètre de la même convexité; ainsi le demi-diamètre de la convexité qui fait les réflexions, est au foyer.

Lorsque les convexitez sont tournées vers le soleil.

II. Cas.

Le rayon ED de première incidence étant rompu par la première convexité, tombe sur la seconde, comme s'il étoit dans la position de MD; & si BC est triple de BA, alors MD tombera sur KD & le rayon réfortira sur DE comme il étoit venu. Mais si BC est plus grand que triple, alors MD tombera entre KD & DH & se voudra réfléchir selon KDN égal à KDM; mais par la dernière

réfraction, il sera détourné en G, enforte que NDG sera moitié des angles NDK & KDH ou ADC.

$MDH = \frac{1}{2} A$ , donc  $KDM = ADC - \frac{1}{2} A$  : mais

$KDM = KDN$ , donc  $KDN = ADC - \frac{1}{2} A$  ; donc

$NDH = 2 ADC - \frac{1}{2} A$ , donc  $NDG = ADC - \frac{1}{2} A$  & ajoutant NDK on aura  $KDG = 2 ADC - A$  : mais

$G = KDG - C$  ; donc  $G = ADC - 2 C$ . Donc

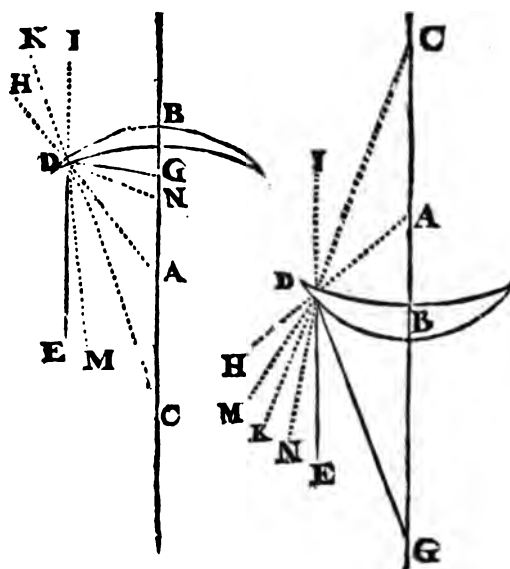
Comme  $ADC - 2 C \mid C \mid G \mid C$  : c'est-à-dire

Comme  $CA - 2 AD \mid AD \mid CD \mid DG$ . Donc

Comme la difference des demi-diamètres diminuée du double du petit demi-diamètre est au petit demi-diamètre, ainsi le grand demi-diamètre est au rayon.

Où il est clair, que si un demi-diamètre est justement triple de l'autre, le double du petit étant ôté de la difference, le reste sera rien ; & ainsi la distance du foyer sera

infinie. Mais si le grand demi-diamètre CD étoit moindre que triple du petit AD, alors le rayon ED par la première réfraction prendroit la position de ND & se réfléchirait au-dessus de DK, & quelquefois aussi selon DK, ce qui arriveroit quand AD seroit double de CA, c'est-à-dire, quand les

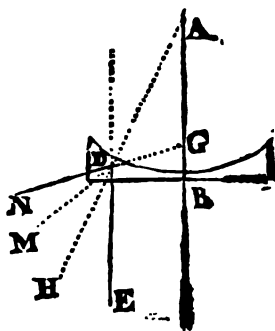


demi-diamètres seroient comme 3 à 2, & alors il n'y auroit point de seconde réfraction, car le rayon sortiroit selon

selon la divergence de HA. Que si CA étoit égal à AD, la réflexion s'étant faite entre HD & DK, le rayon sortiroit enfin selon CD, & ainsi du reste à proportion, c'est-à-dire, qu'en augmentant CA un peu plus que la moitié de CB, le rayon sortira comme divergeant d'un point de l'axe plus éloigné que C.

## QUARANTE-HUITIÈME PROPOSITION.

**L**Es verres plano-concaves dont la cavité regarde le soleil font foyer au quart du diamètre de ladite cavité; mais le fond fait une réflexion divergente, comme de la distance du centre de la cavité pris derrière. Si le plat est vers le soleil, le fond fait réflexion divergente comme du tiers du demi-diamètre. Car le rayon entre sans réfraction & la réflexion  $MDH = A$  &  $EDM = 2A$ , donc à la sortie la réfraction  $MDN = A$ : donc  $DGB = 3A$ , donc  $ADB = 2A$ . Et ainsi  $AG : GB :: 2 : 1$ .



Notez que de tous verres qui ramassent les rayons, la plus forte réflexion vient toujours du fond, & au contraire de ceux qui les écartent.

Notez aussi que l'on peut facilement connoître si une réflexion vient du fond en appliquant le verre sur de l'eau, car dans l'attouchement de l'eau la réflexion du fond s'affoiblit fort sensiblement, & cela se peut faire à la chandelle ou au soleil.

## QUARANTE-NEUVIÈME PROPOSITION.

*Les deux foyers de réflexion de part & d'autre étant donnez, trouver les diamètres des convexitez.*

CETTE proposition est la converse de la 46<sup>e</sup>. Soient les deux foyers réduits à une mesure commune assez petite pour avoir des nombres entiers. De leur somme soit pris le quart, lequel soit séparément ôté de chaque foyer & les restes vous donneront deux termes pour la proportion des diamètres. Maintenant avec ces deux termes, comme si c'étoient de veritables diamètres, cherchez un nouveau foyer de réflexion, suivant la règle de la 46<sup>e</sup> proposition, lequel vous voudrez; & la proportion de ce nouveau foyer de réflexion trouvée, avec celui des donnez qui lui est semblable, vous donnera les diamètres. Car comme ce nouveau foyer trouvé est au donné, ainsi lequel vous voudrez des termes de la proportion des diamètres, donnera le diamètre correspondant audit terme.

*Démonstration.*

Soient les demi-diamètres A, G, & les foyers M, N.

$$3A + G \mid G \mid A \mid M$$

$$3G + A \mid A \mid G \mid N, \text{ donc le rectangle de}$$

$$M \text{ sur } 3A + G = \text{au rectangle de } N \text{ sur } 3G + A.$$

$$\text{Donc } M \mid N \mid 3G + A \mid 3A + G, \text{ donc } \textit{componendo}$$

$$M + N \mid N \mid 4G + 4A \mid 3A + G, \&$$

$$\frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid N \mid G + A \mid 3A + G, \& \textit{inverendo}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid 3A + G \mid G + A, \& \text{ de même} \\ M \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid 3G + A \mid A + G, \& \textit{dividendo} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid \mid 2A \mid G + A, \\ \text{\& de même} \\ M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid \mid 2G \mid A + G, \\ \text{\& permutando} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2A \mid \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid G + A, \\ \text{\& de même} \\ M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2G \mid \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid A + G, \\ \text{donc} \end{array} \right. \\
 & N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2A \mid \mid M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2G, \\
 & \text{\& permutando} \\
 & N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid \mid 2A \mid 2G.
 \end{aligned}$$

Donc si l'on ôte de chaque foyer le quart de la somme des foyers, vous aurez la proportion des diamètres. Et pour discerner à quelle convexité appartient chaque diamètre, il faut sçavoir que le plus grand diamètre appartient à la convexité qui est du côté du petit foyer : car si M est plus grand que N, 3 A + G seront plus petits que 3 G + A.





**T R A I T É**  
**D U**  
**N I V E L L E M E N T .**  
**P A R M . P I C A R D .**

Xkkk ij





# TRAITÉ DU NIVELLEMENT.

---

## CHAPITRE PREMIER.

### *De la Theorie du Nivellement.*



**O**N appelle des Points de Niveau, ceux qui sont également éloignez du centre de la Terre :

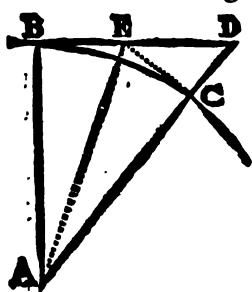
D'où il s'ensuit qu'une ligne, qui dans toute sa longueur seroit parfaitement de niveau, auroit tous ses points rangez dans une courbure circulaire dont le centre seroit celui de la Terre.

Supposant donc que tous les points de la superficie des corps liquides, qui ne sont point agitez, sont également éloignez du centre de la Terre, nous dirons que tous les points de la superficie de ces corps sont de niveau, comme celle des Mers, des Lacs, des Etangs, & generalement de toutes les liqueurs qui n'ont point de mouvement.

On pourroit donc par ce moyen déterminer le niveau de deux points en se servant d'un canal rempli d'eau, qui les toucheroit : mais comme cette méthode ne pourroit être commodément mise en pratique que dans de petites distances, on est obligé de se servir du rayon visuel, que l'on dirige par le moyen de quelque instrument dont toute la justesse tend à bien établir une ligne qui soit parallèle à une autre ligne que l'on suppose dans l'horizon du lieu où l'on fait l'observation, ou qui faisant un angle droit avec celle du perpendicule, qui est une ligne qui tend au centre de la Terre, s'élève au-dessus du vrai niveau autant qu'une touchante s'écarte de la circonférence d'un cercle à mesure qu'elle s'éloigne du point où elle le touche.

Cette ligne droite parallèle à l'horizon fera appelée dans la suite *ligne du Niveau apparent*.

Ce qui vient d'être expliqué se comprendra plus aisément dans la figure suivante, où le point A représente



le centre de la Terre sur lequel on a décrit l'arc du vrai niveau BC, & la ligne BD qui touche cet arc de cercle au point B où l'on fait l'observation pour le Nivellement, représente le niveau apparent qui sera à angles droits avec AB par la 16<sup>e</sup> Proposition. du 3<sup>e</sup> Livre d'Euclide; BA est la ligne du perpendicule; AD est une secante de l'arc de cercle

cercle BC, laquelle surpasse le demi-diamètre AC de la quantité de la ligne CD, qui est l'excès dont le niveau apparent s'élève au-dessus du vrai pour l'arc BC, ou pour l'angle BAC.

On doit remarquer que jusqu'à la distance de 100 toises, le niveau apparent s'élève si peu au-dessus du vrai, que la correction que l'on y doit faire n'est pas considérable, & que l'on peut sans faire une erreur sensible, prendre le niveau apparent pour le vrai : mais si l'on négligeoit cette correction dans des distances plus longues que 100 toises, on feroit des erreurs très-considérables, comme l'on pourra voir dans la Table suivante, qui servira à trouver le vrai niveau par le moyen de l'apparent, ce qui suppose que l'instrument dont on se sert soit juste, & que d'ailleurs le rayon visuel soit droit, ce qui n'est pas toujours, principalement dans les distances un peu considérables, où quelquefois les réfractions le font aller en ligne courbe, dont on parlera dans la suite.

Dans la Table suivante, la première colonne marque en toises, les distances entre la station où l'on fait le Nivellement; & le lieu qui est nivelé, c'est-à-dire où l'on pointe le Niveau.

L'autre colonne contient les pieds, pouces, & lignes dont le niveau apparent est plus élevé que le vrai pour les distances qui sont mises à côté; en sorte que l'on doit abaisser le niveau apparent de la quantité des pieds, pouces & lignes de la seconde colonne, suivant les distances qui leur sont correspondantes, pour avoir le vrai niveau.



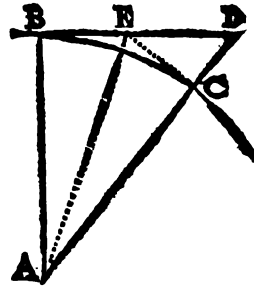
TABLE DES HAUSSEMENTS  
du Niveu apparent par dessus le vrai,  
jusqu'à la distance de 4000 toises.

Distances.		Haussemens.		
Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	
50	0	0	$0\frac{1}{3}$	
100	0	0	$1\frac{1}{3}$	
150	0	0	3	
200	0	0	$5\frac{2}{3}$	
250	0	0	$8\frac{1}{3}$	
300	0	1	0	
350	0	1	$4\frac{1}{3}$	
400	0	1	$9\frac{1}{3}$	
450	0	2	3	
500	0	2	9	
550	0	3-	6	
600	0	4	0	
650	0	4	8	
700	0	5	4	
750	0	6	3	
800	0	7	1	
850	0	7	$11\frac{1}{2}$	
900	0	8	11	
950	0	10	0	
1000	0	11	0	
1250	1	5	$2\frac{1}{2}$	
1500	2	0	9	
1750	2	9	$8\frac{1}{2}$	
2000	3	8	0	
2500	5	8	9	
3000	8	3	0	
3500	11	2	9	
4000	14	8	0	

La Règle qui sert à trouver les haussiemens du niveau apparent par dessus le vrai, est de diviser le quarré de la distance par le diamètre de la Terre, qui selon notre mesure est de 6538594 \* toises, & c'est pour cette raison que les haussiemens du niveau apparent sont entr'eux comme les quarrés des distances, ce que l'on peut voir dans la Table.

Le fondement du calcul proposé pour trouver les haussiemens du niveau apparent, n'est pas Geometrique; mais il en approche si fort, que dans la pratique il ne peut s'ensuivre aucune erreur sensible.

Car il est vrai de dire, que comme le demi-diamètre AB est à la touchante BD, ainsi CE ou BE touchante de la moitié de l'angle BAD est à CD, à cause des triangles semblables ABD, ECD, qui sont rectangles en B & en C, à cause des touchantes BC CE par la 18<sup>e</sup> Proposition du 3<sup>e</sup> Livre d'Euclide, & qui ont l'angle commun au point D; mais si l'on double le premier & le troisième terme de cette proportion, on aura comme le diamètre entier de la touchante BD, ainsi le double de BE, que l'on suppose égal à BD, sera à CD qui est la correction requise; c'est pourquoi le produit des termes moyens de cette dernière proportion, qui est le quarré de BD étant divisé par le premier terme, qui est le diamètre de la Terre, produira la correction CD: Or on peut supposer aux petits angles, tels que sont ceux dont il s'agit dans la pratique du Nivellement, que le double de BE est égal à BD,



\* Quoique dans cette question, l'extrême précision dans la connoissance du diamètre de la Terre, ne soit pas requise, il est bon d'avertir, que cette grandeur qu'on lui donne ici, a été confirmée depuis, par les Observations de la fameuse Meridienne de Paris.

& par conséquent le diamètre de la Terre est à la distance BD des points que l'on veut mettre de niveau, comme cette même distance BD au haussement CD du niveau apparent par-dessus le vrai.

Les haussemens du niveau apparent ne sont pas tels qu'ils devroient être en effet, à cause de la réfraction qui fait paroître l'objet au-dessus du lieu où il est effectivement : mais outre que la réfraction n'est pas sensible lorsque la distance n'excede pas 1000 toises ; voici encore deux moyens pour déterminer le vrai niveau indépendamment non seulement de la réfraction, mais encore des haussemens du niveau apparent, & de ce qui pourroit arriver de la part de l'instrument, sans qu'il importe qu'il soit juste, ou non, pourvû qu'il demeure toujours dans le même état, & qu'on s'en serve aussi de la même manière.

#### METHODE PREMIERE.

*Pour niveler sans faire la vérification de l'instrument, & sans avoir égard aux haussemens du niveau apparent par-dessus le vrai, ni à la réfraction.*

Il faut placer l'instrument à égale distance des termes où l'on veut marquer des points de niveau ; car il est évident que si d'une même station, & avec un instrument qui demeure toujours à même hauteur, & dont on se serve aussi toujours de la même manière, on détermine plusieurs points de visée, qui soient également éloignés de l'œil de l'Observateur ; tous ces points seront également éloignés du centre de la Terre, étant également abaissés ou élevés à l'égard du vrai niveau, c'est pourquoi ils seront tous de niveau entr'eux ; mais ils ne seront pas pour cela de niveau avec la station où l'on fait le nivellement, c'est-à-dire avec l'œil de l'Observateur dans cette station :

il faut encore supposer que s'il y a de la réfraction, elle soit égale dans toutes ses distances égales.

## METHODE II.

Le second moyen demande un double nivellement, & réciproquement fait d'une premiere station à une seconde, puis de cette seconde à la premiere : ou bien, pour plus grande sûreté, à cause des réfractions qui pourroient causer quelque erreur dans ce nivellement réciproque, en changeant dans l'espace du temps, qu'il y auroit entre les deux observations, il faudroit qu'il y eût deux Observateurs, qui étant placez aux deux extrémités de la distance proposée, nivellassent à même tems, & avec des instrumens qui fussent parfaitement d'accord ; mais lorsque l'on veut se servir de cette maniere, il n'est pas nécessaire de prendre cette précaution à l'égard de la réfraction, qui ne peut pas être considérable, pourvû que la distance n'excede pas 1000 toises, comme nous avons dit ci-devant.

Ce qui étant supposé, il faut sçavoir, que si dans chaque station le lieu de l'œil, & le point de visée réciproque se trouvent joints ensemble, en sorte que les deux lignes visuelles qui servent au nivellement, & que pour ce sujet nous appellons *lignes du Nivellement*, conviennent, & n'en fassent qu'une, comme dans la premiere figure suivante, les extrémités de cette ligne seront de niveau : mais si dans une des stations, comme dans la seconde figure, ou dans les deux stations, comme dans la troisième & quatrième figure, le lieu de l'œil se trouve séparé du point de visée réciproque : les points pris au milieu entre ceux-là seront de niveau entr'eux, ou avec ceux qui sont joints ensemble dans la seconde figure.

*Démonstration.*

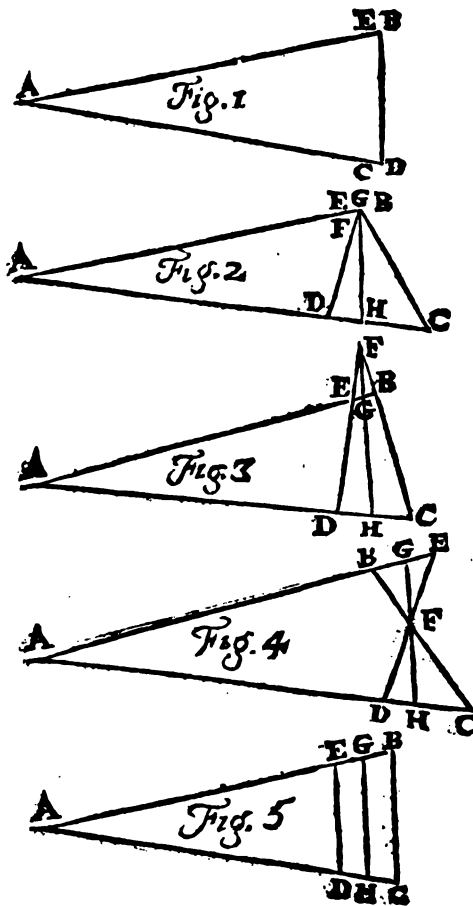
A représente le centre de la Terre; BC, DE sont deux lignes du nivellement réciproque, ayant chacune

respectivement l'œil à un bout aux points marquez B & D, & le point de visée à l'autre bout aux points marquez C & E.

De la supposition que nous avons faite que l'instrument demeurât toujours dans un même état sans qu'il lui arrivât aucun changement, ou que s'il y avoit deux instrumens ils fussent bien d'accord, il s'ensuit que les angles ABC, ADE, ou bien ACB, AED sont égaux entr'eux, & que les lignes BC, DE, supposé qu'elles soient séparées, sont ou parallèles entr'elles, ou dans une position sous-

contraire, que nous

appelons autrement anti-parallèles; & dans ce cas si nous nous imaginons que la ligne GH passant par le point F, qui est la rencontre des anti-parallèles, divise



en deux également l'angle BFE, ou DFC fait par ces mêmes anti-parallèles; la ligne GFH rencontrera les lignes AB, AD aux points G & H qui seront également éloignés du centre de la Terre A, & qui par conséquent seront de niveau, suivant la définition des points de niveau.

Car premièrement, si les points BE & CD sont joints ensemble, comme dans la première figure, il est évident que les lignes AB, AD seront égales entr'elles par la sixième Proposition du premier Livre d'Euclide; car les angles ADB, ABD sont égaux entr'eux par la position; c'est pourquoi les points B & D seront de niveau.

Secondement, si les lignes BC & DE sont parallèles entr'elles comme dans la cinquième figure: à cause des parallèles CB, DE les angles ADE, ACB seront égaux entr'eux par la vingt-neuvième Proposition du premier Livre des Elemens d'Euclide; mais aussi par la position les angles ADE, ABC sont égaux entr'eux; donc aussi les angles ACB, ABC sont égaux entr'eux, d'où il s'enfuivra comme ci-devant que les lignes AB, AC seront égales, & par conséquent les points B & C seront de niveau. On démontrera aussi par la même raison que les points D & E sont de niveau; car les lignes AD & AE seront aussi égales entr'elles: c'est pourquoi si l'on divise BE en deux également en G, & CD en H; les points G & H seront aussi de niveau, comme il est proposé: car AC & AB étant égales, & AD & AE l'étant aussi, les lignes CD & BE le seront semblablement & leurs moitiés aussi DH, EG; donc AH sera égale à AG, & les points G & H de niveau.

Troisièmement, si les points B & E sont joints ensemble, & les deux autres de l'autre côté D & C seront séparés, comme dans la seconde figure, l'angle CBD étant coupé en deux également par la ligne BH, qui rencontre

AC en H; le point H sera de niveau avec le point B : car les angles ADB, ABC étant égaux par la position, & l'angle au point A étant commun pour les deux triangles ADB, ABC, il s'ensuit que les autres angles restans dans ces deux triangles, à sçavoir ABD, ACB seront égaux; car par la trente-deuxième Proposition du premier Livre d'Euclide les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits : Si l'on ajoute donc à l'angle ABD l'angle DBH, la somme, qui est l'angle ABH, sera égale à la somme de l'angle ACB & de l'angle CBH qui sont égaux aux deux premiers; mais dans le triangle HCB, par la même trente-deuxième Proposition ci-dessus rapportée, l'angle extérieur AHB est égal aux deux intérieurs HCB ou bien ACB & CBH; c'est pourquoi l'angle AHB sera égal à l'angle ABH, & par la sixième Proposition du premier Livre d'Euclide, les lignes AB & AH seront égales, & par conséquent les points B & H seront de niveau.

Enfin, si les anti-paralleles BC, DE concourent en F au-dedans, ou au-dehors de l'angle BAC comme dans les troisième & quatrième figures, la ligne GFH menée par le point F, en sorte qu'elle divise en deux également les angle égaux EFB, DFC, rencontrera les côtes AB, AD en G & en H qui seront des points de niveau : car aux deux triangles FBG, FDH les angles au point F sont égaux; & par la trente-deuxième Proposition du premier Livre d'Euclide l'angle extérieur ABC du triangle FBG est égal aux deux intérieurs FGB, & BFG; & semblablement l'angle extérieur ADE du triangle FDH est égal aux deux intérieurs DFH, FHD; mais les deux angles ABC, ADE étant égaux par la supposition, aussi les deux angles FGB, BFG pris ensemble seront égaux aux deux angles DFH, FHD pris aussi ensemble: desquelles si l'on ôte les égaux BFG, DFH, les restans FGB ou AGH, & FHD ou AHG seront égaux, & par  
la

La sixième Proposition ci-dessus rapportée les côtez AG, AH du triangle AGH seront égaux ; donc les points G & H seront de niveau.

Mais dans la pratique du nivellement il y a toujours si peu de difference entre les lignes FB, FE, & FC, FD, que l'on peut les supposer égales entr'elles sans tomber dans une erreur sensible : d'où il s'ensuivra que la ligne GFH, qui divise en deux également les angles au point F, coupe les lignes EB, DC en deux également au point G & H, qui seront de niveau, comme il a été démontré ci-devant, & c'est ce qu'il falloit prouver.

On dira que cette démonstration suppose que les lignes du nivellement BC, DE soient droites ; ce qui n'est pas toujours vrai, principalement aux grandes distances à cause des réfractions : Mais comme nous supposons, que s'il y a de la réfraction, elle soit égale de part & d'autre, il est évident qu'elle ne changera rien à la détermination du vrai niveau.

Voilà donc deux manieres de trouver avec exactitude le vrai niveau : mais lorsque l'on n'a pas la commodité de prendre toutes les précautions nécessaires, & que l'on est obligé de faire la chose d'un seul coup de nivellement, & d'une seule station, il est nécessaire de connoître l'erreur de l'instrument s'il y en a : j'entens qu'il est nécessaire de sçavoir de combien l'instrument hausse ou baisse la mire à l'égard du niveau apparent pour une certaine distance donnée, c'est ce que l'on appelle *Verification* de l'instrument dont nous parlerons dans le Chapitre suivant : mais pour avoir le vrai niveau d'un seul coup & d'une seule station, ce n'est pas assez de connoître la correction de l'instrument, il faut encore y employer celle du haussement du niveau apparent pardessus le vrai, comme elle est posée dans la Table que nous avons donnée ci-dessus.

## E X E M P L E.

On propose une distance de 300 toises , pour laquelle on sçait que l'instrument baisse de trois pouces à l'égard du niveau apparent , ce qui demanderoit que le point de visée fût haussé de trois pouces : mais parce que dans la Table nous trouvons que le niveau apparent à la distance de 300 toises s'éleve d'un pouce par-dessus le vrai , il faut donc rabattre un pouce de trois pouces , qu'il falloit ajouter pour la correction de l'instrument ; & l'on conclura que le vrai niveau doit être deux pouces plus haut que le point de visée.

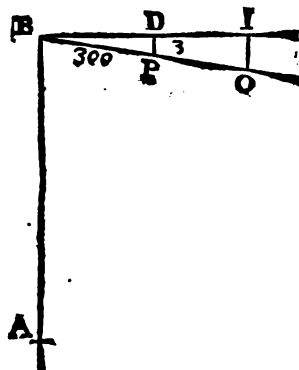
Mais si au contraire l'instrument avoit haussé de trois pouces pour la même distance de 300 toises , le vrai niveau seroit à quatre pouces au-dessous du point de visée ; car il faudroit encore baisser d'un pouce pour le haussement du niveau apparent par-dessus le vrai.

Nous n'exposons pas ici tous les cas qui peuvent arriver ; parce qu'il sera toujours facile de sçavoir ce qu'il y aura à faire , en considérant la chose de la manière que nous avons fait , & comme si l'on devoit premièrement rétablir le niveau apparent , & ensuite en rabattre le haussement de l'apparent par-dessus le vrai.

Nous avons expliqué ci-devant que les haussèmens du niveau apparent par-dessus le vrai , sont en raison des quarrés des distances : mais la correction qu'il faut faire pour l'erreur de l'instrument croît ou décroît seulement dans la raison des mêmes distances , ce qui est facile à connoître par cette figure suivante.

B est la station où l'on fait l'observation ; BA la ligne qui tend au centre de la Terre ; BO la ligne de visée ; & BDI la ligne du niveau apparent , qui est perpendiculaire à BA. Posons maintenant , que pour une distance de

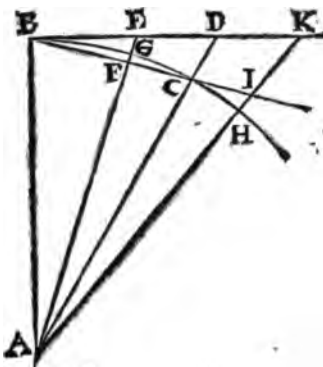
300 toises, qui est  $BP$ , nous sçachions, que  $PD$ , qui est l'erreur de l'instrument, qui ne marque pas le niveau apparent, soit de trois pouces; il est évident, par exemple, que pour la distance  $PO$  supposée de 600 toises, la correction  $OI$  sera de six pouces; car  $OI$  étant menée parallèle à  $PD$ , les triangles  $BP-D$ ,  $BOI$  sont semblables; c'est pourquoi, par la quatrième Proposition du sixième Livre d'Euclide,  $BP$  sera à  $PD$ , comme  $BO$  à  $OI$ ; ce qu'il falloit démontrer.



Il ne faut pas s'imaginer qu'un instrument baissant la mire & demeurant dans un même état, puisse récompenser justement le haussement du niveau apparent à toutes sortes de distances; comme par exemple:

Le haussement du niveau apparent étant d'un pouce 300 toises de distance, un instrument qui baissera d'un pouce pour 300 toises, donnera le vrai niveau à cette distance; car le haussement de l'un, récompensera le baisssement de l'autre; mais plus près il baissera trop, & plus loin il ne baissera pas assez, comme on verra en se donnant la peine d'en faire le calcul, ce que l'on peut aussi connoître par la figure suivante.

$A$  est le centre de la Terre;  $BGCH$  le vrai niveau, qui est sur sa circonférence;  $BK$  le niveau apparent;  $BI$  une ligne droite inclinée, qui représente la ligne de visée, & qui coupe nécessairement la circonférence du cercle de la Terre en quel-



que point, comme C, qui est le seul de niveau avec B ; & tous les autres, comme F, I, seront plus bas ou plus hauts.

Il est même facile de déterminer à quelle distance précise, un instrument qui baisse la mire donnera le vrai niveau, pourvû qu'on en connoisse l'erreur pour quelque distance donnée, c'est-à-dire, de combien il s'écarte du niveau apparent pour une distance donnée : car ayant pris dans la Table ci-dessus le haussement dû à la distance donnée, pour laquelle vous sçavez l'erreur de l'instrument, il faut faire une règle de proportion, ou de trois, comme on l'appelle ordinairement, en posant

*I. Terme.* Comme le haussement trouvé dans la Table pour la distance donnée est à

*II. Terme.* L'erreur de l'instrument pour cette même distance ; ainsi

*III. Terme.* La distance donnée est à

*IV. Terme requis.* Celle à laquelle l'instrument déterminera le vrai niveau.

#### E X E M P L E.

Je sçai qu'un instrument baisse la mire à raison de de deux pouces sur 300 toises de distance pour laquelle le haussement du niveau apparent est d'un pouce seulement, comme on voit dans la Table ; & je veux sçavoir à quelle distance cet instrument tel qu'il est donnera le vrai niveau. Pour cet effet je dis :

Comme un pouce de haussement

Est à deux pouces d'erreur,

Ainsi 300 toises de distance

Sont à 600 toises de distance requises,

qui est la distance où le défaut de l'instrument récompense le haussement du niveau apparent, l'un & l'autre étans de quatre pouces dans cet exemple.

La règle ci-dessus est fondée sur ce que nous avons déjà dit, que l'erreur d'un instrument croît ou décroît en raison des distances : mais les haussmens du niveau apparent suivent la raison doublée des mêmes distances, qui est aussi celle de leurs quarez.

Nous avons démontré ci-dessus que cette dernière supposition touchant les haussmens du niveau apparent n'étoit pas vraie dans la rigueur de la Geometrie ; mais que dans la pratique cela ne devoit être d'aucune considération : On en doit autant dire à l'égard de l'autre supposition, qui est touchant les erreurs de l'instrument : car les lignes EF, CD, IK n'étant pas paralleles entr'elles, si on suppose qu'elles tendent au centre de la Terre, A, ne sont pas non plus en raison des distances BE, BD, BK : mais à cause de la petitesse des angles qu'elles font au centre de la Terre, il s'en faut si peu, que cela ne merite pas d'être considéré dans la pratique.

*Démonstration de la Règle précédente.*

Supposant donc dans la figure précédente que les lignes FE, CD soient paralleles entr'elles, & que la distance BF étant proposée avec la ligne FE, qui est l'erreur dont l'instrument, ou bien la ligne de visée, baisse au-dessous du niveau apparent BK pour cette distance, il faille trouver la distance BC où la ligne de visée BI coupe la circonférence de la Terre, c'est-à-dire trouver la distance BC en sorte que le point C soit de niveau avec le point B.

Pour la distance BF ou BG, que nous supposons égale, la ligne GE, qui est la difference entre le vrai niveau & l'apparent, sera connue par la Table précédente : mais les haussmens du niveau apparent par-dessus le vrai, sont entr'eux comme les quarez des distances, suivant la

M m m m. iij.

démonstration qui en a été faite ci-devant ; c'est pour-  
 quoi GE sera à CD , qui sont ces mêmes haussmens ,  
 comme les quarez des distances BG ou BF à BC : mais  
 comme BF à BC , ainsi FE à CD , à cause que FE & CD  
 étant parallèles , font les triangles semblables BFE , B-  
 CD ; donc aussi en raison inverse CD sera à GE , comme  
 le quarré de CD au quarré de FE , & par les Corollaires  
 de la dix-neuvième Proposition du sixième Livre , les li-  
 gnes CD , FE , GE seront en proportion continuë ; donc  
 FE sera à GE , comme CD à FE , ou comme BC à BF ;  
 & par inversion de raison GE sera à FE , comme BF à  
 BC , ce qu'il falloit démontrer ; car GE est le haussemment  
 du niveau apparent par dessus le vrai pour la distance BG  
 ou BF proposée , FE est l'erreur de l'instrument pour  
 cette même distance , BF est la distance proposée , &  
 enfin BC est la distance que l'on cherche.

Enfin , si l'on suppose que l'on ait établi une ligne  
 droite comme CD , qui est celle du niveau apparent ; &  
 si l'on imagine que par ses deux extrémités il y ait deux  
 lignes qui lui soient perpendiculaires dans chacune des-  
 quelles on ait pris un point à volonté , il est évident par  
 ce qui a été démontré ci-dessus , que pour connoître si  
 ces deux points sont également éloignés du centre de la  
 Terre , ou de combien l'un est plus éloigné que l'autre ,  
 il suffira de les rapporter au vrai niveau ; & c'est dans  
 cette comparaison que consiste toute la science du ni-  
 velement.



## CHAPITRE II.

*De l'instrument appelle Niveau, & des moyens  
de le rectifier.*

**N**OUS avons déjà dit dans le commencement du Chapitre précédent, que toute la justesse de l'instrument dont on se sert pour niveller, tend à déterminer deux points, de telle sorte que la ligne droite menée de l'un à l'autre, soit perpendiculaire par l'une de ses extrémités à celle qui tend au centre de la Terre & qui est menée par ce même point, ou bien qui est dans l'horison apparent que l'on conçoit passer par cette même extrémité.

On a inventé jusques à present plusieurs de ces instrumens, que l'on appelle Niveaux, dont toute la justesse depend d'un plomb qui tient au bout d'un fil, & dont on suppose que le centre de gravité le tend vers le centre de la Terre; ou de quelque corps pesant suspendu d'une autre maniere, & qui fait le même effet du plomb, lequel dirige le Niveau; ou bien de quelques liqueurs dont la superficie represente une partie de l'horizon apparent ou sensible: mais enfin l'on est demeuré d'accord que celui dont nous allons parler le premier, est le plus juste de tous, puisque l'on ne laisse pas de s'en servir fort bien dans des rencontres où les autres sont presque inutilles: nous en avons déjà donné une description dans le Traité de la mesure de la Terre; & nous la repéterons encore ici en expliquant la figure qui le represente, où l'on remarquera seulement, que celle que nous lui avons donnée d'abord, representoit la lettre T: mais nous l'avons changée, & elle est à present en forme de Croix.

ce qui a été fait afin de donner plus de longueur au cheveu qui sert de perpendicule, & qui est attaché au haut de la Croix : en sorte que l'on peut voir plus commodément le point qui est au-bas de la Croix sur lequel doit battre le cheveu pour déterminer le niveau apparent.

Mais avant que de faire la description des Niveaux que nous proposons dans ce Traité, nous avons crû qu'il étoit à propos d'expliquer en particulier la construction de la lunette d'approche, qui y sert de pinule, & qui en fait la principale partie.

Cette lunette est composée de trois pieces, à sçavoir du verre objectif, des filets qui sont posez à son foyer, & du verre oculaire convexe dont le foyer est aussi à peu près à l'endroit où sont les filets.

L'on appelle le foyer d'un verre convexe l'endroit où tous les rayons qui viennent d'un point lumineux, ou coloré, qui est dans une distance fort éloignée, vont se rassembler après avoir passé au-delà du verre, c'est pourquoi la peinture des objets qui sont opposez au verre se représente très-distinctement dans cet endroit : c'est aussi ce que l'on peut voir par experience dans une chambre qui est bien fermée, & où il n'entre point de lumiere que par une petite ouverture, à laquelle on applique un verre convexe : car en mettant un papier blanc à l'opposite de ce verre au-dedans de la chambre, & à la distance de son foyer, on verra sur le papier une peinture très-nette, & très-distincte des objets qui sont opposez au verre par dehors ; on pourra trouver le foyer du verre, en approchant & reculant le papier tant que l'on voye la peinture bien nette & bien déterminée : on suppose que ce verre soit bon & bien fait, & qu'il ne soit pas trop découvert à proportion de la distance de son foyer.

Le papier blanc sur lequel se fait la peinture ne sert à autre chose, que pour arrêter les rayons colorez à la distance

france du foyer, dans le point ils se rassemblent, & en les renvoyant de tous côtez dans la chambre, on les apperçoit sur le papier comme si l'objet y étoit peint, & qu'il n'y fût point apporté d'ailleurs.

Si l'on n'opposoit point de papier à ces rayons, la peinture ne laisseroit pas toujours de se faire à l'endroit du foyer, quoique ceux qui seroient dans la chambre ne la pussent pas appercevoir: mais si l'on met un verre convexe au-delà du foyer de l'objectif, en sorte que le foyer de ce second verre, que nous appellons l'Oculaire, soit commun avec le foyer du premier, les rayons colorez, qui, après s'être rompus en tombant sur la superficie du verre objectif, se sont réunis à son foyer, continuent leur chemin en s'écartant, & rencontrant le verre oculaire se rompent derechef en passant au travers, & se dirigent de telle sorte, qu'en mettant l'œil derrière ce verre on apperçoit les objets dont la peinture se fait au foyer, de la même manière que s'ils étoient effectivement peints en cet endroit, & on les verra plus grands qu'avec la vûe simple, si le verre oculaire a plus de convexité que l'objectif, ce que l'on peut augmenter de beaucoup, suivant la position des convexitez de ces verres: mais en changeant la position de ce verre oculaire, si l'on demeure à peu près dans la même distance de l'objectif, on pourra voir differens objets, selon que differens rayons rencontreront l'oculaire. Enfin, si l'on tend un filet qui demeure immobile à l'endroit du foyer commun de l'objectif & de l'oculaire, ce filet passera sur la peinture de quelque objet, où on le verra toujours, quoique l'on change la position du verre oculaire & de l'œil: mais si l'on remuë le verre objectif, la peinture changera de place à son foyer, de même que si l'on touche au filet il ne rencontrera plus les mêmes endroits de la peinture: l'assemblage de ces deux verres compose la lunette d'approche, qui repre-

sente les objets dans une position renversée. Il est facile de voir par ce que nous venons d'expliquer, que si le verre objectif demeure toujours dans une même situation à l'égard du filet, comme on le peut faire dans le tuyau d'une lunette, pour peu que l'on remuë ce tuyau, la peinture qui se fait au foyer changera de place sur le filet, à moins que l'on ne remuë la lunette de telle sorte, que la ligne droite que l'on imagine aller d'un point du filet jusques à l'objet sur lequel il passe, & que l'on appelle le principal rayon de ce point de l'objet, ne demeure toujours dirigée vers le même endroit, ce qui est la même chose que si l'on concevoit que cette lunette fût prolongée jusques à l'objet, auquel point elle demeurât immobile, & qu'elle se remuât seulement par l'autre extrémité où est le filet; ou bien encore si le point où le principal rayon rencontre le verre objectif dans la première position, demeure toujours directement entre le même point de l'objet, & le filet qui passe par sa peinture dans toutes les autres positions.

Ce sont de ces sortes de lunettes que nous avons mises en pratique, & dont nous nous servons au lieu de pinules pour faire des observations, comme on peut voir plus au long dans le Traité de la mesure de la Terre.

L'on peut ajouter à cette lunette deux autres verres convexes au-delà de l'oculaire, afin qu'elle représente les objets dans leur situation naturelle; car celle qui n'a que deux verres convexes, les représente renversés, comme nous venons de dire; mais aussi l'on voit les objets bien plus clairement dans une lunette à deux verres, que dans une qui en a quatre. \*

\* Et il seroit à propos que ceux qui ont des Nivellemens à faire, & qui se servent de Lunettes au lieu de Pinules, n'y missent que deux verres convexes; car la vision plus claire qui en résulte, est très-nécessaire dans le Nivellement, où les rayons, suivant lesquels on voit les objets, étant fort près de terre dans toute leur longueur, ils souffrent déjà assez d'affoiblissement par cette raison. D'ailleurs il n'est pas difficile de s'accoutumer à voir les objets renversés.

Ce que nous venons d'expliquer touchant la construction des lunettes d'approche, n'est que par rapport à l'usage que l'on en fait dans les instrumens qui servent à observer, où l'on s'en sert au lieu de pinules; & nous ne prétendons pas y traiter à fonds cette matiere, qui demanderoit un Ouvrage entier de Dioptrique.

*Description du Niveau.*

La representation de cet instrument est de telle maniere, que l'on peut voir le dedans, comme si la partie qui se presente à la vûe étoit ôtée, ou bien comme si elle étoit de verre, & que l'on pût voir au travers.

EFGH est un tuyau quarré qui sert pour la lunette, lequel on fait de quelque matiere solide & ferme, comme fer ou leton assez fort, enforte qu'elle ne puisse pas être facilement corrompue.

EF est un petit chassis qui porte le verre avec objectif.

GH est un autre chassis qui porte deux filets de ver à foye très-déliés, & tels qu'ils sont sur la coque même du ver à foye, qui s'entrecoupent au foyer de l'objectif.

Le verre objectif & ces filets ainsi attachez ensemble dans ce tuyau, servent de pinules pour le Niveau.

Le petit tuyau D est celui qui contient le verre oculaire que l'on peut enfoncer ou retirer, suivant la disposition de la vûe de celui qui observe, sans que pour cela il arrive aucun changement à la disposition du verre objectif & des filets, comme on a remarqué ci-devant dans l'explication de la construction des lunettes.

La lunette est fortement attachée à angles droits avec le tuyau IK, enforte que l'on ne peut pas remuer l'un sans l'autre.

L & M sont deux arcboutans courbez, qui servent à entretenir la lunette avec le tuyau IK, & pour incliner

le niveau d'un côté ou d'autre lorsqu'il est sur son pied.

AC est un cheveu qui est suspendu du point A par une boucle que l'on fait à son extrémité, & cette boucle est passée sur une aiguille qui est appuyée par sa pointe contre une piece de léton, qui s'élève du fond de la boîte ou tuyau, afin que le cheveu soit en liberté de se mouvoir : cette piece avec l'aiguille est représentée en particulier dans la figure 2<sup>e</sup>.

Au bout du cheveu pend un plomb C, que l'on fait d'une grosseur suffisante pour tenir le cheveu bien tendu sans qu'il puisse se rompre.

B est une petite platine d'argent enchassée à fleur sur une piece de léton, qui est autant élevée sur le fond de la boîte, que celle qui porte le centre au point A : au milieu de cette platine il y un point, qui sert pour déterminer le niveau apparent, comme nous dirons dans la suite pour la vérification du niveau. Du point A pour centre d'où le cheveu est suspendu, on décrit un arc de cercle qui passe par le centre de la platine B, & l'on y marque d'un côté & d'autre de petites divisions égales qui y déterminent les minutes de degré, s'il est possible; ce qui peut servir à montrer de combien de minutes un objet est plus ou moins élevé que le niveau apparent : cela se doit seulement entendre jusqu'au nombre des minutes qui sont marquées sur la piece de léton.

Le verre objectif doit être arrêté sur le chassis EF, & ce chassis doit être immobile dans la boîte ou tuyau de la lunette.

Le chassis GH qui porte les filets doit être aussi bien attaché au corps de la même boîte : quelquefois pourtant on fait un double chassis qui porte les filets, & qui glisse fort justement dans une coulisse qui est au premier chassis, & l'on attache un ressort dans la partie inférieure de ce premier chassis, qui pousse en haut le second

chassis qui porte les filets, lequel on repousse autant que l'on veut vers le bas par le moyen d'une vis, qui perce la boîte de la lunette dans la partie supérieure où est l'é-crou, & qui force le ressort qui le soutient par-dessous, comme la figure 3<sup>e</sup> le fait voir.

La queue N est une verge de fer rigide & assez forte pour ne pas plier; elle est attachée au long de la boîte du perpendicule, en sorte qu'elle peut seulement monter & descendre, & en tombant jusqu'à terre, elle sert pour arrêter le niveau dans l'inclination où l'on veut le mettre.

Le pied sur lequel on pose cet instrument, est un chevalet comme les Peintres s'en servent pour soutenir leurs tableaux; on appuie seulement le niveau par les arc-boutans sur les chevilles du chevalet, en sorte qu'il peut se mouvoir sur ces chevilles, & s'incliner d'un côté ou d'autre.

On peut ajouter à chaque pied du chevalet, un faux pied de fer en forme de verrouil qui coule dans ses crampons au long du pied de bois, & que l'on peut arrêter à la longueur que l'on veut par le moyen d'une vis, comme la figure le montre assez clairement; ce qui est d'une grande utilité pour allonger les pieds du chevalet dans les lieux raboteux & inégaux.

On ne détermine point la grandeur de cet instrument: mais on doit seulement remarquer que plus il sera grand, plus on observera avec justesse: ceux dont nous nous servons ordinairement, ont la lunette de trois pieds de longueur, & le perpendicule de quatre pieds.

Quoique le tuyau du perpendicule ait communication avec le tuyau de la lunette, & que son filet ou cheveu passe au travers, cela n'y apporte pourtant aucun changement, étant imperceptible, à cause qu'il est trop délié.

*De la rectification, ou vérification du Niveau.*

La maniere la plus indépendante pour rectifier le Niveau dont nous venons de faire la démonstration, est de se servir du renversement, comme nous avons expliqué pour les quarts de cercle dans le Traité de la mesure de la Terre\* : mais celle qui suit, paroît assez expeditive & commode pour être préférée à toute autre.

Aux deux extrémités d'une distance connue on fait deux marques à terre, qui pour la commodité de l'opération, ne doivent pas être beaucoup éloignées du vrai niveau, & dont la distance doit être au moins de 300, ou 400 toises. Ce qui étant supposé, on met l'instrument à l'une des marques, & l'on pointe la lunette vers l'autre, en faisant marquer exactement à quelle hauteur vise la croix des filets qui sont au foyer, le filet du perpendicule donnant sur le centre de la petite platine d'argent, qui est au bas de l'instrument; on en fait de même & réciproquement à l'autre station, en remarquant aussi exactement à chaque station la hauteur de la croix des filets par-dessus la marque où l'on observe, ce que nous appellons la hauteur de l'œil.

*Premier Cas.*

Si les deux hauteurs des points de visée jointes ensemble surpassent les deux hauteurs de la croisée des filets, jointes ensemble du double du haussement du niveau apparent qui convient à la distance des stations,

\* La meilleure maniere de rectifier ce Niveau étant le renversement, nous avons crû devoir en ajouter ici la pratique, d'autant plus que le Livre de la mesure de la Terre de M. Picard, auquel il semble renvoyer son Lecteur, ne se trouve plus. Cette pratique est insérée à la fin de ce Chapitre II. ce qu'on a fait pour ne point troubler l'ordre de ce Livre.

conformément à la Table que nous avons donnée ci-devant dans le premier Chapitre, l'instrument sera juste, & marquera le niveau apparent; c'est-à-dire, que le filet du perpendicule, qui bat sur le centre de la petite platine d'argent, fait un angle droit avec le principal rayon de l'objet qui est caché ou marqué par la croix, ou intersection des filets de ver à soye posez au foyer de la lunette.

## E X E M P L E.

La distance entre les lieux de l'observation ayant été posée de 300 toises, on trouve dans la Table que le haussément du niveau apparent par-dessus le vrai, est d'un pouce pour cette distance; & si la somme des hauteurs des points de visée surpasse de deux pouces celle des hauteurs de l'œil, ou de la croisée des filets qui sont proches de l'oculaire, ce sera une preuve de la justesse de l'instrument.

*Deuxième Cas.*

Mais si la somme des hauteurs des points de visée, surpasse la somme des hauteurs de l'œil ou de la croix des filets de plus du double du haussément du niveau apparent par-dessus le vrai, l'instrument haussera la mire au-dessus du niveau apparent de la moitié de ce qu'il y a de trop, c'est-à-dire, que l'angle fait du filet du perpendicule avec le principal rayon qui appartient à la croisée des filets du foyer, sera obtus. \*

Comme dans le même exemple précédent, si la somme des hauteurs des points de visée, est de trois pouces au lieu de deux pouces, qui est le double de ce que le ni-

\* Ou plutôt, que les angles formez par le filet du perpendicule & par le principal rayon qui appartient à la croisée des filets du foyer, sont obliques, aigus & obtus.

veau apparent doit être élevé par-dessus le vrai à la distance de 300 toises, il y aura un pouce de trop d'élévation; c'est pourquoi, nous concluons que l'instrument hausse la mire, ou vise trop haut de la moitié de cet excès, qui est un demi-pouce à la distance de 300 toises.

*Troisième Cas.*

Enfin, si la somme des hauteurs des points de visée, est moindre que celle des hauteurs de l'œil, ou de la croix des filets, à laquelle on a ajouté le double du haussement du niveau apparent par-dessus le vrai, la moitié de ce qu'elle sera moindre que l'autre, sera l'erreur de l'instrument pour la distance proposée qui baissera la mire au-dessus du niveau apparent.

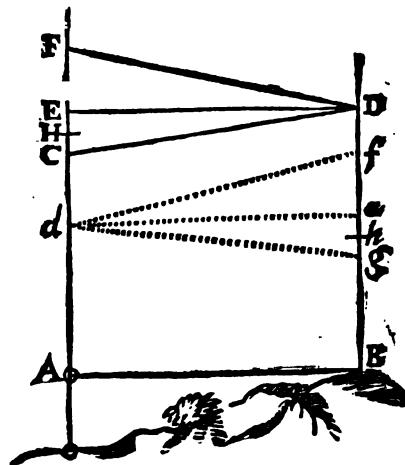
Comme dans le même exemple que nous avons apporté ci-devant, si la somme des hauteurs des points de visée, est moindre d'un pouce que la somme des hauteurs de l'œil augmentée de deux pouces, qui est le double du haussement du niveau apparent par-dessus le vrai à la distance de 300 toises, l'instrument donnera trop bas de la moitié de cette différence qui sera un demi-pouce; de même que si la somme des hauteurs des points de visée, étoit moindre de deux pouces, que celle des hauteurs de l'œil, augmentée de deux pouces pour le double du haussement du niveau apparent par-dessus le vrai, ce qui est la même chose, que si la première somme étoit égale à la seconde sans être augmentée, l'instrument donneroit trop bas d'un pouce; & ainsi du reste.

*Démonstration des Règles précédentes.*

La démonstration de ces règles est facile à comprendre, si nous supposons d'abord que les deux points A

&

& B que l'on a marqué à terre, soient dans le vrai niveau, c'est-à-dire, également éloignés du centre de la Terre: car premierement, l'instrument étant à la marque B, & le filet du perpendicule battant sur le centre de la petite platine d'argent, si le point de visée E de la ligne du nivellement ED, qui est aussi le principal rayon qui vient de l'objet E à la croisée des filets du foyer de la lunette en D, est élevé au-dessus de l'autre marque A de la hauteur AE



plus grande que BD, qui est la hauteur de l'œil ou de la croisée des filets, de la quantité de la ligne HE, & que cette grandeur HE soit le haussement du niveau apparent par-dessus le vrai, qui convient à la distance AB; il est évident par ce qui a été démontré au premier Chapitre, que la ligne du nivellement ED fera avec le filet du perpendicule posé au point D, un angle droit EDB.

Et de même dans l'opération réciproque, l'instrument étant en A, la ligne du nivellement *de* donnera le point de visée *e*, en sorte que B *e* sera plus grande que A *d*, de la quantité de la ligne *eh*, égale à EH, & l'angle *eda* sera aussi droit.

D'où l'on voit que dans ce premier cas la somme des deux hauteurs des points de visée AE, B *e* est plus grande que la somme des deux hauteurs de l'œil BD, A *d*, de la valeur des deux hauteurs EH, *eh*, égales entr'elles, & chacune égale au haussement du niveau apparent par-dessus le vrai pour la distance AB.

Secondement, si l'œil étant en D, la ligne du nivellement DF donne AF plus grande que BD, ou que AH posée égale à BD, de la grandeur HF plus grande que HE, qui est le haussément du niveau apparent par-dessus le vrai pour la distance AB, il est évident que ce rayon FD fera avec le perpendicule DB un angle obtus FDB, puisque EDB doit être droit, comme nous avons dit ci-devant dans le premier cas, & que l'instrument étant en B & l'œil au point D, haussera la mire ou donnera le point de visée F, qui sera élevé par-dessus le point de visée E du niveau apparent, de la grandeur EF. Ce sera aussi la même chose dans l'opération réciproque, l'instrument étant en A & l'œil en *d*; car le point de visée sera au point *f*, & l'angle *f d A* sera obtus, & égal à l'angle FDB, & la ligne *f e*, qui est le haussément du point de visée *f* par-dessus le point de visée du niveau apparent en *e* sera égale à FE dans l'autre opération; d'où s'ensuit, que AF & B*f* jointes ensemble, qui sont les hauteurs des points de visée F & *f*, seront plus grandes que les hauteurs de l'œil, ou de la croisée des filets, qui sont BD, & A*d* jointes ensemble, ou bien de leurs égales AH & B*b*, augmentée de EH & *e b*, qui sont chacune le haussément du niveau apparent par-dessus le vrai pour la distance AB, des grandeurs EF & *e f* jointes ensemble, ce qui est le double de ce que l'instrument élève la mire, ou donne trop haut au-dessus du niveau apparent à la distance de AB; car les points *d* & *b* seront dans le vrai niveau aussi bien que les points D & H.

Troisièmement, si la ligne du nivellement donne le point de visée en G, l'œil ou la croisée des filets étant en D, & que AG soit plus petite que AH ou BD son égale à laquelle on a ajouté HE, qui est le haussément du niveau apparent par-dessus le vrai à la distance de AB, il est évident parce qu'il a été démontré dans le premier Chapitre,

& par ce que nous avons dit ci-devant que l'angle GDB sera aigu, & que l'instrument baissera la mire, ou donnera trop bas de la grandeur de GE, & de même dans le nivellement réciproque: d'où l'on connoît, que dans ce troisième cas, les hauteurs des points de visée AG, Bg jointes ensemble sont plus petites, que les hauteurs de l'œil BD, A d, ou leurs égales AH, B h prises ensemble & chacune augmentée des grandeurs HE, h e, qui sont les haussmens du niveau apparent par-dessus le vrai pour la distance de AB, lesquelles ensemble font les hauteurs du niveau apparent AE, B e, & elles sont plus petites des grandeurs GE, g e égales entr'elles & prises ensemble.

Voilà donc ce qu'il falloit démontrer à l'égard des points A & B pris à terre & que l'on a supposé dans le vrai niveau, c'est-à-dire, également éloignez du centre de la terre; mais si les points B & a marquez à terre, ne sont pas dans le vrai niveau, & que a soit plus bas que B de la quantité a A; la même démonstration ne laissera pas de subsister, car dans chaque somme des hauteurs des points de visée, & des hauteurs de l'œil dans les nivellemens réciproques, la grandeur a A y sera employée, laquelle se détruira mutuellement de chaque côté, & il ne restera que les mêmes grandeurs que nous avons posées pour les trois cas de cette démonstration, ce qui est si facile à entendre que cela ne merite pas une plus grande explication.

*Pour corriger le Niveau & lui faire marquer le Niveau apparent.*

Il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer, que le niveau étant posé à l'une des deux stations marquées contre terre, s'il ne donne pas le point de visée dans le niveau apparent, il sera facile de le corriger; car on

connoîtra par ces nivellement réciproques de combien il hausse, ou baisse la mire, & l'on déterminera le point où il devrait donner pour être dans le niveau apparent : alors ayant haussé ou baissé l'instrument tant qu'il faudra pour voir cette marque dans la croisée des filets, on observera avec grand soin, sur laquelle des divisions qui sont sur la petite platine ou à côté, le cheveu ou filet du perpendicule donnera, afin de l'y pouvoir remettre toutes les fois que l'on observera pour déterminer le niveau apparent. \*

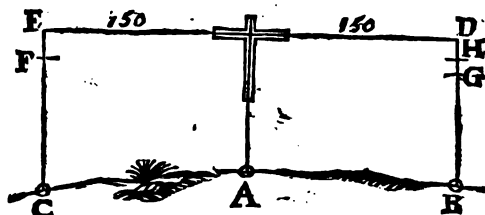
Mais si l'on veut que le centre de la petite platine d'argent détermine le niveau apparent, il faudra hausser ou baisser, le faux chassis, qui porte les filets, par le moyen de la vis qui est au-dessus de la boîte & qui repousse le ressort en bas, comme nous avons dit dans la description, en sorte que la croisée des filets de foyer de la lunette donne sur l'objet que l'on a déterminé pour être le niveau apparent, en observant toujours que le filet du perpendicule donne très-exactement sur le centre de la platine d'argent qui est au bas du niveau ; où l'on doit encore remarquer, que si l'on élevoit, ou baïssoit considérablement les filets du foyer, il faudroit aussi élever ou hausser autant la marque à laquelle on vise, car la hauteur de cette marque n'auroit pas été faite pour la hauteur des filets que l'on a changez de place, mais comme ils étoient auparavant. Ce sera toujours le plus commode d'ajuster ainsi les niveaux, afin que l'on ait un

\* Si l'on ne veut pas corriger l'erreur de l'Instrument par la Méthode enseignée dans l'Article suivant, il vaut mieux, dans les Nivellemens que l'on fera, tenir compte de l'erreur, en laissant le filet du perpendicule, battre toujours sur le centre de la platine ; ce que l'on juge bien mieux que s'il battoit sur quelque division à droite ou à gauche, ou même entre quelqu'un de ces divisions. Il est encore souvent plus commode & plus sûr de laisser l'instrument dans le même état & tenir compte de son erreur, que de lui faire marquer le Niveau apparent en haussant ou en baissant les filets du foyer de la lunette. Il faut en ce cas, faire attention que l'erreur de l'Instrument que l'on connoît pour une certaine distance, augmente & diminue à proportion des distances mêmes.

point remarquable où doit passer le filet, comme le centre de cette petite platine ou clou, lorsque les filets marquent le niveau apparent; car sans cela on est souvent obligé de remarquer que pour le niveau apparent il faut que le filet du perpendicule donne au tiers, ou au quart, par exemple entre deux divisions, dont il faut exactement remarquer le nombre depuis le centre de la platine.

*Autre maniere pour la vérification du Niveau.*

Ayant choisi un lieu uni, & de 300 toises de longueur ou environ, comme CB; on posera le niveau au milieu A de cette distance, en sorte que AC & CB seront égales entr'elles, & de 150 toises chacune, si la distance CB est de 300 toises: ensuite



on pointera le niveau vers chacun des deux points C, & B, que l'on considérera comme deux stations sur lesquelles on marquera la hauteur des points de visée D & E, le niveau demeurant à même hauteur dans chaque opération. Par ce qui a été démontré dans le premier Chapitre, les points D & E sont dans le vrai niveau, quel qu'angle que la ligne de visée fasse avec celle du perpendicule.

Maintenant si l'on transporte le niveau à l'une des extrémités, comme au point C, on connoît de combien la croisée des filets de la lunette est plus haute ou plus basse, que le point de visée E, & marquant l'extrémité B, un point, qui soit autant élevé, ou abaissé au-dessus, ou au-dessous du point de visée D, que la croisée des filets. l'est au-dessus, ou au-dessous du point de visée E, on au-

ra le vrai niveau correspondant à la croisée des filets, l'instrument étant posé en C, mais le niveau apparent doit être plus élevé que le vrai, & pour 300 toises on trouve dans la Table un pouce de haussement; on fera donc une marque à un pouce au-dessus de celle que l'on a marquée la dernière, qui détermineroit le vrai niveau, & l'on aura le point auquel doit être pointé le niveau, pour être corrigé & rectifié.

## E X E M P L E.

Si CE est de quatre pieds dix pouces, & BD de cinq pieds un pouce & la croisée des filets de lunette du niveau étant posé en C soit de quatre pieds six pouces, comme au point F, qui par conséquent sera au-dessous de E de quatre pouces. Si l'on prend donc le point G au-dessous de D de quatre pouces, il est évident que les points F & G seront dans le vrai niveau; mais pour 300 toises le niveau apparent est élevé par-dessus le vrai d'un pouce, c'est pourquoi l'on marquera le point H un pouce plus haut que G: ce point H sera donc le point de visée où le niveau doit pointer lorsqu'il est posé en C, & que la hauteur de l'œil, ou de la croisée des filets de la lunette est posée au point F, pour marquer le niveau apparent, & pour être rectifié.

On changera donc les filets de la lunette tant qu'elle pointe à cette marque désignée, le perpendicule demeurant toujours au centre de la platine ou clou d'argent; ou bien on remarquera exactement l'endroit de sa division où le cheveu du perpendicule est arrêté, lorsque l'instrument marque le niveau apparent par le point de visée H, afin de le pouvoir remettre dans la même position toutes les fois que l'on observera.

Si les distances AC & AB étoient chacun plus gran-

des, ou moindres que 150 toises, il faudroit avoir égard au haussement du niveau apparent par dessus le vrai, lequel conviendrait au double de cette distance, qui est CB, pour marquer le point H où doit pointer la ligne de visée.

Cette maniere de rectifier le niveau, est à ce qu'il me semble, la plus simple, & la plus commode de toutes pour la pratique.

*Avertissement.*

Il est d'une très-grande importance, non seulement dans les opérations que l'on fait pour la correction du niveau, mais aussi dans tous les nivellemens, que le cheveu du perpendicule ne se tienne pas trop collé sur la lame de l'éton, qui soutient la platine ou le clou d'argent, & qu'il n'en soit pas aussi trop éloigné; mais que l'affleurant librement, il batte légèrement sur ce point, ce qui étant bien exécuté, & la longueur du perpendicule étant d'environ quatre pieds, on pourra répondre de deux pouces sur une distance de 1000 toises, laquelle demande 12 pouces de correction pour le haussement du niveau apparent par dessus le vrai; d'où l'on peut juger de quelle utilité sont les pinules à lunette dans ces sortes d'instrumens. \*

Enfin, pour ne rien omettre de ce qui peut être utile à l'Observateur, on l'avertit encore ici, que le jalon ou bâton dont on se sert pour tenir la marque ou carton à la hauteur du point de visée, est composé de trois ou quatre bâtons chacun de six pieds de longs, qui peuvent

\* Il faut encore avoir un très-grand soin, dans les Nivellemens que l'on fait, de prendre les Stations dans des endroits où le Terrain est ferme: le contraire n'arrive que trop souvent, ce qui fait qu'on a toutes les peines du monde à caller exactement le Niveau, & que l'on n'est jamais sûr de la position du filet du perpendicule, qui sur un Terrain peu ferme, change suivant les différentes situations de celui qui opère, ce qui peut causer de très-grandes erreurs.

s'assembler l'un au bout de l'autre suivant les hauteurs des nivellemens qu'on veut faire; mais il y en a qui est divisé par pouces dans toute sa longueur, & dont chaque pied a une marque particuliere pour le distinguer des pouces: celui qui est ainsi divisé, pose toujours à terre, & on ne l'assemble point avec les autres qui portent le carton à leur extrémité; en sorte que l'on peut les élever au long de celui qui est divisé, & connoître facilement de combien ils sont élevez au-dessus de la marque qui est à terre.

Pour la marque ou carton qui sert de point de visée, & que l'on met au bout de l'un des bâtons, il suffit de prendre deux cartes à joier que l'on coud l'une sur l'autre, en sorte que l'on peut les enfiler dans le bout des bâtons; on en fait une noire, & on laisse l'autre blanche, ce qui est d'une grande commodité pour l'appercevoir de loin, suivant les différens objets contre lesquels elle paroît: par exemple, la carte blanche ne paroîtra pas bien clairement lorsqu'elle sera opposée au Ciel, à moins qu'elle ne soit éclairée du Soleil; au contraire la noire se verra fort bien; mais aussi la noire ne paroîtra pas si on la voit à l'opposite des arbres où la blanche paroîtra fort distinctement.

On doit avoir un soin particulier que les bâtons soient tenus bien droits & à plomb; & pour en être assuré, il faudra que celui qui les tient après les avoir mis à la hauteur qu'on lui aura marquée, ne les abaisse point qu'après les avoir ébranlez plusieurs fois en divers sens, pendant que celui qui est à l'instrument prendra garde si dans ce mouvement le bord d'en-haut de la carte, dont on se sert de point de visée\*, ne paroîtra point plus haut que la croisée des filets de la lunette.

\* Si l'on prend le bord de la carte pour point de visée, il ne sera pas visible à une distance même médiocre. J'aimerois mieux pour marque, une circonférence large d'un pouce & noire, & qui laisseroit autour de son centre, un cercle blanc, d'un pouce au moins de diamètre: le tout sur un fond blanc.

Il arrive souvent que la distance entre les stations que l'on nivelle, est si grande, que l'on ne peut pas s'entendre aisément; c'est pourquoi il faudra convenir de quelques signes que l'on pourra faire avec le chapeau, soit pour faire hausser ou baisser la carte, soit pour la faire tourner du blanc au noir, ou au contraire, soit enfin pour faire sçavoir que tout est bien, & que l'opération est achevée.

*DESCRIPTION D'UN AUTRE NIVEAU;  
de l'invention de M. Huguens de l'Academie Royale  
des Sciences.*

**L**A principale partie de cet instrument est une lunette d'approche A B, d'un ou de deux pieds ou davantage, selon qu'on veut qu'elle fasse plus d'effet. Elle est de deux ou de quatre verres convexes, à la maniere ordinaire & assez connue, les deux faisant voir les objets renversez, & les quatre les remettant droits. Son tuyau est de léton ou autre métal, de forme cylindrique, & passe dans une virole C, qui l'enferme par le milieu où elle est soudée.

Cette virole a deux branches plates pareilles D & E, l'une en-haut & l'autre en-bas, chacune d'environ le quart de la longueur de la lunette; de sorte que le tout fait une maniere de croix. Au bout de ces branches sont attachez des filets doubles, passez dans de petits anneaux, & puis ferrez entre des pincés. L'une des dents de ces pincés est attachée au bout de sa branche fixement, & l'autre l'est de maniere qu'elle se puisse ouvrir. Par l'un de ces anneaux on suspend la croix au crochet F, & par en-bas on attache à l'autre anneau, suivant ce qui sera dit, un poids qui égale environ la pesanteur de la croix, & qui est enfermé dans la boîte G, dont il ne sort

que son crochet. Ce qui reste d'espace dans cette boîte est rempli de quelque huile, comme de Noix ou de Lin, ou autre qui ne se fige point, par où les balancemens du poids & de la lunette, s'arrêtent promptement. Au dedans de la lunette il y a un fil de soye tendu horizontalement au foyer du verre objectif, soit qu'il y ait un ou trois oculaires. Ce fil se peut hauffer & baisser par le moyen d'une vis, que l'on tourne à travers le trou H, percé dans le tuyau de la lunette. La maniere d'ajuster ce fil sera expliquée ci-après. I est une virole fort légère, ne pesant que  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{1}{100}$  de la croix, qui s'arrête à tel endroit du tuyau de la lunette que l'on veut, & outre celle-ci, si la croix n'est pas bien près en équilibre, l'on met quelqu'autre virole en dedans de la lunette, d'un poids suffisant pour faire cet équilibre, c'est-à-dire, que le tuyau de la lunette soit parallele à l'horizon, en quoi pourtant il n'est pas requis une fort grande justesse. Une croix de bois plate sert à suspendre la machine, ayant pour cela en haut le crochet F, & à l'un de ses bras la fourchette K, qui empêche le trop de mouvement lateral de la lunette, ne lui laissant qu'une demi-ligne de jeu. La boîte qui contient le plomb & l'huile, tient à la même croix, étant enfermée par les côtez & par le fonds. Et pour couvrir le niveau contre le vent, l'on applique contre la croix plate de bois, une croix creuse L, qu'on y attache avec deux ou trois crochets, de sorte que le tout fait alors une boîte entiere.

Pour ajuster ou rectifier ce niveau, on le suspend par l'une des deux branches, sans y attacher le plomb par en bas, & l'on vise à quelque objet éloigné; remarquant l'endroit où donne le fil horizontal, que l'on voit distinctement aussi-bien que l'objet. Puis on ajoute le plomb, l'accrochant dans l'anneau d'en-bas; & si alors le fil horizontal répond à la même marque de l'objet, l'on est

assuré que le centre de gravité de la croix est précisément dans la ligne droite qui joint les deux points de suspension ; sçavoir où les deux filets sont attachez aux branches, qui est la premiere préparation necessaire. Mais si cela ne se trouve point, on en vient à bout facilement par le moyen de la virole I, en observant que si la lunette baisse lorsque le poids est attaché, il faut avancer la virole vers le verre objectif, & la retirer au contraire si la lunette hausse après avoir attaché le poids. Cela est vrai, soit que la lunette soit à quatre ou seulement à deux verres convexes ; c'est-à-dire, soit qu'elle fasse voir les objets droits ou renversez.

L'ayant ainsi réduite à viser au même point sans plomb & avec le plomb, on la retourne sens-dessus-dessous, la suspendant par la branche qui étoit en-bas, & attachant le plomb par l'autre, parce qu'il fait arrêter plus vite le mouvement, & que d'ailleurs cela est avantageux pour ce qui reste à faire.

Que si alors le fil, qui est dans la lunette, donne au même point de l'objet que devant, l'on est assuré que ce point est précisément dans le plan horizontal du centre du tuyau de la lunette, comme l'on verra par la démonstration. Mais si le fil ne vise pas au même point on l'y réduira en le haussant ou baissant par le moyen de la vis qui est pour cela, en observant de le hausser s'il hausse, & de le baisser s'il baisse, & en renversant la lunette à chaque correction.

Après cela l'instrument sera parfaitement rectifié, sans qu'il importe (ce qui est fort considerable) que le verre objectif ni les oculaires soient bien centrez ni rangez exactement en ligne droite : & l'on s'en servira ensuite avec sûreté, pourvû qu'il n'y arrive point de changement ; car le fil horizontal marquera par-tout où l'on visera, l'endroit de l'objet qui est dans le plan horizontal.

du centre de la lunette. Mais quand il seroit arrivé quelque changement, on peut le sçavoir à chaque observation que l'on fait, en visant premierement avec le plomb attaché, puis sans le plomb, & puis en renversant la lunette. Et c'est en quoi consiste le principal avantage que ce niveau a par dessus les autres, parce qu'il empêche qu'on ne puisse être trompé en s'en servant.

Le pied pour supporter la machine est une plaque ronde de fer ou de léton, un peu concave, à laquelle sont attachés, en charniere, trois bâtons d'environ trois pieds & demi. La boîte posant sur cette plaque en trois points, se peut tourner du côté que l'on veut, & la concavité sphérique donne moyen de la dresser avec facilité jusqu'à ce que le plomb ait son mouvement libre dans sa boîte, ce que l'on voit à travers l'ouverture M, faite au couvercle de bois. La pesanteur de ce plomb sert à tenir la boîte ferme sur le pied. Mais on peut aisément l'assurer encore davantage, si l'on veut, en faisant un trou au milieu de la plaque creuse.

Au lieu d'enfermer dans la boîte G tout le poids, on peut y en mettre un tiers ou un quart seulement, & attacher le reste à la même queue de fer, mais hors de la boîte. L'on observera alors, premierement avec le seul poids léger qui pend dans la boîte : puis avec l'autre ajouté par dessus, & en ajustant le fil horizontal, on les y laissera tous deux. Par ce moyen les balancemens de la lunette s'arrêteront promptement à toutes les observations qu'on fait pour la rectification; au lieu que n'attachant point de poids du tout dans quelques-unes, ce mouvement cesse plus difficilement.

Le crochet F, auquel le niveau est suspendu, peut être simplement attaché à la croix plate de bois; mais ici il est représenté attaché à une virole qui se hausse & baisse par le moyen d'une vis qui tient à l'anneau par lequel on

porte la machine. L'avantage qui se trouve en cela, est qu'en la transportant, on peut relâcher les filets de la croix, en la faisant descendre jusques sur la fourchette K & sur le petit bras courbé R, & cela sans ouvrir l'étui de bois.

Pour empêcher que l'huile de la boîte G ne puisse se répandre lorsqu'on porte le niveau en voyage, l'on peut boucher le trou de cette boîte par le poids même qu'elle enferme. On fera pour cela que ce poids soit bien plat par dessus, & on l'attirera contre le couvercle de la boîte par le moyen d'une virole à écrouë S.

Le tuyau N représente en grand celui qui au-dedans de la lunette, porte le fil horizontal. Il contient un ressort OP, qui est attaché à la fourchette Q, à laquelle le fil de soye tient avec de la cire. Ce ressort tire la fourchette contre le morceau de léton T, dans lequel entre la vis qui répond au trou H de la lunette. Par lequel trou l'on peut aussi tourner un peu le tuyau N pour faire que le fil devienne exactement horizontal, dont on juge en regardant par la lunette.

---

*DESCRIPTION D'UN AUTRE NIVEAU,  
de l'invention de M. Romer de l'Academie Royale  
des Sciences.*

**L**A figure de la boîte est en forme d'équerre, comme elle est représentée par les lettres ABC.

La partie AB sert de tuyau de lunette, elle est ouverte vers l'extrémité B pour mettre le verre objectif, & à l'extrémité A est soudé & attaché un faux canon, qui porte celui de l'oculaire. La partie C de la boîte est plus grosse que le reste pour pouvoir contenir le plomb qui gouverne le niveau, & qui doit avoir un peu de jeu pour pouvoir faire quelques vibrations.

Au dedans du tuyau, à l'endroit marqué P, il y a un chassis qui porte un filet de ver à foye posé horizontalement.

Aux endroits marquez D aux deux côtez de la boëte par dedans, sont attachées deux pieces, comme la figure N en represente une, lesquelles servent à porter les pivots du plomb.

La seconde figure represente la maniere dont le plomb, avec ses pivots, sont attachez à la fourchette qui porte le second filet horizontal.

HH sont les pivots du plomb fait en forme de prisme, & tranchans pardeffous pour avoir moins de frottement.

IK est la branche de fer à laquelle le plomb est fermement attaché par le bas.

IL est une verge de fer, qui est attachée à la verge IK, au point I, enforte qu'elles ne peuvent se remuer l'une sans l'autre.

GG est la fourchette qui est attachée à l'extrémité de la verge IL.

M est un filet de ver à foye appliqué sur la fourchette, aux endroits GG, & placé horizontalement.

Il faut que la verge IL, soit de telle longueur, que le filet M soit posé le plus proche qu'il sera possible, du filet qui est dans le chassis P, enforte qu'on puisse les voir tous deux ensemble très-distinctement, comme s'il n'y en avoit qu'un seul.

Aux endroits marquez R, la boëte a deux trous taraudez, qui répondent à deux autres trous, qui sont faits dans la partie d'en-bas de la branche de fer à laquelle le plomb est attaché, mais ces trous sont un peu plus bas que ceux de la boëte; enforte que lorsqu'on fait entrer par les trous de la boëte deux vis pointuës, elles puissent élever les pivots de dessus leurs appuis, afin que dans le trans-

port de l'instrument ils ne puissent pas s'user & s'émousser. On peut faire ces trous aux deux autres côtez de la boîte si l'on veut.

*Maniere de se servir de ce Niveau, & de le rectifier.*

On ne se sert point ordinairement de pied pour soutenir ce niveau, on l'appuye seulement contre le coin d'une muraille, ou contre un arbre en le tenant ferme avec les deux mains, en sorte que le plomb soit en liberté de balancer sur ses pivots, & on élève doucement le tuyau de la lunette, tant que l'on voye le filet M de la fourchette G, joint avec le filet du chassis P, & l'objet représenté sur les filets, donne le point de visée.

On le peu rectifier comme on a fait le premier niveau, par le moyen de deux nivellemens réciproques, ou bien par le moyen de deux nivellemens faits d'une même station à deux points également éloignez d'un côté, & d'autre; car par ces opérations ayant déterminé un point de niveau apparent, à l'égard d'un autre point, on courbera doucement la verge IL, tant que les filets joints ensemble visent au point que l'on a déterminé, le niveau étant posé à l'autre point: mais lorsque la différence est trop grande, & qu'il faudroit par trop ployer la verge qui soutient la fourchette, il sera plus à propos de changer le filet de place.

Toute la justesse de ce niveau dépend de la suspension des pivots: mais comme il n'est pas possible de la faire aussi délicate qu'il seroit nécessaire pour avoir une grande justesse, on ne fait seulement la lunette à deux verres que d'un pied, ou 15 pouces de long, & la longueur du plomb de 8 ou 9 pouces. Ce niveau est fort bon pour niveller des points qui ne sont pas fort éloignez, & lorsqu'il est une fois rectifié, il n'est pas sujet à changer en le portant en voyage.

On a inventé plusieurs autres niveaux dont on auroit souhaité de donner ici les descriptions ; mais comme ils sont assez connus par celles que les Inventeurs même en ont publiées, & que d'ailleurs la plupart ne pourroient pas servir à des nivellemens un peu éloignez, qui est le principal dessein de cet Ouvrage, on a crû qu'il n'étoit pas à propos d'en parler.

**DESCRIPTION D'UN AUTRE NIVEAU ;**  
*mis en pratique par M. de la Hire de l'Academie*  
*Royale des Sciences.*

**C**E niveau tire toute sa justesse de la superficie de l'eau, que nous supposons également éloigné du centre de la Terre, & il ne consiste que dans la maniere de faire nager sur l'eau une lunette d'approche qui lui sert de pinules comme aux autres niveaux.

Dans la premiere figure ARC, BDT, sont deux vases quarrez de bois ou de fer blanc, larges de 4 pouces  $\frac{1}{2}$  environ, & hauts de huit pouces.

Le tuyau CD sert de communication à ces deux vases, afin que l'eau puisse passer aisément de l'un dans l'autre ; il doit avoir au moins un demi-pouce de diamètre, & de longueur environ deux pieds & demi.

Le tuyau AB est attaché au haut des deux vases quarrez & sert de tuyau de lunette.

Le vase ARC est percé en R, vis-à-vis le tuyau AB, pour attacher en cet endroit un faux canon qui porte celui du verre oculaire, que l'on peut éloigner ou approcher suivant la necessité.

L'autre vase TBD est aussi percé dans sa partie T, vis-à-vis le tuyau AB, pour faire l'ouverture de la lunette.

On attache un petit plomb au milieu du tuyau AB,  
 qui

qui en battant sur une marque faite au tuyau CD , fait voir quand les deux vases sont à peu près de niveau , pour y pouvoir mettre l'eau à même hauteur.

On doit mettre sur les deux vases une légère couverture , que l'on puisse ôter facilement ; elle sert pour empêcher la lumière de donner sur le verre objectif , & sur les filets , afin que la lunette fasse plus d'effet.

Il y a encore aux deux côtes de chaque vase deux petites lames de léton ou de fer blanc , dont nous ferons la description en parlant de leur l'usage.

La deuxième figure représente une des deux boîtes qui portent les pinules pour les faire nager sur l'eau ; elles doivent être faites de léton fort mince , pour pouvoir nager plus facilement , & ne s'enfoncer qu'autant qu'il sera nécessaire , par le moyen du poids que l'on enferme au dedans.

Le corps de ces boîtes est cylindrique , de deux pouces & demi de hauteur environ , qui doit être aussi la grandeur du diamètre de son cylindre ; il doit être bien fermé d'un couvercle par dessus , & au-dessous il y a un chapiteau d'un pouce de hauteur vers sa pointe E.

Le tuyau FG est soudé au-dessus de la boîte , il a de hauteur deux pouces , & de largeur un pouce ; la partie supérieure de ce tuyau est ouverte des deux côtes jusques à la hauteur d'un pouce , & dans chaque partie qui reste au-dedans de l'ouverture , on y attache une petite coulisse qui sert à porter le chassis de la pinule , qui ne doit y entrer que jusques à une certaine profondeur où il doit être arrêté.

LM est un fil de léton presqu'aussi long que la largeur du vase , & qui passe dans le milieu de ce tuyau un peu au-dessous de la pinule. Ce fil sert à entretenir la boîte & la pinule lorsqu'elle nage sur l'eau , en sorte qu'elle présente toujours son ouverture à celle du tuyau de la lunette

AB, il glisse entre deux petites aîles ou lames de fer blanc ou léton qui sont attachées aux deux côtez de chaque boîte, & qui sont aussi longues, & aussi proches l'une de l'autre qu'il est nécessaire pour empêcher que le fil de léton qui tient au tuyau FG, ne vacille par trop d'un côté & d'autre.

Il y a une ouverture au couvercle des boîtes au-dedans du tuyau FG pour y pouvoir mettre dedans une bale de plomb, ou un peu de mercure, ce qui empêche que les boîtes en flottant sur l'eau ne puissent pancher d'un côté ou d'autre, & la quantité du mercure, ou la bale de plomb doit être assez pesante pour faire enfoncer la boîte dans l'eau jusques à l'endroit du tuyau marqué IK, qui est demi-pouce environ au-dessus du couvercle de la boîte; on doit refermer ensuite la boîte avec une petite platine de léton fort mince que l'on attache bien tout autour avec de la cire molle.

Ces deux boîtes doivent être d'une figure fort égale dans toutes leurs parties, & lorsqu'elles sont chargées des pinules, & du plomb ou du mercure, elles doivent aussi peser également.

La troisième figure représente la pinule qui porte la croisée des filets.

La quatrième figure est celle qui porte le verre objectif.

Chacune de ces pinules est un petit châssis qui entre dans les coulisses qui sont aux deux côtez de la partie supérieure du tuyau FG.

On met dans les vases ARC, BDT, autant d'eau qu'il est nécessaire pour faire élever les boîtes qui portent les pinules, en sorte qu'elles répondent à l'ouverture du canon AB.

*Maniere de rectifier ce Niveau.*

On pourra rectifier ce niveau par l'une des deux manieres qui sont proposées ci-devant ; par exemple , en se servant de la seconde maniere , on marquera aux deux extrémités de la ligne que l'on a mesurée de 300 toises , les hauteurs des points de visée , l'instrument étant au milieu , & par ce moyen l'on déterminera l'endroit où l'instrument doit viser , lorsqu'il sera posé à l'une des deux extrémités de cette ligne ; & l'on pourra élever ou abaisser au long des coulisses l'un des deux châssis qui servent de pinules , ou bien en lever l'un , & baisser l'autre tant qu'il sera nécessaire pour viser au point déterminé ; & lorsqu'ils seront bien posés , on les pourra arrêter en cette situation , en mettant par-dessus & par-dessous de la cire blanche ou jaune un peu amollie.

Si la correction qu'il faut faire n'est pas considérable , il n'y aura qu'à abaisser ou un peu élever le filet horizontal qui est sur la pinule , & les laisser dans l'endroit où elles doivent être posées.

*Autre maniere de rectifier ce Niveau sans changer de station.*

Cette maniere de rectification demande que les pinules soient égales , tant dans leur hauteur & leur largeur , que dans leur pesanteur , afin de les pouvoir mettre dans les coulisses de haut en bas , & de les pouvoir changer d'une boîte à l'autre , sans que dans ce changement les boîtes sur lesquelles on les met enfoncent plus ou moins dans l'eau.

En donnant d'abord un coup de niveau , on remarquera exactement l'objet où vise la croisée des filets , & ayant

Qqqq ij

renversé le chassis qui porte le verre objectif dans sa coulisse, l'on observera si elle vise encore au même endroit où elle visoit auparavant le renversement : car si elle donne dans le même point, c'est une marque assurée que le centre de la double convexité du verre est dans le milieu de la hauteur de son chassis ; s'il n'y est pas, il faudra tourner le verre dans son chassis, ou bien l'y élever ou abaisser, tant qu'il s'y rencontre, en réitérant l'opération. Il faudra faire la même chose pour l'autre chassis ou pinule qui porte les filets ; car si l'objet représenté sur leur croisée s'y trouve dans la première & dans la seconde position renversé, il est évident que cette croisée sera au milieu de son chassis ; & si elle n'y est pas, on élèvera ou abaissera le filet horizontal tant qu'elle y soit placée.

Par ces deux opérations, on est assuré que la lunette est centrée de telle sorte, que la ligne qui va de la croisée des filets au milieu de la hauteur de la pinule du verre objectif, demeure toujours dans le même plan qui passe par le filet horizontal de la lunette, dans chaque position ; mais il faut connoître encore si ce plan est parallèle à la superficie de l'eau que nous posons être de niveau.

Ayant observé le point de visée où donne la lunette, on changera les chassis qui portent les pinules d'une boîte à l'autre, & par conséquent les boîtes seront aussi changées d'un vase dans l'autre : alors si la lunette donne encore le même point de visée qu'elle marquoit auparavant, le niveau sera entièrement rectifié ; mais si elle donne trop haut ou trop bas, il faudra élever ou abaisser l'endroit sur lequel les chassis portent, tant que la lunette vise au point, qui est au milieu des deux points de visée que l'on aura trouvez, ce que l'on pourra encore vérifier en répétant le changement des pinules, & des boîtes dans les vases par plusieurs fois.

On pourroit se servir d'un petit fil d'argent, dont on

prendroit la partie supérieure ou inférieure, pour déterminer les points de visée au lieu du filet de ver à soye, qui se pourroit relacher à cause de l'eau des vases qui en est fort proche.

Les boîtes qui portent les pinules ont été faites égales en figure & en pesanteur, afin qu'elles puissent s'élever ou s'abaisser également lorsque l'eau se condense ou se rarefie.

On doit remarquer que ce niveau détermine le niveau apparent à l'égard du point qui est au milieu des deux pinules, mais la croisée des filets en est si proche, que l'on peut prendre les mesures à ce point, comme s'il étoit entre les deux pinules, sans que cela puisse apporter aucune erreur sensible dans les hauteurs des nivellemens.

Ce niveau se peut transporter aisément, en conservant les boîtes & les pinules dans un étuy, sans qu'il soit besoin de le rectifier toutes les fois que l'on s'en servira, & même en le portant d'un lieu à un autre en nivellant; il ne faudra jamais laisser les pinules dans les vases où est l'eau, de crainte que dans l'ébranlement du chemin il n'entre quelque goutte d'eau dans les tuyaux qui portent les pinules, ce qui feroit que les boîtes entreroient davantage dans l'eau, étant alors plus pesantes.

On pourra donner à cet instrument quel pied on jugera le plus à propos, ou en le posant sur un petit banc pour l'élever un peu de terre, ou en l'attachant contre une planche & la posant sur le bas du chevalet, ou enfin en ajoutant trois ou quatre bouts de tuyaux à charnières aux deux boîtes pour y ficher des bâtons de quelle grandeur on voudra, qui lui serviront de pied, comme on fait ordinairement aux demi-cercles dont on se sert en campagne pour lever des plans.

*Méthode de rectifier le Niveau de M. Picard ;  
par le renversement.*

J'appelle simplement *centre*, le point en A d'où pend le cheveu du perpendicule, dans l'usage ordinaire du niveau ; & *centre de la platine*, le point vers C qui doit être à plomb avec le premier, & sur lequel doit battre le cheveu lorsque la lunette appliquée au Niveau, est dans une situation horizontale.

Ayant posé & bien callé le Niveau, tel que la figure le représente, faites en sorte que le cheveu batte exactement sur le centre de la platine, & qu'il y ait en même tems un objet remarquable & assez éloigné, dans l'intersection des filets de la lunette. Cette position du niveau & du rayon visuel étant bien assuré, ôtez le plomb & le cheveu du perpendicule, & renversez le niveau sur son chevalet, en sorte que le centre se trouve vers le bas, & le centre de la platine vers le haut ; ce qui se pourra faire fort aisément : il faut avoir attention seulement que la hauteur de la lunette au-dessus de terre soit la même après le renversement qu'auparavant. Attachez alors le cheveu avec un peu de cire ou autrement au-dessus du centre de la platine, & ayant ajouté le plomb, laissez pendre le cheveu de telle sorte qu'il passe exactement par le centre de la platine, & qu'il soit censé pendre de ce centre même. Dirigez ensuite la lunette au même objet que vous aviez remarqué, & placez l'intersection des filets sur le même point de l'objet qu'auparavant. Si dans cette situation du cheveu & de l'objet, le cheveu bat exactement sur le centre qui est en en-bas, le niveau est exact & parfaitement vérifié ; c'est-à-dire, que l'axe de la lunette, que je prends ici pour celui qui passe par l'intersection des filets, est exactement perpendiculaire à la

lignes tirées du centre au centre de la platine. Mais si le cheveu ne bat pas exactement sur le centre, il faut, en changeant son point de suspension, faire en sorte qu'il y batte, & en étant bien assuré, sans que l'objet ait changé de place dans la lunette, marquez sur l'arc de cercle, ou la ligne droite tracée sur la platine & qui passe par son centre, le point précis où cet arc est coupé par le cheveu tendu librement; le milieu entre ce point & le centre de la platine sera le nouveau centre exact de la platine, d'où la ligne tirée au centre fera exactement un angle droit avec l'axe de la lunette. On peut, si l'on veut, marquer ce nouveau point, & s'en servir de centre de la platine; mais il est plus à propos & plus commode de se servir du point ordinaire, & de corriger l'erreur du niveau en haussant ou en baissant les filets de la lunette, c'est-à-dire, en tournant d'un côté ou d'autre, la vis qui presse le châssis des filets contre le ressort qui est en-dessous. La figure 3<sup>e</sup> le représente fort distinctement. La méthode de corriger cette erreur est telle.

Le nouveau centre de la platine étant légèrement marqué, remettez le niveau dans sa situation ordinaire; & le cheveu tombant librement du centre, faites-le battre exactement sur le nouveau centre de la platine; alors l'objet dont vous vous êtes servi se trouvera dans la lunette au-dessus ou au-dessous de l'intersection des filets, mais par le moyen de la vis, élevez ou abaissez le châssis qui les porte, jusqu'à ce que cette intersection couvre l'objet; dans cet état le niveau sera exact & parfaitement vérifié: car si on le renverse une seconde fois, & qu'on ait bien opéré, on trouvera que l'objet étant dans l'intersection des filets, la ligne du perpendicule sera la même dans l'un & l'autre cas.

Si l'erreur étoit si grande que la vis ou le ressort n'eussent pas assez de jeu pour la corriger toute entie-

re, il faudroit changer ou le centre, ou le centre de la platine.

### CHAPITRE III.

#### *De la Pratique du Nivellement.*

**I**L reste maintenant à parler de la Pratique du Nivellement, lequel est ou simple & immédiat d'un point à un autre; ou bien composé de plusieurs nivellemens simples & liez ensemble, comme nous expliquerons dans la suite.

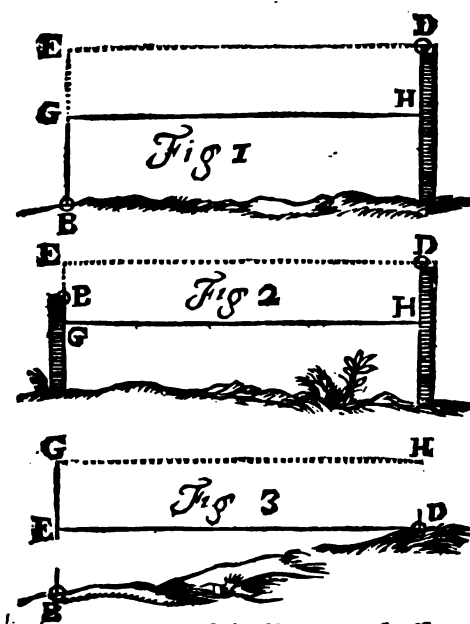
Après ce qui a été dit à la fin du premier Chapitre, on ne croit pas qu'il reste beaucoup de difficulté touchant le nivellement simple, où il s'agit d'établir par quelque

moyen que ce soit la ligne du vrai niveau, dont les deux extrémités servent à trouver la différence du vrai niveau entre les deux points proposez à niveller, que nous appellerons *les Termes du Nivellement*.

Les points BD sont les termes du nivellement.

Les extrémités GH de la ligne GH sont deux points dans le vrai niveau aux sta-

tions BD, c'est-à-dire, au-dessus ou au-dessous des termes du nivellement.



Par l'un des termes D soit mené DE parallèle à GH jusqu'au point E à la station de l'autre terme : Il est évident que les points D & E seront aussi dans le vrai niveau.

Maintenant si la ligne GH que l'on a établie dans le vrai niveau passe entre les termes, comme dans la première figure, où GH est au-dessus de B, & au-dessous de D, la somme des lignes BG, DH, qui sont les distances entre les termes du nivellement & les extrémités de la ligne GH, sera la différence du niveau des termes proposés, ce qui est évident; car la ligne BE, qui est cette même différence du niveau est égale à BG, & à DH ensemble; car GE & DH sont égales, à cause des parallèles GH, ED.

Mais si les termes BD sont tous deux au-dessus, ou au-dessous de la ligne GH, comme dans les 2<sup>e</sup> & 3<sup>e</sup> figures, la différence des distances BG, DH entre les termes, & la ligne GH, sera la différence des termes proposés à niveller; car la ligne BE, qui est cette différence, est égale à la différence des lignes BG, DH; où l'on doit remarquer que si la ligne du niveau GH est au-dessous des termes, si DH est plus grande que BG, le terme D sera plus élevé que le terme B, comme dans la deuxième figure; mais au contraire, si la ligne du niveau GH est au-dessus des termes, & que BG soit plus grande que DH, le terme B sera plus bas que le terme D, comme dans la 3<sup>e</sup> figure.

Il arrive quelquefois que la ligne du niveau passe par l'un des termes, & donne tout d'un coup leur différence de niveau, sans qu'il soit besoin d'addition ou de soustraction.

Nous avons déjà expliqué dans le premier Chapitre, que le nivellement simple n'a pas besoin de preuve, ni de correction, lorsque l'instrument a été placé au milieu,

ou à égale distance des termes à niveller : mais lorsqu'il est placé dans un des termes , & que l'on n'est pas assuré de sa justesse , ou bien quand on en feroit assuré , si l'on veut éviter la peine de mesurer la distance entre les termes , sans laquelle on ne peut pas sçavoir au juste qu'elle doit être la correction pour le haussement du niveau apparent par-dessus le vrai , ou enfin lorsque l'on craint la réfraction , il faut se servir du nivellement réciproque pour trouver immédiatement la véritable différence de niveau entre les deux termes proposez ; dont voici les règles.

*Première Règle.*

Au nivellement réciproque , si de l'une des stations le terme nivellé paroît autant au-dessous , que dans l'autre nivellement , l'autre terme nivellé paroît au-dessus , c'est une marque assurée que chacun des deux nivellemens réciproques fera juste : mais si l'un des deux termes paroît plus , ou moins bas par le second nivellement , que l'autre terme n'avoit été trouvé haut par le premier , la moitié de la somme de ce que l'on aura conclu , tant d'élevation , que d'abaissement , fera la juste différence requise du niveau des deux termes proposez , dont l'un sera plus bas , ou plus élevé que l'autre.

E X E M P L E.

Si par le premier nivellement l'un des termes à paru haut de six pieds , & que par le second nivellement l'autre terme paroisse bas de 8 pieds , 8 & 6 font 14 , dont la moitié 7 est la véritable différence requise entre les termes proposez à niveller.

*Deuxième Règle.*

Si par les deux nivellemens les termes paroissent tous deux également hauts , ou également bas , ils sont effectivement de niveau entr'eux : mais si l'un des deux est plus élevé , ou plus bas que l'autre , & qu'ils paroissent pourtant tous deux plus hauts , ou plus bas , il faudra prendre la différence des deux hauteurs , ou des deux abaiffemens , dont la moitié sera la veritable hauteur , dont celui , qui a paru le plus haut des deux , soit qu'ils parussent tous deux hauts , ou tous deux bas , est effectivement plus haut que l'autre.

**E X E M P L E.**

Si par le premier nivellement un des termes a paru haut de 6 pieds , & que par le second nivellement réciproque l'autre terme paroisse aussi haut , mais de 8 pieds , la différence de ces deux hauteurs est 2 pieds , dont la moitié , qui est un pied , est la veritable hauteur de celui qui avoit paru haut de 8 pieds , dont il surpasse l'autre.

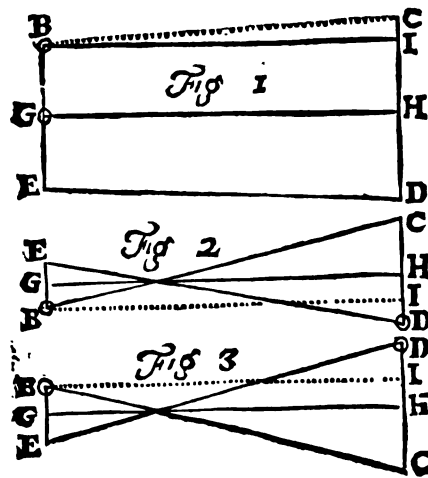
*Démonstration des deux Règles précédentes.*

Les points B & D sont les termes du nivellement , que l'on a proposez ; leurs différences de niveau réciproques , mais apparentes seulement , sont DC & BE ; car les lignes de visée sont BC , & DE : si l'on coupe en deux également DC en H , & BE en G , les points GH seront de niveau entr'eux , par ce qui a été démontré au premier Chapitre ; ayant donc mené BI parallele à GH , on aura DI pour la veritable différence du niveau des termes B , D.

Il est évident que lorsqu'un des termes sera au-dessus

Rrrr ij

de GH, & l'autre au-dessous (comme dans la première



figure, qui est pour la première Règle) DI sera composé de DH. moitié de DC, & de HI, ou GB moitié de BE, & par conséquent DI sera égale à la moitié de la somme de DC & BE.

Mais si les termes BD sont tous deux au-dessous, ou bien tous deux au-dessus de GH; (comme dans les 2<sup>e</sup> & 3<sup>e</sup> figures) alors DI sera égale

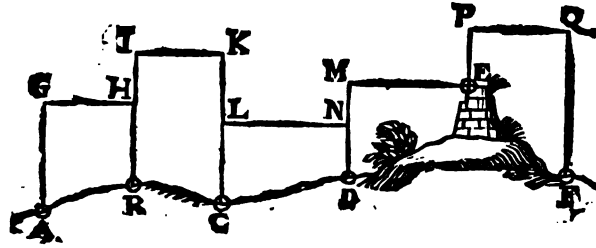
à la moitié de DC moins la moitié de BE, ce qui revient à la même chose que de prendre la moitié de la différence des entières CD, BE, comme l'on a fait dans la seconde Règle ci-dessus.

L'on ne parle point de la réfraction, car on la suppose égale de part & d'autre dans chacun des nivellemens réciproques, comme l'on a dit au premier Chapitre.

Pour ce qui est du nivellement composé de plusieurs nivellemens simples, il faut que la liaison en soit telle, que deux nivellemens simples consécutifs aient toujours un même terme du nivellement, qui leur soit commun.

#### EXEMPLE.

A & F sont deux termes extrêmes qui sont proposez à niveller : mais on est obligé par quelques empêchemens de faire ce nivellement en plusieurs opérations, par le moyen des autres termes B, C, D, E pris entre deux à volonté suivant la commodité des lieux, chacun desquels



est commun à BH hauteur de GH, & à BI hauteur de IK, & ainsi des autres.

Or la maniere la plus sûre dans la suite des nivellemens, est de garder toujours, autant qu'il est possible, une marche alternative entre l'instrument, & les bâtons où est attaché la carte qui sert de point de visée; j'entens que si au premier coup de niveau le bâton est demeuré derriere, & que l'instrument ait été porté devant, l'instrument demeurera à la même place, & le bâton prendra le devant pour le second nivellement; & ainsi toujours de suite par stations, qui soient de deux en deux à distances à peu près égales; je dis à peu près, ce qui sera assez juste, soit par la simple estimation, soit par le moyen de la lunette dans laquelle un même objet occupe certaine partie de l'ouverture, plus ou moins grande, à proportion qu'il est plus ou moins éloigné.

Mais parce que l'on ne pourra toujours garder la marche alternative entre l'instrument & les bâtons, on aura soin de récompenser en arriere les coups qui auront été faits en avant: j'entens que si, par exemple, les bâtons ont marché devant deux fois de suite, ils demeureront aussi derriere autant de fois; & il faudra se souvenir que pour récompenser un grand coup de niveau, il en faut quatre moindres, dont chacun soit égal à la moitié

du grand, d'autant que pour demi-distance il n'y a que le quart du haussément du niveau apparent, suivant la raison des quarez. L'on suppose toujours que l'instrument soit juste, parce qu'autrement il en faudroit considérer l'erreur, laquelle seroit en raison des distances.

Il arrive souvent qu'il faut niveller deux points qui sont au pied d'une montagne, l'un d'un côté, & l'autre de l'autre, en sorte que la montagne est entre deux; en ce cas on est obligé de faire plusieurs coups de niveau, toujours en montant d'un côté, & en descendant de l'autre; & souvent la commodité des lieux ne permet pas, que les coups de niveau que l'on donne en descendant soient égaux aux premiers que l'on a faits en montant, parce que le terrain en détermine ordinairement la longueur; & comme il est toujours bon, de les faire les plus longs qu'il sera possible\*, afin que la somme des nivellemens soit moins sujette à erreur, il sera plus à propos de mesurer la distance entre les nivellemens, pour leur donner à chacun la correction qui leur convient: il n'est pas nécessaire que cette mesure soit si exacte, car elle ne sert que pour avoir la correction du niveau apparent par-dessus le vrai, laquelle ne change pas sensiblement pour un peu de différence. On suppose toujours dans toutes ces opérations que l'instrument est bien rectifié.

Les choses étant ainsi soigneusement exécutées, il n'y aura rien à craindre pour la justesse du nivellement, pour-

\* Il est à propos de remarquer, contre ce qui est dit ici, que plus les coups de Niveau sont longs, plus ils sont sujets à erreur. Dans ces cas les réfractions plient beaucoup plus les rayons visuels, & ces réfractions changent sensiblement d'une station à l'autre. Mais il y a plus; les marques ne se voyent pas assez distinctement, & ne permettent pas, par le peu de champ qu'elles occupent dans la Lunette, de déterminer exactement le point auquel répond l'intersection des filets: cette cause peut produire une erreur considérable. Le nivellement demande une extrême précision, & l'on y doit tellement avoir égard aux moindres minuties, que cela même a passé en proverbe, & se dit de ceux qui s'occupent de riens.

vû que d'ailleurs l'instrument étant bien gouverné, on tiennne un compte fort exact des hauteurs des lignes du nivellement, comme AG, BH, BI, & le reste.

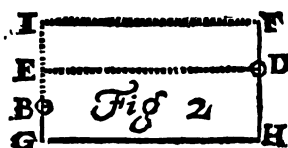
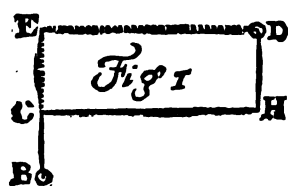
La pratique ordinaire pour tenir registre des observations, est d'écrire après chaque coup de niveau particulier, ce qui en résulte; & de faire deux colonnes, l'une que l'on appelle des montans, & l'autre des descendans: mais sans s'embarasser en chemin d'aucun calcul, on peut écrire entierement les observations, en telle maniere qu'il est facile d'en faire ensuite le calcul tout à loisir.

Pour cet effet, sans faire aucune distinction entre les bâtons, & l'instrument, considerant chaque ligne du nivellement comme soutenue par les deux bouts, on tient compte de deux hauteurs, l'une premiere que l'on écrit à la gauche, & l'autre seconde que l'on écrit à la droite vis-à-vis la premiere; il y aura donc une colonne de toutes les hauteurs, que l'on appelle premieres, & une autre de toutes celles que l'on appelle secondes, selon l'ordre de la marche du nivellement.

#### E X E M P L E.

Supposé que l'on ait commencé par A. On écrit dans la premiere colonne la hauteur AG, & à côté dans la seconde la hauteur BH; & ensuite on écrit encore dans la premiere la hauteur BI, & dans la seconde la hauteur CK; & de même dans la premiere la hauteur CL, & dans la seconde la hauteur DN; & ainsi de suite; ce qui représentera distinctement tous les nivellemens: & s'il arrive que la ligne du nivellement manque de hauteur par un bout, comme ME dans la même figure, on marque un zero dans la colonne à la place de la hauteur de la ligne ME par son extrémité E, afin de conserver la distinction de tous les nivellemens.

Enfin s'il arrive que la ligne du nivellement manque non seulement de hauteur par un bout, mais encore qu'elle soit plus basse qu'un des termes, ou même que tous les deux, comme dans les figures suivantes, où B, D sont les termes, & GH la ligne du nivellement.



Dans le premier cas représenté par la première figure, lorsque la ligne du nivellement passe au-dessous du plus haut terme D, comme en H, & au-dessus du plus bas terme B, comme en G, on écrit zero pour la hauteur de la ligne du niveau GH au terme D, & pour la hauteur de la même ligne du niveau au terme B, on ajoute DH avec BG, qui fera toute la hauteur BE, que l'on écrit pour la hauteur de la ligne du niveau au terme B, comme si effectivement la ligne de niveau avoit été ED.

Mais au second cas représenté dans la 2<sup>e</sup> figure, lorsque les deux termes B, D sont au-dessus de la ligne du nivellement, on transpose les deux hauteurs BG, DH, écrivant dans la première colonne celle qui suivant l'ordre du nivellement doit être dans la seconde; & réciproquement en mettant dans la seconde celle qui devoit être effectivement dans la première. La démonstration de cette pratique se connoîtra facilement, si l'on suppose que la ligne HD soit prolongée en F, en sorte que DF soit égale à BG, & ayant mené FI parallèle à GH, cette ligne FI sera aussi de niveau, & on la pourra considérer comme une ligne du nivellement; mais à cause des lignes parallèles, la figure HI est un parallélogramme dont les côtes opposés sont égaux; c'est pourquoi, puisque DF est égale à BG, BI sera égale à DH, car GI & HF sont égales; par le moyen de cette transposition  
l'opération

L'opération se trouve redite, comme si effectivement la ligne FI étoit celle du nivellement; de sorte que dans ce dernier cas on fait monter la ligne du nivellement au-dessus des deux termes, au lieu que dans le premier elle est seulement élevée autant qu'il est nécessaire pour la faire passer par le plus haut.

Avec toutes ces précautions on réduit les opérations comme si la ligne du nivellement n'étoit jamais au-dessous des termes du nivellement, ce qui est nécessaire pour observer une même manière d'écrire dans les Mémoires.

Les nivellemens étant achevez, on fait deux sommes, l'une de toutes les hauteurs de la première colonne à gauche, & l'autre de celles de la seconde à droite; & si la première somme est plus grande que la seconde, le dernier terme sera plus haut que le premier de la différence des sommes: mais si au contraire la seconde somme se trouve plus grande que la première, le dernier terme sera plus bas que le premier, de la différence des sommes.

### *Démonstration.*

Puisque la ligne du nivellement, qui par les précautions que l'on a apportées, doit être ici confondue avec la ligne du vrai niveau, n'est jamais plus basse que le plus haut des deux termes de chaque nivellement particulier, ou que s'il arrive autrement, on en fait la réduction: il s'ensuit que le plus bas des deux termes de chaque nivellement, est toujours du côté où la ligne du nivellement a le plus de hauteur, & qu'ainsi on peut dire qu'à chaque nivellement particulier on est allé en montant, lorsque la plus grande hauteur de la ligne du nivellement a été écrite dans la première colonne; & qu'au contraire on est allé en descendant, lorsqu'elle a été

mise dans la seconde : de sorte que si à chaque nivellement , au lieu d'écrire les deux nombres tous entiers chacun dans sa colonne , on avoit seulement retenu leur différence pour l'écrire à la place du plus grand nombre , & que voulant conserver l'ordre des nivellemens , on eut rempli d'un zero la place de l'autre nombre ; on auroit deux colonnes , qui representeroient la suite de tous les nivellemens , & dont la premiere feroit voir de combien on seroit monté , & la seconde de combien on seroit descendu : de maniere que l'on étoit plus monté que descendu , ou bien , ce qui est la même chose , & si la somme des hauteurs de la premiere colonne étoit plus grande , que celle de la seconde , la différence des sommes feroit la hauteur du dernier terme par dessus le premier ; & au contraire si l'on étoit plus descendu que monté , le premier terme seroit plus haut que le dernier.

Si l'on écrivoit seulement les différences des hauteurs des lignes du nivellement , on ne feroit autre chose que de retrancher certains nombres , qui se trouvent également dans chaque colonne , lorsque l'on écrit tout au long , comme nous avons dit ci-devant , ce qui ne change rien à leur différence ; & l'on épargne seulement la peine de faire plusieurs soustractions où l'on pourroit se tromper aisément , dans un tems principalement où l'on est d'ailleurs assez embarrassé , & occupé à faire les observations avec exactitude.

Il faut observer soigneusement dans cette méthode , de prendre bien garde de ne pas écrire dans la premiere colonne ce qui doit être mis dans la seconde : ni au contraire de placer dans la seconde ce qui doit être dans la premiere : c'est pourquoi il est très-à-propos , que plusieurs personnes écrivent séparément les observations , & que de tems en tems ils confrontent leurs Memoires ; il sera bon aussi de laisser en chemin certaines marques

ou repaires , pour y avoir recours en cas de doute , ou de mécompte , & pour n'être pas obligé à refaire entièrement le travail.

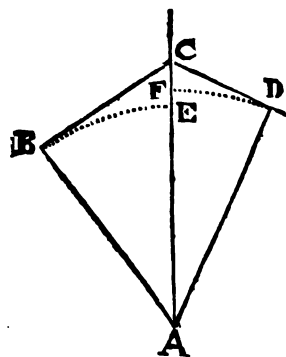
S'il arrive en chemin que la ligne du nivellement donne dans le sommet de quelque toit , ou dans quelque endroit , qui soit facile à reconnoître de plusieurs lieux , en ce cas ayant écrit dans la première colonne , la hauteur de l'instrument , on ira au-delà de ce point aussi loin que l'on en avoit été éloigné en-deçà ; & si par hazard on trouve un endroit d'où ce même objet soit vu dans le niveau apparent , comme dans la première station , on écrira dans la seconde colonne la hauteur de l'instrument pour cette seconde station ; ou même , si elle est égale à la première , on les pourra supprimer toutes deux , & l'on continuera le nivellement comme auparavant : car on doit tenir pour maxime , qu'on peut supprimer les nombres qui se trouveroient également dans chaque colonne : mais si au cas proposé , la seconde station , d'où l'on voit le même objet , en est moins éloignée que la première ; il faudra diminuer la seconde hauteur de l'instrument de la différence des hauffemens du niveau apparent pour la distance de chaque station , & au contraire il faudra l'augmenter , si l'on se trouve plus éloigné.

#### *Démonstration.*

A soit le centre de la Terre , C soit un point au-dessus de la circonférence , lequel se trouve dans le niveau apparent des deux autres points B , D qui sont inégalement éloignés du centre A ; E est dans le vrai niveau du point B ; & F dans celui de D ; & parce que les angles ABC , ADC sont supposez droits , il est évident par la 47<sup>e</sup> Proposition du premier Livre des Elemens d'Euclide , que la somme des quarez de AB & de BC sera

SSSS ij

égale à la somme des quarrés de AD & de DC, qui sont chacune égale au quarré de AC; d'où il s'ensuit, que si la



ligne droite est plus petite que BC, AD sera plus grande nécessairement que AB; de sorte que le point D, qui est le moins éloigné de C, sera plus éloigné du centre de la Terre A, que le point B, & par conséquent il sera plus haut : & si du centre A l'on décrit les arcs de cercle BE, DF, il est évident que EC est le haussément du niveau apparent par-

dessus le vrai à l'égard du point B, & semblablement FC est celui qui convient au point D; c'est pourquoi EF est la différence des haussémens du niveau apparent pour les deux points B, D.

On remarquera que les haussémens CE, CF répondent à des rayons de différentes longueurs, comme sont AB, AD, au lieu que les haussémens du niveau apparent, que l'on a donnez dans le premier Chapitre, sont calculez sur un seul rayon, ou demi-diamètre : mais cette différence dans la pratique étant comparée au demi-diamètre de la Terre, ne peut être d'aucune considération.

On seroit trop long si l'on vouloit rapporter tous les cas en particulier qui peuvent arriver dans la suite du nivellement composé, mais un Observateur un peu intelligent ne rencontrera aucune difficulté qui puisse l'arrêter, s'il a bien entendu ce qui a été expliqué ci-dessus.

On ne dit rien de la preuve du nivellement composé, parce qu'il la porte avec soi, supposé que tout soit exécuté de la manière que nous avons dit, & que d'ailleurs l'on ait tenu un registre exact de toutes les hauteurs des lignes du nivellement.



# RELATION

## DE PLUSIEURS NIVELLEMENS

faits par ordre de sa Majesté.

*Par M. Picard.*

**S**A MAJESTE' ayant résolu de faire conduire à Versailles la meilleure Eau pour boire, que l'on pourroit trouver dans les lieux circonvoisins, on proposa celle de la Montagne de Roquencourt comme une des plus proches, & des plus saines de tout le país : mais quoique cette proposition parut d'abord impossible, à cause que cette eau étoit à plus de 19 toises de profondeur sous le terrain de la Montagne, comme il étoit facile à connoître par le Puits des Essarts, qui est entre Roquencourt, Bailly & Marly, on ordonna pourtant à M. Picard de la niveller pour sçavoir à quelle hauteur elle pouvoit être à l'égard de Versailles; & après plusieurs nivellemens qu'il fit à diverses fois, tant en gros, qu'en détail, il trouva que la superficie de l'eau de ce Puits, qui est éloigné de Versailles d'environ 3000 toises, étoit à peu près de niveau avec le rez-de-chaussée du Château.

On donna ordre ensuite au Sieur Jongleur de ramasser toutes les eaux de cette Montagne, & de les faire conduire à Versailles. Il fit pour cet effet sous terre un long Aqueduc, dont la sortie est proche de Roquencourt,

Sfff iij

environ trois pieds plus bas que la superficie de l'eau des Effarts, suivant les nivellemens que l'on en avoit faits; & après que l'Aqueduc a été entierement achevé, les chose se sont trouvées par l'experience tellement conformes aux nivellemens, qu'il ne se pouvoit rien de plus juste.

La même chose est arrivée à l'égard des eaux que le Sieur Jongleur a encore recueillies entre Roquencourt & Bailly pour Triannon, & du côté de Saint-Cyr pour la Ménagerie; ce que l'on a crû devoir rapporter, comme autant de preuves de la justesse des manieres de niveller que l'on a enseignées ci-devant : mais en voici d'autres qui sont bien plus considerables.

La proposition la plus hardie, que l'on ait faite pour donner des Eaux à Versailles, a été celle de M. Riquet, qui est assez connu par l'entreprise de la Jonction des Mers. Il avoit vû que la Riviere de Loire avoit beaucoup plus de pente que la Seine, d'où il avoit conclu que le lit de la Seine, étoit beaucoup plus bas que celui de la Loire; & sur ce fondement il s'étoit persuadé que l'on pourroit conduire un Canal depuis la Riviere de Loire jusques au Château de Versailles. Il n'avoit pas même fait difficulté d'avancer, qu'il pourroit conduire cette eau sur le haut de la Montagne de Sataury, qui est plus haut de 20 toises que le rez-de-chaussée du Château; ce qui auroit pû fournir un ample Reservoir pour l'embellissement de ce lieu. Une proposition si avantageuse ne manqua pas d'être écoutée favorablement; mais comme l'entreprise étoit d'une grande conséquence, il s'agissoit de l'examiner avec tous les soins possibles, ce que l'on remit entre les mains de M. Picard, qui fut accompagné de M. Niquet dans cet ouvrage.

C'étoit vers la fin du mois de Septembre de l'année 1674; & parce qu'il restoit peu de tems commode pour

faire des nivellemens, il crut qu'il étoit à propos d'abord d'examiner la chose en gros; afin que s'il y avoit quelque apparence de possibilité, on la pût refaire dans la suite avec toutes sortes de précautions.

Il avoit sçu que M. Riquet avoit dessein de prendre la Loire au-dessus de Briare, & par conséquent qu'il falloit traverser le Canal: c'est pourquoi il s'appliqua à bien connoître la différence du niveau entre Versailles, & le plus haut point du Canal de Briare: & pour cet effet il jugea, qu'il n'y avoit rien de plus expédient que de bien déterminer la hauteur de Versailles au-dessus de la Seine, puis suivre en remontant les Rivières de Seine, & de Loir jusqu'à Montargis où commence le Canal de ce côté-là.

La Seine entre Séve & les Moulineaux, où elle approche le plus de Versailles, étoit alors basse de 3 toises au-dessous du pied du mur des Moulineaux, & en cet état elle fut trouvée plus basse que le rez-de-chaussée du Château de Versailles de soixante toises  $\frac{1}{2}$ , ce qui fut vérifié en allant & venant. Puis on examina la pente de la Seine depuis Valvint jusqu'à Séve de la manière suivante.

Le 27 Septembre étant proche le Clos des Capucins, entre Séve & Meudon, à la hauteur de 366 pieds  $\frac{1}{2}$  au-dessus de la Seine, on trouva en plein midy, que le sommet de la Tour meridionale de Notre-Dame de Paris étoit bas de 16 minutes 40 secondes sous le niveau apparent. L'observation fut faite avec le niveau où l'on avoit fait marquer des minutes sur la lame où est attachée la petite platine d'argent dont le centre détermine le point du perpendicule, comme il a été dit dans la Description du Niveau.

La distance en ligne droite entre la station proche le mur des Capucins, & la Tour de N. D. de Paris étoit de

5040 toises, ce que l'on sçavoit assez exactement par la Carte des Environs de Paris, que le Sieur Vivier avoit faite : d'où il s'ensuivoit, que l'abaissement apparent de ladite Tour à l'égard du niveau apparent étoit de 147 pieds.

Le lendemain à pareille heure, le niveau ayant été porté au haut de la Tour de N. D. l'endroit de la station des Capucins parut au-dessus du niveau apparent de 11 minutes 20 secondes, ce qui donnoit une hauteur apparente de 102 pieds, laquelle étant ajoutée à la dépression de la Tour de N. D. observée de 147 pieds à la première station, faisoit ensemble la somme de 249 pieds, dont la moitié, sçavoir 124 pieds  $\frac{1}{2}$ , étoit la véritable différence du niveau de ces deux stations, & dont celle des Capucins de Meudon étoit plus haute.

La hauteur de ladite Tour ayant été exactement mesurée depuis le pavé de l'Eglise jusques au haut du parapet, ou appuy, elle fut trouvée de 34 toises, ou de 204 pieds : mais la Riviere de Seine étoit alors plus basse que le pavé de l'Eglise de 27 pieds ; & par conséquent depuis l'eau de la Seine jusques au haut de ladite Tour il y avoit 231 pieds, à quoi si l'on ajoute l'excès du vrai niveau dont la station des Capucins étoit plus haute que celle de la Tour, qui est de 124 pieds  $\frac{1}{2}$ , on aura 355 pieds  $\frac{1}{2}$  dont la Seine vers N. D. à Paris est plus basse que la station des Capucins de Meudon : Mais on avoit trouvé que cette même station étoit plus haute que la Seine, prise entre les Molineaux & Séve, de 366 pieds  $\frac{1}{2}$  ; donc la Seine étoit plus basse vers Séve qu'à Paris de 11 pieds, ce qui devoit être la pente de cette Riviere entre ces deux lieux : mais ayant fait ensuite le nivellement en détail, & par stations médiocres, on trouva qu'il n'y avoit que 8 pieds ; ce qui commença de rendre suspecte la première maniere dont on s'étoit servi.

Du haut de la même Tour de N. D. on avoit observé  
la

*La Tour Septentrionale est plus haute que l'autre de 8 pouces.*

la Butte du Griffon, qui est entre Ville-neuve-Saint-George & Yerre, & elle avoit paru basse de 25 secondes; & parce que la distance est de 9070 toises, il devoit y avoir 7 pieds de dépression apparente : mais la Tour de N. D. étant ensuite observée de dessus la Butte du Griffon, parut basse de 9 minutes ou de 142 pieds, dont ayant ôté les 7 pieds ci-dessus, & prenant la moitié du reste, on trouva que la véritable différence du niveau étoit de 67 pieds  $\frac{1}{2}$ , laquelle étant ajoutée aux 231 pieds de hauteur de la Tour de N. D. à l'égard de la Seine on conclut que la Seine à Paris étoit à 298 pieds  $\frac{1}{2}$  sous le vrai niveau du Griffon.

Du même lieu du Griffon, le haut du mur de la clôture de la Maladrie, appelée S. Lazare près Corbeil, avoit paru bas de 9 minut. 30 sec. étant éloigné de 7200 toises, & par conséquent la dépression apparente étoit de 119 pieds. La Butte du Griffon observée ensuite du même lieu de Saint Lazare, fut trouvée haute de 1 min. 35 sec. ou de 21 pieds, qu'il faut ajouter aux 119 trouveez ci-dessus, & prendre la moitié de la somme, qui sera 70 pieds pour la vraie hauteur du Griffon par-dessus le mur de S. Lazare : mais le mur de S. Lazare étoit à 202 pieds au-dessus de la Seine près Corbeil; & par conséquent la Seine à Corbeil étoit plus basse que la Butte du Griffon de 272 pieds : mais on avoit trouvé que la Seine à Paris étoit plus basse que le même Griffon de 298 pieds  $\frac{1}{2}$ ; donc la pente de la Seine depuis Corbeil jusques à Paris devoit être de 26 pieds  $\frac{1}{2}$ ; au lieu que par les nivellemens faits en détail le plus exactement qu'il fut possible, on ne trouva que 18 pieds, à quoi on crût qu'il falloit s'en tenir, d'autant que pour se mettre entièrement à couvert des réfractions aux grands coups de nivellemens réciproques, il auroit fallu qu'ils eussent été faits en même tems; joint que d'ailleurs la moindre erreur que l'on auroit pu

commettre dans l'observation, auroit produit une très-grande variation : c'est pourquoi, bien que l'on eut toujours été de la même manière jusques à Melun, on ne tint aucun compte des grands coups de niveau, continuant de suivre le bord de la Rivière jusqu'à Valvint, où étant arrivez, on trouva que l'on étoit monté depuis Corbeil de 25 peds.

*Pente de la Seine depuis Valvint jusques à Séve.*

De Valvint à Corbeil	25 peds.
De Corbeil à Paris.	18
De Paris à Séve	8

Somme 51 peds, ou 8 toises  $\frac{1}{2}$ .

Depuis Valvint jusques à Séve la pente de la Seine est d'environ 1 pied pour 1000 toises de chemin, tantôt un peu plus, & tantôt un peu moins.

De Valvint on traversa droit en nivellant jusques à Moret, & de Moret le long des bords de la Rivière de Loin jusques à Montargis, & l'on trouva que l'on étoit monté de 16 toises, en quoi on ne pouvoit pas se tromper considérablement, quand on n'auroit fait que compter les Moulins qui sont sur ladite Rivière, estimant outre cela ce qu'il peut y avoir de pente d'une Chaussée à l'autre.

On ne fit ensuite que mesurer les sauts des Ecluses du Canal de Briare, qui depuis Montargis jusques au Point de partage sont au nombre de 28, faisant 42 toises de hauteur.

Du haut du Canal jusques à Montargis	42 toises.
De Montargis à Valvint	16
De Valvint à Séve	8 $\frac{1}{2}$
Donc du haut du Canal jusques à Séve	66 $\frac{1}{2}$
Mais de Versailles à Séve	60 $\frac{1}{2}$

Donc le plus haut point, autrement le Point de par-

tage du Canal de Briare, est plus haut que le rez-de-chaussée du Château de Versailles de 6 toises.

Ce qui revient à peu près au niveau de la superficie du Reservoir du dessus de la Grotte.

On descendit ensuite vers la Loire, qui étoit pour lors fort basse, & en mesurant les sauts des Ecluses du Canal, qui sont de ce côté-là au nombre de 14 seulement, on trouva que depuis le Point de partage jusques à la Loire, il y avoit 17 toises de pente : de sorte que pour retrouver le niveau du haut du Canal, il auroit fallu prendre la Loire en remontant à 17 toises plus haut qu'elle n'est aux environs de Briare : mais avant que d'examiner jusqu'où il auroit fallu remonter pour prendre la Loire, & avant que de reconnoître les terrains, tant au-delà, qu'au-deçà du Canal, pour conduire un Aqueduc, voyant qu'outre la pente nécessaire pour un si long chemin, il s'en falloit 14 toises, que l'endroit du Canal par où il auroit fallu faire passer l'Aqueduc pour conduire l'eau de la Loire, ne fût aussi haut que Sataury ; & ne sçachant pas d'ailleurs si l'on se contenteroit de la chose telle qu'elle se trouvoit, on pensa qu'il falloit verifier en retournant les endroits où il pouvoit y avoir quelque doute dans les opérations.

*Le lit de la Loire près Briare est 1 plus haut de 41 toises que celui de la Seine à Valvins.*

M. Picard fit son Rapport de ce qu'il avoit trouvé, sans sçavoir que M. Riquet eût envoyé en particulier des Nivelleurs après lui, & quoiqu'il vît ce qu'on avoit trouvé contre ce qu'il avoit avancé, il ne laissa pas de persister dans sa première proposition jusqu'au retour de ses Gens : car alors il demeura d'accord de tout ce que M. Picard avoit rapporté, dont il fut entièrement convaincu, après que l'on eût refait en sa présence les nivellemens depuis Versailles jusqu'à Séve, & depuis Séve jusqu'à la Porte de la Conférence : On en demeura-là pour lors, & l'on ne parla plus de cette affaire que quatre ans après, à l'occasion de ce qui suit.

Sur les bords de la Forêt d'Orleans du côté de Pluviers, il y a plusieurs Etangs, & Sources vives qui forment des Ruisseaux, lesquels s'étant joints ensemble font la Riviere de Juine, dont la pente est si grande, que depuis son commencement jusques au-dessous de la Ferté-Alais où elle se joint à celle d'Etampes, elle fait aller environ soixante Moulins en peu d'espace de chemin. M. Franchine avoit eu la pensée de faire venir cette Riviere à Versailles : mais quelque tems après, en l'année 1678, sur le rapport du Sieur Vivier, qui faisoit alors la Carte de l'Orleanois, on y pensa tout de bon. M. Picard eut ordre d'examiner si la chose étoit possible, & il fut accompagné dans ce voyage par le Sieur Vivier, qui avoit renouvelé la proposition, & par le Sieur Villiard son Aide ordinaire.

Il reprit les nivellemens qu'il avoit déjà faits jusqu'à Corbeil, & il les continua jusqu'à Orleans.

*Pentes depuis la Forêt d'Orleans jusqu'à Corbeil.*

De l'Etang appelé le Grand-Vau, qui est dans la Forêt au-dessus de Chemerolles, pente jusqu'à l'Etang du Bois près Courcy	18 pieds.
De l'Etang du Bois à celui de Laas	18
De l'Etang de Laas au Moulin de Pluviers	55
De Pluviers au Pont d'Angerville-la-Riviere	71 $\frac{1}{2}$
D'Angerville-la-Riviere à Males-herbes	17 $\frac{1}{2}$
De Males-herbes à Maïsse	27
De Maïsse à la Ferté-Alais	19
De la Ferté à Ormoy	31
D'Ormoy jusqu'au Moulin d'Essone	21
D'Essone à la Riviere	22

Somme 300 pieds, ou 50 toises.

La Seine n'étoit pas plus haute que dans l'année 1674,

lorsqu'on fit les Nivellemens, de sorte qu'ajoutant les 4 toises  $\frac{1}{2}$  de pente, qui furent trouvées alors depuis Corbeil jusqu'à Séve, on trouve que les eaux de la Forêt d'Orleans ont 54 toises  $\frac{1}{2}$  de hauteur au-dessus de la Seine vers Séve: Et parce que la hauteur du rez-de-chaussée de Versailles au-dessus du même endroit de la Seine à Séve, est de 60 toises  $\frac{1}{2}$ ; il s'ensuit que le rez-de-chaussée du Château de Versailles est plus haut de 6 toises que l'Etang du Grand-Vau de la Forêt d'Orleans.

Les choses ayant été trouvées en cet état on ordonna à M. Picard de continuer les nivellemens pour revoir s'il étoit possible de conduire un Canal, de la Loire jusqu'au Château de Versailles.

On avoit déjà trouvé, qu'il falloit traverser le Canal de Briare, & par les derniers nivellemens on avoit aussi reconnu qu'il falloit nécessairement passer entre l'Etang du Grand-Vau, qui s'écoule dans la Seine, & ceux de la Courdieu dont les eaux tombent dans la Loire; & parce qu'il étoit impossible de niveller dans la Forêt d'Orleans autrement que par les grandes Routes, on suivit celle de Gergeau; & traversant depuis l'Etang du Bois en montant vers la Courdieu, on trouva que le plus haut terrain pris dans ladite Route de Gergeau à 150 toises environ au-delà de l'endroit où elle est coupée par celle du Hallier, étoit plus haut de treize toises que l'Etang du Bois & par conséquent plus haut de 10 toises que le Grand-Vau; & qu'ainsi on étoit plus haut de 4 toises que le rez-de-chaussée du Château de Versailles.

On trouva aussi par occasion que le pied de la grille de l'Etang le plus haut de la Courdieu, qui étoit pour lors à sec, étoit plus haut d'environ 9 pieds, que la superficie de l'Etang du Grand-Vau, ou 5 pieds que la Chaussée de ce même Etang. Ce que l'on met ici en faveur de ceux qui voudront joindre la Loire avec la Seine par ce côté-là.

Il eût été impossible, à cause des Bois, de continuer l'examen du Terrain jusqu'au Canal de Briare, à moins que de faire des Routes exprès au travers de la Forêt; & parce que d'ailleurs on étoit dans l'impatience de sçavoir comment ces derniers nivellemens s'accorderoient avec ceux qui avoient été faits quatre ans auparavant, on descendit en nivellant jusqu'à la Loire, qui étoit fort basse, & qui étant prise au-dessous de la Porte de Bourgogne au pied d'une vieille muraille appelée le Crau, fut trouvée plus basse que le haut terrain de la Forêt, de vingt-huit toises  $\frac{1}{2}$ ; au lieu que depuis le même haut terrain jusqu'à la Seine prise à Corbeil, il y avoit 60 toises de pente: de maniere que la Seine à Corbeil étoit plus basse que la Loire à Orleans de 31 toises  $\frac{1}{2}$ ; les deux Rivières étoient alors fort basses.

*Pente de la Loire depuis l'entrée du Canal de Briare jusqu'au Crau d'Orleans.*

Du Canal à Gien	10 pieds.
De Gien à Rocolé	10
De Rocolé jusqu'au Port la Ronce	42
Du Port la Ronce à Gergeau	10
De Gergeau à Orleans	19

Somme 91 pieds, ou environ 15 toises; & parce que le Point de partage est plus haut que la Loire de 17 toises, il s'ensuit que ledit Point de partage étoit à 32 toises de hauteur au-dessus de la Loire prise à Orleans; & si l'on ajoute encore les 31 toises  $\frac{1}{2}$  qu'il y a d'Orleans à Corbeil, & les 4 toises  $\frac{1}{2}$  de Corbeil à la Seine proche de Séve, la somme totale se montera à 68 toises pour la hauteur du Canal de Briare au-dessus de la Seine à Séve: puis ayant ôté les 60 toises  $\frac{1}{2}$  qu'il y a de Versailles à Séve, on trouvera que le Point de partage du Canal est

plus haut que le rez-de-chaussée du Château de Versailles de 7 toises  $\frac{1}{2}$ , au lieu que par les premiers nivellemens faits par la Riviere de Loire on n'avoit trouvé que 6 toises de hauteur : mais il vaut mieux s'en tenir à ces derniers, d'autant qu'ils furent faits dans un tems beaucoup plus favorable que les premiers, & avec un instrument dont le perpendicule avoit quatre pieds de hauteur, au lieu que celui qui avoit servi aux premiers n'avoit que 3 pieds; ou enfin si l'on veut on pourroit partager le différent par la moitié.

*Pente de la Riviere de Loire depuis Pouilly jusqu'à l'entrée du Canal de Briare.*

De Pouilly à Cosne	26 pieds.
De Cosne à Nevay	25
De Nevay à Bony	7
De Bony à l'entrée du Canal de Briare	20

Somme 96 pieds ou 16 toises.

On conclut de ces nivellemens, que pour trouver le niveau du plus haut point du Canal de Briare, qui étoit environ celui du Reservoir du dessus de la Grotte de Versailles, il falloit remonter la Loire environ une lieue au-dessus de Pouilly; & pour avoir une pente convenable pour conduire l'eau dans un Acqueduc, il falloit aller du moins jusqu'à la Charité.

La saison étoit déjà fort avancée; & parce que les nivellemens des environs de la Forêt d'Orleans avoient donné lieu de craindre que le terrain de la Beauce ne fût trop bas pour pouvoir porter l'eau de la Loire à Versailles, on revint à Orleans, sans s'arrêter à d'autres recherches, pour achever d'exécuter les ordres de sa Majesté, qui étoient de revenir expressément de la Forêt d'Orleans par la Beauce en nivellant jusqu'à l'Etang de Tra-

pe, qui, comme nous dirons ci-après, étoit un terme connu, que l'on sçavoit être plus haut d'environ deux toises, que la superficie du Reservoir du dessus de la Grotte.

Pour reprendre les premiers vestiges & tenir le dehors de la Forêt, on crut qu'il étoit à propos de recommencer par l'Etang de Laas, que l'on sçavoit être plus bas de 16 toises, que le haut terrain de la Forêt, ou de 12 toises que le rez-de-chaussée du Château de Versailles.

On monta de Laas à Saint-Lié 5 toises.

De S. Lié au pavé de la Mont-joye on monta encore 2

De sorte que le pavé de la Mont-joye est plus haut que l'Etang de Laas de 7

Et suivant ce que l'on vient de conclure, il falloit monter de 12 toises pour être de niveau avec Versailles.

Mais parce que l'Etang de Trape est plus haut d'environ 7 toises que le rez-de-chaussée du Château de Versailles, il s'ensuit que nonobstant les 7 toises dont on étoit monté, on étoit encore plus bas que l'Etang de Trape, d'environ 12 toises. On étoit cependant très-assuré, que l'on avoit coupé tout le terrain par où l'on auroit pu faire passer l'Aqueduc pour porter l'eau de la Loire à la sortie de la Forêt d'Orleans, & que ledit lieu de la Mont-joye, qui est sur le grand chemin de Paris en sortant d'Orleans, étoit l'endroit le plus haut, qui soit depuis l'Etang de Laas jusqu'à la Loire, en suivant les bords de la Forêt d'Orleans du côté de Paris.

Ce qui vient d'être conclu à l'égard des 12 toises dont le pavé de la Mont-joye est plus bas que l'Etang de Trape, suppose les nivellemens de Versailles à Séve, de Séve à Corbeil, & de Corbeil à Orleans : mais voici ce que l'on trouva par le droit chemin.

*Nivellemens*

*Nivellemens faits depuis Orleans jusqu'à l'Etang de Trape.*

De la Mont-joye à la Croix de Toury en montant	10 pieds.
De la Croix de Toury à celle qui est sur le grand chemin près d'Angerville, vis-à-vis d'Arbouville, en montant encore	10
De ladite Croix au Moulin d'Ovitreville en montant	16
Du Moulin d'Ovitreville à l'Orme de Sainville en montant	19
Dudit Orme au Moulin des Effarts aux environs de Haute-Briere en montant	68
Somme totale 123 pieds dont on étoit monté depuis la Mont-joye.	

Mais du Moulin des Effarts à Trape on ne descendit que de 58 pieds ; par conséquent il restoit encore 65 pieds, ou environ 11 toises dont l'Etang de Trape est plus haut que le pavé de la Mont-joye ; c'étoit moins d'une toise que par les premiers nivellemens : mais pour dire la vérité, bien que ces derniers nivellemens eussent été faits par un chemin beaucoup plus court que les premiers, on eut un si mauvais tems en traversant la Beauce, qu'il pourroit bien s'être glissé quelque petite erreur, nonobstant tous les soins qu'on y apportoit ; & , comme on a déjà dit, on peut bien partager un si petit différent par la moitié ; joint que si la chose dont il s'agissoit avoit eu quelqu'apparence d'être possible, il eût fallut en venir plus à loisir à un dernier éclaircissement : mais d'autant que les nivellemens faits par divers chemins, montreroient évidemment que la Beauce, à la sortie de la Forêt d'Orleans, étoit plus basse non seulement que l'E-

tang de Trape , mais encore que le rez-de-chaussée du Château de Versailles ; il n'en falloit pas davantage pour juger , qu'il étoit impossible de conduire l'eau de la Loire à fleur de terre jusqu'au Château de Versailles , & qu'on auroit été obligé d'élever un Aqueduc depuis le milieu de la Forêt d'Orleans jusqu'à Angerville.

On peut ajoûter à cette Relation quelques autres Nivellemens que M. Picard fit aux environs de Versailles , pour faire voir jusqu'à qu'elle justesse on peut parvenir en nivellant de la maniere que l'on a expliquée ci-dessus.

A la tête de la Riviere de Bièvre , que l'on appelle autrement des Gobelins , il a deux grandes pleines , l'une au-dessous de Trape , & l'autre au-dessus de Boisdarcy , dont les eaux s'écoulent par deux gorges assez étroites , que l'on pouvoit fermer pour faire deux Etangs considérables ; mais il s'agissoit de sçavoir si les eaux de ces Etangs auroient assez de hauteur pour être conduites au Château de Versailles ; ce qu'il importoit d'autant plus de bien connoître , qu'il falloit percer la montagné de Sataury pour les faire passer.

Les endroits des Bondes ayant été marquées , il trouva que le fond de l'Etang de Trape auroit environ 15 pieds de hauteur par-dessus la superficie du Reservoir du dessus de la Grotte de Versailles , & que l'Etang de Boisdarcy seroit plus haut que celui de Trape de 9 pieds.

Après avoir fait ces nivellemens par plusieurs fois & en diverses manieres , on lui ordonna de marquer avec des piquets la conduite des eaux de Trape , qui se devoit faire à découvert jusqu'à l'endroit où il falloit percer la Montagne de Sataury , & pour toute la longueur du chemin , qui devoit être d'environ 4000 toises , à cause des vallons qu'il falloit côtoyer , on voulut qu'il ne prît que 3 pieds de pente , afin de conserver l'eau dans la plus grande hauteur qu'il seroit possible. Il avoit aussi

marqué séparément la conduite des eaux de l'Etang de Boisdarcy , qui étoit plus courte que l'autre de près de la moitié : mais on trouva à propos de les joindre toutes deux ensemble.

On éleva les chaussées des Etangs , on travailla à la conduite & l'on fit en même tems un Aqueduc long de 750 toises au travers de la Montagne de Sataury , à 14 toises au-dessous du plus haut terrain, le tout sur la bonne-foi des nivellemens , qui se sont enfin trouvez si justes , qu'après avoir mis de l'eau dans l'Etang de Trape , & qu'elle a été lâchée dans la conduite ou rigole , il est arrivé que cette eau étant en repos , s'est trouvée à l'entrée de la Montagne de Sataury , haute de 3 pieds , lorsqu'elle étoit à fleur du seuil de l'étang de Trape , comme on avoit déterminé par les Nivellemens.

Il ne fera pas hors de propos de remarquer ici , que l'eau de l'étang de Trape étant lâchée avec une charge de trois pieds , employe quatre heures de tems à faire 4000 toises de chemin avec trois pieds de pente. Mais ce qui est encore de plus considérable , c'est qu'après que les tuyaux de conduite eurent été placez depuis l'entrée de la Montagne de Sataury jusques dessus la Grotte de Versailles , sa Majesté faisant faire le premier essai de ces eaux , eut le plaisir de voir qu'elles sortoient avec tant de force , qu'il n'y avoit pas lieu de douter qu'elles n'eussent pû monter beaucoup plus haut , conformément aux nivellemens qui en avoient été faits , & en descendant de dessus la Grotte elle témoigna à M. Picard qu'elle étoit fort contente.

On ne doit pas oublier d'avertir que M. Roëmer a eu beaucoup de part aux Nivellemens , qui ont été faits aux environs de Versailles , ayant assez souvent tenu la place de M. Picard lorsqu'il étoit malade , ou qu'il étoit obligé de s'absenter pour quelqu'autre empêchement.

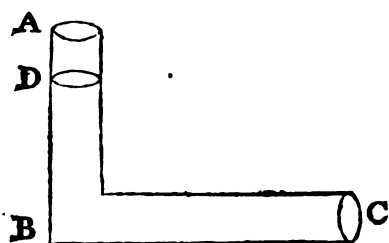


# DE CRASSITIE ET VIRIBUS

*Tuborum in Aquæductibus secundum diversas  
Fontium altitudines diversasque tuborum dia-  
metros.*

A. D. ROMER anno 1680.

**C**OGNITISSIMUM est altiores fontes, & ampliores ductuum diametros multo fortiora requirere tuborum latera, quàm aqua quæ ex depressiori loco per canalem angustum exoneratur; à nemine vero quod



sciam hætenus sufficienter explicatum est qua proportionem immutare convenit crassitiem metalli ad retinendam eandem tuborum firmitatem in quibuscumque altitudinibus & diametris propositis. Regulis

in illum usum condendis inservient sequentes propositiones, in quibus suppono tubum continuum ABC ad angulum rectum inflexum in B. In parte AB perpendiculari indefinitæ amplitudinis, considero altitudinem incumbentis quæ; in parte vero horisontali BC indefinitæ longitudinis, considero amplitudinem tuborum.

## PROPOSITIO PRIMA.

Idem tubus clausus in C ab aquis diversarum altitudinum AB, DB distenditur in ratione altitudinum AD ad DB, patet.

## PROPOSITIO SECUNDA.

Aqua ejusdem altitudinis in distendendis tubis diversarum diametrorum valet ut diametri tuborum.

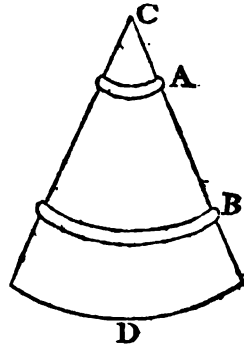
Nam vires aquæ sunt ut superficies in quas ponderant ex eadem altitudine, sed superficies cylindricæ sunt ut diametri.

## PROPOSITIO TERTIA.

( Inutilis, nisi contrarium ejus quod hic astruitur assumptum fuisset ab aliis ad concludendum falsum in hac ipsa materia. )

Cylindrus amplius eodem modo resistit disruptioni secundum suam longitudinem ac parvus, si utrobique iisdem viribus sit resistendum. Si exempli gratia, vel altitudines sint in ratione reciproca superficierum, vel supponatur in tubis contineri liquores diversæ gravitatis absolutæ in ratione ipsarum superficierum directæ.

Ad hoc intelligendum imaginemur duos annulos A, B, ejusdem crassitie, sed diversarum diametrorum, æqualibus viribus trudi deorsum, circa conum CD. Neutrum autem facilius rumpitur, si materia utriusque eadem sit & uniformis, non aliter quam suspensum pondus eadem facilitate rumpit filum longum ac breve, modo ejusdem sint crassitudinis: sed res eodem modo se habet in disruptione plurium annulorum qui cylindrum constituunt.



## PROPOSITIO QUARTA.

Vires tuborum ad resistendum disruptioni sunt in duplicata ratione crassitierum metalli.

Vuuu iij,

Nam vires singulorum annulorum in quos tubus resolvitur sunt ut quadrata crassitierum suarum vel ut superficies in disruptione separandæ.

Hinc tres sequentes regulæ extruuntur.

*Regula prima.*

Si manente altitudine aquæ libeat mutare diametrum tubi, oportet ad retinendam eandem firmitatem mutare crassitiem metalli in subduplicata ratione diametrorum, seu ut eorum radices, per 2 & 4 propositionem.

*Regula secunda.*

Si immutetur altitudo, manente diametro, debet eodem modo crassities augeri ut radices altitudinum, per 1 & 4 propositionem.

*Regula tertia.*

Invenitur crassities metalli post immutatam & altitudinem & diametrum, si fiat : Ut productum altitudinis in diametrum unius, ad productum altitudinis in diametrum alterius; sic quadratum crassitiei unius, ad quadratum crassitiei alterius.

*Exemplum.*

Tubus plumbeus diametri 16 pollicum ab incumbente aqua 50 pedum habens crassitiem  $6\frac{1}{2}$  linearum, inventus est sufficientis firmitatis in experimento Versalliano, quæritur quænam assignari crassities tubo plumbeo debet, cujus diameter 10 pollicum, & altitudo aquæ 40 pedum.

Productum 16 in 50 est 800.

& 10 in 40 est 400.

Quadratum crassitiei datæ 40.

Ergo ut 800 ad 400, sic 40 ad 20, cujus radix  $4\frac{1}{2}$  feret

ergo tubus hujus crassitiei in proposita altitudine & diametro, æque fortis erit ac ille quem expertus sum.

*EXPERIMENTA CIRCA  
altitudines & amplitudines projectionis corporum  
gravium, instituta cum argento vivo à D. Romer.*

JACTUS verticalis fuit 270 linearum, cujus observatio cum sit difficilior, confirmata est ab altitudinibus jactu parum à vertice declinantium, veluti in gradu 5° 268 lin. in gradu 10° 262 linearum.

Hinc ex supposito impetu 270 lin. computantur altitudines & amplitudines projectionum, & conferuntur cum observatis in sequenti tabella.

Elevatio directionis. Grad.	Amplitudo computata. Poll. Lin.		Amplitudo observata. Poll. Lin.		Correspond. suprà 45°. Poll. Lin.		Altitudo computata. Lin.	Altitudo observata. Lin.
5	7	10	8	9	7	8	2	4
10	15	5	16	6	15	2	8	9
15	22	6	23	9	22	4	18	21
25	34	6	35	6	35	0	48	51
35	42	3	43	0	42	0	89	94
45	45	0	44	9			135	140
55	42	3	42	0			181	187
65	34	6	35	0			222	226
75	22	6	22	4			252	254
80	15	5	15	2			262	262
85	7	10	7	8			268	269
90	0	0	0	0			270	270

*Notæ ex observationibus depromptæ.*

I. Filum seu cylindrus erumpens, multo major est quam foramen, etiam quando directio ad horizontem est inclinata.

II. In jactibus obliquioribus ut  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $35^\circ$  gradum, &c. filum fluxus in descensu extenditur, & separatur non quidem in penicillum; sed in latum secundum planum verticale.

III. Jactus verticalis argenti vivi vix propius accedit ad altitudinem sui fontis, quam ipsius aquæ.

Hinc in altitudine duorum pedum defecit plus quam 18 lineis; cum tamen tubus respectu foraminis fuerit amplissimus.

*In collatione calculi cum observatis apparet.*

I. Directiones infra  $45^\circ$  faciunt amplitudines majores quam correspondentes supra; cum juxta theoriæ æquali angulo distantes à  $45^\circ$  deberent esse ejusdem amplitudinis.

II. Directiones supra  $45^\circ$  magis respondent calculo.

III. Melius conveniunt amplitudines & secum & cum calculo, si fumantur guttæ quæ omnium longissime projiciuntur. Ego quidem annotavi omnium medias in determinatione amplitudinum.

IV. Altitudines ferè ubique sunt majores calculatis; quamvis hypothesi altitudinis maximæ sit bona.

*F I N.*

